ВЫЧИСЛИМО ОТДЕЛИМЫЕ АЛГЕБРЫ

Н.Х. Касымов

профессор Национального университета Узбекистана им. М. Улугбека

Казанский Федеральный университет, Казань, 28 сентября 2022 г.

Аннотация: *Вычислимо отделимые нумерации. Теорема А.И.Мальцева о вычислимой отделимости негативных нумераций. Негативные алгебры. Оператор эффективного отвержения. Критерий вычислимой отделимости.*

1. Вычислимо отделимые нумерации

Пусть (M, μ) – нумерованное множество. Напомним, что подмножество $M_0 \subseteq$ множества M называется (μ-) вычислимым (перечислимым, негативным и т.д.), если таковым является полный μпрообраз множества M_0, т.е. множество $\nu^{-1} M_0$.

Определение 1.1

Нумерация μ множества M называется вычислимо отделимой, если для любых различных $a_0, a_1 \in M$ существует такое μ-вычислимое подмножество $M_0 \subseteq M$, что $a_0 \in M_0 \wedge a_1 \notin M_0$.

Теорема 1.2

А.И.Мальцев[a] Для всякой негативной эквивалентности любые пара ее различных классов эквивалентности вычислимо отделима.

[a] А.И. Мальцев. Позитивные и негативные нумерации // ДАН СССР, 1965, 160, No 2, 278-280.

Замечание 1.3

В теореме А.И.Мальцева не утверждается, что для нумерации μ любая пара различных элементов отделяется подходящим μ-вычислимым множеством. Констатируется, что всякая пара различных элементов вычислимо отделима.

Доказательство основано на теореме о редукции.

Теорема 1.4 о редукции

Пусть α, β вычислимо перечислимы и $\alpha \cup \beta = \omega$. Тогда существуют такие вычислимо перечислимые множества A, B, что $\alpha \subseteq A, \beta \subseteq B, A \cup B = \omega$ и $A \cap B = \emptyset$.

Доказательство

При пересчете элементов из пересечения $\alpha \cap \beta$ действуем по принципу "кто первый взял, то и съел".

Доказательство теоремы А.И.Мальцева

Пусть $a, b \in M$, $a \neq b$ и μ – негативная нумерация множества M. Тогда как $\alpha = \omega \setminus \mu^{-1}(a)$, так и $\beta = \omega \setminus \mu^{-1}(a)$ вычислимо перечислимые множества. Очевидно, что $\alpha \cup \beta = \omega$. Применяем теорему о редукции.

Оказалось, что a, b можно не просто отделять вычислимыми множествами, но корректными относительно нумерации (μ-замкнутыми), т.е. существует такое $M_0 \subseteq M$, что $a \in M_0, b \notin M_0$ и $\mu^{-1}M_0$ вычислимо. Чтобы это показать введем ряд понятий.

Для двух эквивалентностей будем говорить, что первая является расширением второй, если вторая содержится в первой.
Напомним, что характеристической трансверсалью эквивалентности η называется множество минимальных представителей всех η-классов, т.е. $\{x \mid \forall y(x = y \pmod{\eta} \to x \leqslant\leq y)\}$, которое мы обозначили через $tr(\eta)$.

Предложение 1.5

Характеристическая трансверсаль любой негативной (позитивной) эквивалентности вычислимо перечислима (коперечислима).

Доказательство

В самом деле, для негативной эквивалентности η *на* ω *имеем* $x \in tr(\eta) \Leftrightarrow \forall y < x (x \neq y \pmod{\eta})$, *где правая часть равносильности вычислимо перечислима. Если же* η *позитивна, то* $x \notin tr(\eta) \Leftrightarrow \exists y < x (x = y \pmod{\eta})$.

Эквивалентность с бесконечным (конечным) числом смежных классов будем называть бесконечной (конечной). Множество называется η-бесконечным (η-конечным), если его η-замыкание состоит из бесконечного (конечного) числа классов η-эквивалентности. Очевидно, что необходимым (но не достаточным) условием η-бесконечности множества является его бесконечность.

Если η – эквивалентность на ω, то η-замыканием множества α, обозначаемым через $[\alpha]_\eta$, называется пересечение всех η-замкнутых расширений множества α. Оператор $[]_\eta$ называется оператором η-замыкания.

Если η – эквивалентность и δ – множество, то будем говорить, что число x η-отвергается множеством δ, если $x \notin [\delta]_\eta$. Легко заметить, что для любой фиксированной негативной эквивалентности η отношение "натуральное число x η-отвергается конечным множеством δ" является равномерно вычислимо перечислимым по x, δ (подразумевается явное задание всех элементов множества δ, например, посредством его канонического индекса). Если из контекста ясно, о какой негативной нумерации (или ее ядре) идет речь, то будем говорить, что x отвергается данным конечным множеством.

Определение 1.6

Если η – негативная эквивалентность, то оператор η-замыкания назывется оператором эффективного отвержения.

Теорема 2.1

Всякая негативная эквивалентность вычислимо отделима.

Доказательство. Пусть η – негативная эквивалентность. Покажем, что для любой пары $x \neq y \pmod{\eta}$ существует η-замкнутое разрешимое множество, отделяющее x, y и, более того, это множество равномерно строится по данным x, y.
Шаг 0. $A_x^0 = \{x\}, A_y^0 = \{y\}$.
Шаг $s+1$. Пусть z – наименьшее натуральное число, не принадлежащее $A_x^s \cup A_y^s$. Проверяем z на предмет его отвержения хотя бы одним из множеств A_x^s, A_y^s. Если z отвергается A_x^s, то полагаем $A_x^{s+1} = A_x^s, A_y^{s+1} = A_y^s \cup \{z\}$; если x отвергается A_y^s, то полагаем $A_x^{s+1} = A_x^s \cup \{z\}, A_y^{s+1} = A_y^s$. Если z отвергается обоими множествами, то относим его к A_x^{s+1}. Конец шага $s+1$.

Определим

$$A_x = \bigcup_{s\in\omega} A_x^s, A_y = \bigcup_{s\in\omega} A_y^s.$$

Индукцией по шагам построения легко показать, что каждый шаг заканчивается с отнесением текущего тестируемого натурального числа к одному из двух множеств, а также тот факт, что $[A_x^s]_\eta \cap [A_y^s]_\eta = \emptyset$ для любого шага s. Поэтому перечислимые A_x, A_y не пересекаются, являются η-замкнутыми и их объединение покрывает все ω. Равномерная зависимость индексов характеристических функций A_x, A_y от x, y очевидна. Теорема доказана.

Следствие 2.2

Всякая негативная алгебра вычислимо отделима.

Предложение 3.1

Если все операции алгебры $\mathfrak{A}$ с основным множеством A согласованы с эквивалентностью θ на A, то и все трансляции согласованы с θ. Верно и обратное, т.е. если все трансляции согласованы с θ, то все операции θ-допустимы.

Пусть все операции θ-допустимы (т.е. θ – конгруэнция). Рассмотрим трансляцию (терм) $t(x, \bar{a})$, где x – переменная, а $\bar{a}$ – набор фиксированных элементов носителя системы. Индукция по высоте терма. Если $h(t) = 1$, то θ-допустимость вытекает из определения. Если для всех термов высоты не более m утверждение верно, $t = f(t_1(x, \bar{a}), \ldots, t_n(x, \bar{a}))$, $t_1(x, \bar{a}) \ldots, t_n(x, \bar{a})$ являются θ-допустимыми и $m = \max\{h(t_1), \ldots, h(t_n)\}$, то, в силу индукционного предположения, имеют место импликации

$$x_1 \theta x_2 \Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} t_i(x_1, \bar{a}) \theta t_i(x_2, \bar{a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t_1(x_1, \bar{a}), \ldots, t_n(x_1, \bar{a})) \theta f(t_1(x_2, \bar{a}), \ldots, t_n(x_2, \bar{a})),$$

т.е. $t(x) = f(t_1(x, \bar{a}), \ldots, t_n(x, \bar{a}))$ согласована с θ.
Обратно, если все трансляции являются θ-допустимы, то таковы же, в частности, и трансляции высоты 1 (т.е. трансляции вида $\lambda x f(x, \bar{a})$, так называемые элементарные трансляции). Пусть f – n-местная операция и $\bigwedge_{i=1}^{n} x_i \theta y_i$. Имеем цепь θ-сравнений длины n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \theta f(y_1, x_2, \ldots, x_n) \theta \ldots \theta f(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n) \theta$$

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

3. Алгебраические факты

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольная алгебра с основным множеством A. Следуя А.И.Мальцеву[1] назовем трансляцией любую одноместную операцию вида $\lambda x.t(x, \bar{a})$, где t – термальная операция, $\bar{a}$ – произвольный набор элементов алгебры $\mathfrak{A}$. При этом, в записи терма t переменная x может встречаться более одного раза. Обозначим через T множество всех трансляций алгебры $\mathfrak{A}$, включающее тождественную трансляцию, а через $T(a, b)$ – эквивалентное замыкание множества

$$\{\langle t(a), t(b)\rangle | t \in T\},$$

где $a, b \in A$, т.е. $T(a, b)$ лежит в пересечении всех конгруэнций, содержащих пару $\langle a, b\rangle$ (называемой главной конгруэнцией, порожденной этой парой).
Будем писать $c \sim d$ для сокращения обозначения эквивалентности $\langle c, d\rangle \in T(c, d)$.

[1] А.И. Мальцев. К общей теории алгебраических систем // Матем. сб., 1954, 50, No 1, 3-20.

Лемма 3.2

$T(a,b)$ – наименьшая конгруэнция, содержащая пару $\langle a,b\rangle$.

Доказательство

Очевидно, что $T(a,b)$ включается в любую конгруэнцию, содержащую пару $\langle a,b\rangle$. Пусть $c\sim d$. Тогда существует конечная цепь $c\sim\cdots\sim d$. Индукцией по длине цепи можно показать, что в этом случае для всякой трансляции t существует также и цепь $t(c)\sim\cdots\sim t(d)$, что следует из определения множества $T(a,b)$. Если $c\sim d$, то для любой трансляции t имеет место $t(c)\sim t(d)$. Если, скажем, $c\sim e\sim d$, то $\exists t_1,t_2\in T[c=t_1(a)\wedge e=t_1(b)=t_2(a)\wedge d=t_2(b)$, т.е. $t(c)\sim t(e)\sim t(d)$. И т.д. Следовательно, t согласована с эквивалентностью $T(a,b)$. Т.к. это свойство выполняется для всех трансляций, то $T(a,b)$ – конгруэнция. Лемма доказана.

Обозначим через Θ множество всех конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть A_0, A_1 – разбиение основного множества A алгебры $\mathfrak{A}$ на две непересекающиеся части, объединение которых есть A.

Рассмотрим множество $\Theta(A_0, A_1)$ всех таких конгруэнций, каждая из которых не "склеивает" никакой элемент из A_0 ни с каким элементом из A_1. Другими словами

$$\Theta(A_0, A_1) = \{\theta | \theta \in \Theta, \forall x \in A_0 \forall y \in A_1 [x \neq y \pmod{\theta}]\}.$$

Лемма 3.3 о наибольшей несклеивающей конгруэнции

В $\Theta(A_0, A_1)$ существует наибольший элемент.

Доказательство. Заметим, что $\Theta(A_0, A_1) \neq \emptyset$, т.к. $id\ A \in \Theta(A_0, A_1)$. Рассмотрим множество $\Theta^*(A_0, A_1)$ всех конгруэнций, каждая из которых содержит все конгруэнции из $\Theta(A_0, A_1)$. Это множество также непусто, т.к. $A^2 \in \Theta^*(A_0, A_1)$. Пусть θ^* – пересечение всех конгруэнций из $\Theta^*(A_0, A_1)$. Тогда θ^* является точной верхней гранью для множества $\Theta(A_0, A_1)$. Покажем, что $\theta^* \in \Theta(A_0, A_1)$.

Нетрудно проверить, что если $\overline{\Theta}$ – произвольное подмножество множества Θ всех конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$, то их точная верхняя грань $\overline{\theta} = \sup(\bigcup_{\theta \in \overline{\Theta}} \theta)$ определяется правилом:

$$a = b \pmod{\overline{\theta}} \Leftrightarrow \exists n \geqslant 1 \exists a_1 \dots a_{2n} \in A \exists \theta_1 \dots \theta_n \in \overline{\Theta} \exists t_1 \dots t_n \in T(\mathfrak{A}) :$$

$$a = t_1(a_1) \wedge$$
$$[\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{2i-1} = a_{2i} \pmod{\theta_i})] \wedge [\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n-1} (t_i(a_{2i}) = t_{i+1}(a_{2i+1}))]$$
$$\wedge t_n(a_{2n}) = b,$$

где $T(\mathfrak{A})$ – множество всех трансляций алгебры $\mathfrak{A}$, включающее тождественную трансляцию.
Если бы θ^* не лежала в $\Theta(A_0, A_1)$, то, согласно этому определению, некоторая конгруэнция из $\Theta(A_0, A_1)$ содержала бы пару $\langle a_0, a_1 \rangle$ для подходящих $a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$. Противоречие Лемма доказана.

3. Алгебраические факты

Для наибольшей конгруэнции θ^* из множества $\Theta(A_0, A_1)$ справедлива

Лемма 3.4

$a \neq b \pmod{\theta^*}$ *тогда и только тогда, когда существует такая трансляция* t *из* T, *что* $t(a) \in A_0 \wedge t(b) \in A_1$ *либо* $t(a) \in A_1 \wedge t(b) \in A_0$.

Доказательство

Пусть $a = b \pmod{\theta^*}$. *Тогда* $T(a, b)$ *по лемме 3.3 есть элемент* $\Theta(A_0, A_1)$, *т.е.* $T(a, b) \cap (A_0 \times A_1) = \emptyset$.
Допустим, что $a \neq b \pmod{\theta^*}$. *Поскольку* θ^* *– наибольшая в* $\Theta(A_0, A_1)$, *то* $a \neq b$ *по модулю любой конгруэнции из* $\Theta(A_0, A_1)$. *Поэтому* $T(a, b) \notin \Theta(A_0, A_1)$, *т.е.* $T(a, b) \cap (A_0 \times A_1) \neq \emptyset$. *Лемма доказана.*

Теорема 4.1

Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.

Доказательство. Пусть $(\mathfrak{A}, \mu)$ – вычислимо отделимая нумерованная алгебра, F – вычислимое (в смысле Ю.Л.Ершова[2]) семейство вычислимых функций, представляющих операции алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации μ.

Теперь трансляциями будем называть одноместные вычислимые функции вида $\lambda x.t(x, \bar{a})$, где t – термальная функция, в которой каждый символ интерпретируется вычислимой функцией из F, представляющей соответствующую операцию алгебры $\mathfrak{A}$ в нумерации μ, а $\bar{a}$ – произвольный набор натуральных чисел, являющихся номерами параметров. Очевидно, что множество T всех трансляций вычислимо (опыть-таки в смысле Ю.Л.Ершова).

[2] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

Пусть $\mu m \neq \mu n$, тогда, по условию, существует такое μ-замкнутое вычислимое множество α, что $m \in \alpha, n \in (\omega \setminus \alpha)$.

Пусть $A_0 = \mu\alpha, A_1 = \mu(\omega \setminus \alpha)$. Используя обозначения предыдущих лемм рассмотрим наибольшую конгруэнцию θ^* из множества $\Theta(A_0, A_1)$. Покажем, что именно θ^* есть негативная конгруэнция, по модулю которой различны элементы $\mu m, \mu n$ алгебры $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим множество $\sigma = \{\langle x, y\rangle | \exists t \in T[(t(x) \in \alpha \wedge t(y) \in (\omega \setminus \alpha)) \vee (t(y) \in \alpha \wedge t(x) \in (\omega \setminus \alpha))]\}$. Согласно лемме 3.4 имеем:

$$\mu x \neq \mu y \pmod{\theta^*} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \sigma.$$

Таким образом, элементы $\mu m, \mu n$ различаются негативной конгруэнцией θ^*.

Обратно, пусть нумерованная алгебра $(\mathfrak{A}, \mu)$ аппроксимируется негативными алгебрами. Если $\mu m \neq \mu n$, то, согласно условию, существует такая негативная алгебра $(\mathfrak{B}, \nu)$, гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ и вычислимая функция f, что $\varphi\mu m \neq \varphi\mu n$ и $\varphi\mu = \nu f$. Допустим, что существует ν-замкнутое вычислимое множество α, отделяющее $f(m)$ от $f(n)$. Тогда множество $f^{-1}\alpha$ является μ-замкнутым вычислимым множеством, отделяющим m от n. Поэтому для завершения доказательства теоремы остается сослаться на следствие 2.2 о вычислимой отделимости любой негативной алгебры.

4. Критерий вычислимой отделимости

Предложение 4.2

Всякая универсальная алгебра, обладающая вычислимо отделимой нумерацией с иммунной характеристической трансверсалью является финитно аппроксимируемой.

Доказательство

Пусть $\mathfrak{A}$ *– универсальная алгебра и* μ *– ее вычислимо отделимая нумерация, характеристическая трансверсаль ядра которой* $tr(ker(\mu))$ *иммунна. Допустим, что* $\mu m \neq \mu n$, *тогда, по теореме 4.1, существует* μ*-негативная конгруэнция* θ *алгебры* $\mathfrak{A}$, *различающая эти элементы, т.е.* $\mu m \neq \mu n \pmod{\theta}$ *и множество* $\{\langle x, y\rangle | \mu x \neq \mu y \pmod{\theta}\}$ *вычислимо перечислимо. Положим* $\mu^* = \theta^* \mu$, *где* θ^* *– естественное наложение* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}/\theta$. *Тогда* μ^* *– негативная нумерация фактор-алгебры* $\mathfrak{A}/\theta$ *и* $\mu^* m \neq \mu^* n$. *Т.к.* $\{\langle x, y\rangle | \mu x = \mu y\} \subseteq \{\langle x, y\rangle | \mu^* x = \mu^* y\}$, *то* $tr(\mu^*) \subseteq tr(\mu)$, *но* $tr(\mu)$, *по предложению 1.5, вычислимо перечислимое множество. В силу иммунности* $tr(\mu)$ *множество* $tr(\mu^*)$ *конечно, а значит конечна и фактор-алгебра* $\mathfrak{A}/\theta$.

4. Критерий вычислимой отделимости

Напомним, что эквивалентность называется неэффективно бесконечной, если ее характеристическая трансверсаль бесконечна и не существует эффективного вложения в нее диагонали натурального ряда (т.е. не существует вычислимой функции, значения которой различны по модулю данной эквивалентности при различных значениях аргументов).

Следствие 4.4

Всякая универсальная алгебра, обладающая вычислимо отделимой неэффективно бесконечной нумерацией является финитно аппроксимируемой.

Замечание 4.5

Действительно, для любой эквивалентности η на ω имеет место $tr(\eta)$ иммунна $\Rightarrow$ η неэффективно бесконечна $\Rightarrow$ $tr(\eta)$ гипериммунна. Обратное неверно.

Напомним (предыдущая лекция)
Пусть $\alpha \subseteq \omega$. Рассмотрим следующие эквивалентности (см. Ю.Л. Ершов [3]):
1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup \{\langle 2x+1, 2x\rangle | x \in \alpha\rangle\} \cup id\ \omega$;
2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup id\ \omega$;
3) $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \setminus \alpha = \gamma_y \setminus \alpha\}$, где γ — каноническая нумерация конечных множеств (равносильно $\eta^*_\alpha = \{\langle x, y\rangle | \gamma_x \triangle \gamma_y \subseteq \omega \setminus \alpha\}$).
Все эти эквивалентности вычислимо отделимы. При этом
a) ни для какого $\alpha \subseteq \omega$ характеристическая трансверсаль эквивалентности η^α не является иммунной, т.к. $2\omega \subseteq tr(\eta^\alpha)$ для любого α. В частности, η^α эффективно бесконечна для любого α;
b) эквивалентность η_α эффективно бесконечна тогда и только тогда, когда $\omega \setminus \alpha$ иммунно.

Для эквивалентностей типа η^*_α имеет место

[3] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

Предложение 4.6

Если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то эквивалентность η^*_α – эффективно бесконечная эквивалентность с иммунной характеристической трансверсалью.

Доказательство

Пусть α произвольное множество с иммунным не гипериммунным дополнением и $\delta_0, \delta_1, \ldots$ – сильная таблица для $\omega \setminus \alpha$, т.е. $\forall n \in \omega[\delta_n \cap (\omega \setminus \alpha) \neq \emptyset]$, $m \neq n \Rightarrow \delta_m \cap \delta_n = \emptyset$ и функция f, сопоставляющая множеству δ_n его канонический индекс $\gamma_{f(n)}$ вычислима. Тогда характеристическая трансверсаль η^*_α иммунна, т.к. если $\{z_0, z_1, \ldots\}$ – бесконечное вычислимо перечислимое подмножество $tr(\eta^*_\alpha)$, то $\bigcup_{n\in\omega} \gamma_{f(z_n)}$– бесконечное вычислимо перечислимое подмножество иммунного множества $\omega \setminus \alpha$. С другой стороны, бесконечное вычислимо перечислимое множество $\bigcup_{n\in\omega} \delta_n$ состоит из попарно не η^*_α-эквивалентных чисел.

Определение 4.7

Универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется подпрямо неразложимой, если в любом изоморфном представлении алгебры $\mathfrak{A}$ в виде подпрямого произведения алгебр $\mathfrak{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ по крайней мере одно из естественных наложений $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_\lambda$ является изоморфизмом.

Равносильно

Определение 4.8

Универсальная алгебра называется подпрямо неразложимой, если пересечение всех ее ненулевых конгруэнций является ненулевой конгруэнцией.

Теорема 4.9 (Г.Биркгоф)

Всякая универсальная алгебра подпрямо разлагается в прямое произведение далее подпрямо неразложимых алгебр.

Следствие 4.10

Всякая вычислимо отделимая нумерация подпрямо неразложимой универсальной алгебры является негативной.

Доказательство

Пусть μ *– вычислимо отделимая нумерация подпрямо неразложимой универсальной алгебры* $\mathfrak{A}$. *Согласно определению 4.8 в алгебре* $\mathfrak{A}$ *существует пара различных элементов, совпадающих по модулю любой ненулевой конгруэнции алгебры* $\mathfrak{A}$. *Однако, по теореме 4.1, эти элементы различаются некоторой негативной конгруэнцией и поскольку единственной различающей их конгруэнцией является нулевая, то необходимо она и будет негативной, т.е.* μ *– негативна.*

Следствие 4.11

Всякая вычислимо отделимая нумерация конгруэнц-простой универсальной алгебры является негативной.

1. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984, 568 с.
2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999, 360 с.
3. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977, 416 с.
4. Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980, 415 с.
5. Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977, 614 с.
6. Кон П. М. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968, 352 с.
7. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970, 392 с.
8. Мартин-Леф П. Очерки по конструктивной математике. М.: Мир, 1975, 136 с.
9. Соар И. Р. Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество. Под редакцией М.М. Арсланова, 2000, 576 с.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!