

УДК 512

**НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ТОЖДЕСТВ ПОДПРОСТРАНСТВ
 $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ МАТРИЧНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ
 $M^{(m,k)}(F)$**

*C.Ю. Антонов***Аннотация**

Введены и исследованы несколько видов многочленов свободной ассоциативной алгебры $F\{Z\}$. Найдены условия, при которых эти многочлены являются тождествами подпространств $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ супералгебры $M^{(m,k)}(F)$.

Ключевые слова: T -идеал, полиномиальное тождество, матричная супералгебра.

Введение

Пусть F – произвольное поле, $F\{Z\}$ – свободная ассоциативная алгебра, порожденная счетным множеством $Z = \{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, m, k – любые натуральные числа, $M_{m+k}(F)$ – алгебра $(m+k) \times (m+k)$ -матриц с элементами из F , $M^{(m,k)}(F) = (M_{m+k}(F), M_0^{(m,k)}(F), M_1^{(m,k)}(F))$ – матричная супералгебра, градуированная подпространствами:

$$M_0^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{m \times m}(F) & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & D_{k \times k}(F) \end{pmatrix} \right\}, \quad M_1^{(m,k)}(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times k}(F) \\ A_{k \times m}(F) & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \right\}.$$

Через $L(Z)$ будем обозначать линейную оболочку множества Z . Напомним, что многочлен $f(z_{i_1}, \dots, z_{i_n}) \in F\{Z\}$ называется полиномиальным тождеством подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$, где $i = 0, 1$, если для любого гомоморфизма $\varphi \in \text{Hom}_F(F\{Z\}, M_{m+k}(F))$ такого, что $\varphi(L(Z)) \subseteq M_i^{(m,k)}(F)$, справедливо равенство: $\varphi(f(z_{i_1}, \dots, z_{i_n})) = 0$.

Нетрудно видеть, что множество всех полиномиальных тождеств подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$, $i = 0, 1$, образует двусторонний идеал алгебры $F\{Z\}$, который называется идеалом тождеств подпространства $M_i^{(m,k)}(F)$ и обозначается символом $T[M_i^{(m,k)}(F), M_{m+k}(F)]$. Мы будем использовать более короткую запись $T[M_i^{(m,k)}(F)]$.

В [1] показано, что $f_3(z_1, z_2, z_3) = z_1 z_2 z_3 - z_3 z_2 z_1 \in T[M_1^{(1,1)}(F)]$, $f_5(z_1, \dots, z_5) = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 - z_1 z_4 z_5 z_2 z_3 + z_3 z_2 z_5 z_4 z_1 - z_3 z_4 z_1 z_2 z_5 + z_5 z_2 z_1 z_4 z_3 - z_5 z_4 z_3 z_2 z_1 \in T[M_1^{(2,1)}(F)]$.

В настоящей работе мы обобщаем конструкцию многочленов $f_3(z_1, z_2, z_3)$, $f_5(z_1, \dots, z_5)$, приводим их основные свойства и показываем, что полученные многочлены, названные нами квазимногочленами Капелли, являются тождествами подпространств $M_i^{(m,k)}(F)$ начиная с некоторой степени.

1. Определение и основные свойства квазимногочленов Капелли

Пусть S_n – симметрическая группа степени n , $A_n = \{\pi \in S_n \mid \text{sgn } \pi = 1\}$, $A_n^- = \{\tau \in S_n \mid \text{sgn } \tau = -1\}$, $X = \{z_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $Y = \{z_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Кроме того, для любого

$n \in \mathbf{N}$ положим $x_n = z_{2n-1}$, $y_n = z_{2n}$. Очевидно, что $X \cap Y = \emptyset$, $X \cup Y = Z$. Рассмотрим многочлены вида

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)};$$

$$g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)};$$

$$f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)} y_{\tau(n)};$$

$$g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(n)} y_{\tau(n)},$$

которые в дальнейшем будем называть квазимногочленами Капелли.

Установим основные свойства введенных нами многочленов.

Предложение 1. *Многочлены $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ обладают следующими свойствами:*

1) если отображения $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{N}$, $\psi : \{1, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbf{N}$ неинъективны, то

$$f_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-1)}) = 0,$$

$$g_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-1)}) = 0;$$

2) для любого $\sigma \in A_n$

$$f_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y});$$

3) для любого $\mu \in A_n^-$

$$f_{2n-1}(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = -g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n-1}(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = -f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y});$$

4) для любого $\rho \in A_{n-1}$

$$f_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n-1)}) = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n-1)}) = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y});$$

5) для любого $\omega \in A_{n-1}^-$

$$f_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n-1)}) = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n-1)}) = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Доказательство. Проведем его для многочлена $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, поскольку для $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$ оно аналогично.

1. Для отображений φ и ψ имеем

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-1)}) &= \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \cdots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))}. \end{aligned}$$

Если φ , ψ неинъективны, то для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, и $r, s \in \{1, \dots, n-1\}$, $r \neq s$, справедливы равенства $\varphi(i) = \varphi(j)$, $\psi(r) = \psi(s)$.

Пусть π, τ – произвольные элементы групп S_n и S_{n-1} соответственно. Тогда $\pi(a) = i, \pi(b) = j, \tau(c) = r, \tau(d) = s$ для некоторых $a, b \in \{1, \dots, n\}, c, d \in \{1, \dots, n-1\}$. Рассмотрим подстановки $\pi' \in S_n, \tau' \in S_{n-1}$, для которых

$$\pi'(v) = \begin{cases} \pi(v), & \text{если } v \notin \{a, b\}, \\ j, & \text{если } v = a, \\ i, & \text{если } v = b, \end{cases} \quad \tau'(m) = \begin{cases} \tau(m), & \text{если } m \notin \{c, d\}, \\ s, & \text{если } m = c, \\ r, & \text{если } m = d. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \cdots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))} + \\ & + \operatorname{sgn} \pi' \delta_{\operatorname{sgn} \pi' \operatorname{sgn} \tau'} x_{\varphi(\pi'(1))} y_{\psi(\tau'(1))} \cdots y_{\psi(\tau'(n-1))} x_{\varphi(\pi'(n))} = \\ & = \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi(1))} y_{\psi(\tau(1))} \cdots y_{\psi(\tau(n-1))} x_{\varphi(\pi(n))} - \\ & - \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi - \operatorname{sgn} \tau} x_{\varphi(\pi'(1))} y_{\psi(\tau'(1))} \cdots y_{\psi(\tau'(n-1))} x_{\varphi(\pi'(n))} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f_{2n-1}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n-1)}) = 0$.

2. Для произвольного $\sigma \in A_n$ имеем

$$\begin{aligned} & f_{2n-1}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(\pi(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(\pi(n))} = |\text{пусть } \pi = \sigma^{-1}\alpha| = \\ & = \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \alpha \delta_{\operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(\sigma^{-1}\alpha(n))} = \\ & = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

3. Для произвольного $\mu \in A_n^-$ имеем

$$\begin{aligned} & f_{2n-1}(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}, y_1, \dots, y_{n-1}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\mu(\pi(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\mu(\pi(n))} = |\text{пусть } \pi = \mu^{-1}\alpha| = \\ & = \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \mu \operatorname{sgn} \alpha \delta_{\operatorname{sgn} \mu \operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \tau} x_{\mu(\mu^{-1}\alpha(1))} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\mu(\mu^{-1}\alpha(n))} = \\ & = - \sum_{\alpha \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \alpha \delta_{-\operatorname{sgn} \alpha \operatorname{sgn} \tau} x_{\alpha(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\alpha(n)} = -g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

4. Для произвольного $\rho \in A_{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} & f_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n-1)}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\rho(\tau(1))} \cdots y_{\rho(\tau(n-1))} x_{\pi(n)} = |\text{пусть } \tau = \rho^{-1}\gamma| = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\gamma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \rho \operatorname{sgn} \gamma} x_{\pi(1)} y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(1))} \cdots y_{\rho(\rho^{-1}\gamma(n-1))} x_{\pi(n)} = f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

5. Для произвольного $\omega \in A_{n-1}^-$ имеем

$$\begin{aligned} & f_{2n-1}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n-1)}) = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\omega(\tau(1))} \cdots y_{\omega(\tau(n-1))} x_{\pi(n)} = |\text{пусть } \tau = \omega^{-1}\alpha| = \\ & = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\alpha \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \omega \operatorname{sgn} \alpha} x_{\pi(1)} y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(1))} \cdots y_{\omega(\omega^{-1}\alpha(n-1))} x_{\pi(n)} = g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

□

Аналогично доказывается

Предложение 2. *Многочлены $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$ обладают свойствами:*

1) *если отображения $\varphi, \psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{N}$ неинъективны, то*

$$f_{2n}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n)}) = 0,$$

$$g_{2n}(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}, y_{\psi(1)}, \dots, y_{\psi(n)}) = 0;$$

2) *для любого $\sigma \in A_n$*

$$f_{2n}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_n) = f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}, y_1, \dots, y_n) = g_{2n}(\bar{x}, \bar{y});$$

3) *для любого $\mu \in A_n^-$*

$$f_{2n}(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}, y_1, \dots, y_n) = -g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_{\mu(1)}, \dots, x_{\mu(n)}, y_1, \dots, y_n) = -f_{2n}(\bar{x}, \bar{y});$$

4) *для любого $\rho \in A_n$*

$$f_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n)}) = f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_{\rho(1)}, \dots, y_{\rho(n)}) = g_{2n}(\bar{x}, \bar{y});$$

5) *для любого $\omega \in A_n^-$*

$$f_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n)}) = g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$g_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(n)}) = f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Предложение 3. *Справедливы равенства:*

a) *если $n = 2r$, то*

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i} - g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1}; \end{aligned}$$

b) *если $n = 2r + 1$, то*

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}; \end{aligned}$$

c) *если $n = 2r$, то*

$$\begin{aligned} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i} - f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1}; \end{aligned}$$

d) если $n = 2r + 1$, то

$$\begin{aligned} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\ &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}. \end{aligned}$$

Доказательство. а) $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i t_i(y_1, \dots, y_{n-1}, x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n)$, причем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} x_i t_i(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) &= \\ &= \sum_{\pi \in S'_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)}, \end{aligned}$$

где $S'_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(1) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in S'_n(i)$ можно представить в виде $\pi = \sigma \mu_i$, где

$$\mu_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & n \\ i & 1 & \dots & i-2 & i-1 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) = i.$$

Заметим также, что $\operatorname{sgn} \mu_i = (-1)^{i-1}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma \mu_i) \delta_{\operatorname{sgn}(\sigma \mu_i) \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma \mu_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma \mu_i(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{i-1} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \cdots y_{\tau(i)} x_{\sigma(i+1)} \cdots \\ &\quad \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}). \end{aligned}$$

Докажем вторую часть равенства а). Для этого заметим, что

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n v_i(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1}) x_i,$$

причем для любого $i \in \{1, \dots, n\}$

$$v_i(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n, \bar{y}) x_i = \sum_{\pi \in \tilde{S}_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n)},$$

где $\tilde{S}_n(i) = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = i\}$.

Нетрудно видеть, что всякую подстановку $\pi \in \tilde{S}_n(i)$ можно представить в виде: $\pi = \sigma \rho_i$, где

$$\rho_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & i+1 & \dots & n & i \end{pmatrix}, \quad \sigma(i) = i.$$

Заметим также, что $\operatorname{sgn} \rho_i = (-1)^{n-i}$. Положим $S_n(i) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$. Тогда

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\sigma \rho_i) \delta_{\operatorname{sgn}(\sigma \rho_i) \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma \rho_i(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma \rho_i(n)} = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{n-i} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots \\ &\quad \cdots x_{\sigma(i-1)} y_{\tau(i-1)} x_{\sigma(i+1)} y_{\tau(i)} \cdots x_{\sigma(n)} y_{\tau(n-1)} x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^i \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{2i}}, \bar{y}) x_{2i} - g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1}. \end{aligned}$$

б) Рассуждая так же, как и при доказательстве свойства а), получим:

$$f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{2i}});$$

$$\begin{aligned} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{i-1} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i = \\ &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}. \end{aligned}$$

с) Рассуждая так же, как и при доказательстве свойства а), получим:

$$\begin{aligned} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^i \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \cdots \\ &\quad \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{2i}}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{i-1} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\hat{2i}}, \bar{y}) x_{2i} - f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1}. \end{aligned}$$

д) Рассуждая так же, как и при доказательстве свойства а), получим:

$$\begin{aligned} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^i \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} y_{\tau(1)} x_{\sigma(1)} \cdots \\ &\quad \cdots y_{\tau(n-1)} x_{\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} g_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} f_{2(n-1)}(\bar{y}, \bar{x}_{\hat{2i}}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{\sigma \in S_n(i)} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^i \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau} x_{\sigma(1)} y_{\tau(1)} \cdots y_{\tau(n-1)} x_i = \\
&= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} g_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}) x_{2i-1} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} f_{2(n-1)}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}) x_{2i}.
\end{aligned}$$

□

Аналогично предыдущему доказывается

Предложение 4. Справедливы равенства:

a) если $n = 2r$, то

$$\begin{aligned}
f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} f_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} g_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n/2} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i}}) y_{2i} + g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1};
\end{aligned}$$

b) если $n = 2r + 1$, то

$$\begin{aligned}
f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} f_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} g_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\
&= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i}}) y_{2i};
\end{aligned}$$

c) если $n = 2r$, то

$$\begin{aligned}
g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n/2} x_{2i-1} g_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - x_{2i} f_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n/2} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i}}) y_{2i} + f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1};
\end{aligned}$$

d) если $n = 2r + 1$, то

$$\begin{aligned}
g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} x_{2i-1} g_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i-1}}) - \sum_{i=1}^{(n-1)/2} x_{2i} f_{2n-1}(\bar{y}, \bar{x}_{\widehat{2i}}) = \\
&= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1} + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i}}) y_{2i}.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Используя предложения 3, 4, можно получить различного рода разложения многочленов $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$, например, если $n = 2r$, то

$$\begin{aligned}
f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) &= \\
&= \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^{n/2} (x_{2i-1} y_{2j-1} f_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}_{\widehat{2j-1}}) - x_{2i} y_{2j-1} g_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}_{\widehat{2j-1}})) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^{n/2-1} (x_{2i-1} y_{2j} g_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i-1}}, \bar{y}_{\widehat{2j}}) - x_{2i} y_{2j} f_{2(n-1)-1}(\bar{x}_{\widehat{2i}}, \bar{y}_{\widehat{2j}})).
\end{aligned}$$

Совместно с многочленами $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$ рассмотрим транспонированные по отношению к ним многочлены:

$$f_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)};$$

$$g_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} x_{\pi(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)};$$

$$f_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} y_{\tau(n)} x_{\pi(n)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)};$$

$$g_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \delta_{-\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} y_{\tau(n)} x_{\pi(n)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)}.$$

Утверждение 1. Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} f_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{n-1} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho} x_{\sigma(1)} y_{\rho(1)} \cdots y_{\rho(n-1)} x_{\sigma(n)}; \end{aligned}$$

$$g_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^n \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho} x_{\sigma(1)} y_{\rho(1)} \cdots y_{\rho(n-1)} x_{\sigma(n)}.$$

Доказательство. Проведем его для первого равенства, поскольку для второго оно аналогично. Итак,

$$\begin{aligned} f_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \pi \delta_{\operatorname{sgn} \pi \operatorname{sgn} \tau} x_{\pi(n)} y_{\tau(n-1)} \cdots y_{\tau(1)} x_{\pi(1)} = \\ &= |\text{пусть } \pi = \sigma\alpha, \tau = \rho\beta, | \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{sgn} \alpha = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = (-1)^{n(n-1)/2},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \beta &= (-1)^{(n-2)+(n-3)+\dots+1} = \\ &= (-1)^{(n-1)(n-2)/2} = (-1)^{n(n-1)/2} (-1)^{-2(n-1)/2} = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn} \alpha = \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{n-1} \operatorname{sgn} \beta \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \beta} x_{\sigma(1)} y_{\rho(1)} \cdots y_{\rho(n-1)} x_{\sigma(n)} = \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\rho \in S_{n-1}} \operatorname{sgn} \sigma \delta_{(-1)^{n-1} \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \rho} x_{\sigma(1)} y_{\rho(1)} \cdots y_{\rho(n-1)} x_{\sigma(n)}. \end{aligned}$$

□

Следствие 1. Пусть $n = 2r + 1$, тогда

$$f_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^r f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \quad g_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^r g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Следствие 2. Пусть $n = 2r$, тогда

$$f_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^r g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}), \quad g_{2n-1}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^r f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}).$$

По аналогии с утверждением 1 можно доказать

Утверждение 2. *Справедливы равенства:*

$$f_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n(n-1)/2} f_{2n}(\bar{y}, \bar{x}), \quad g_{2n}^*(\bar{x}, \bar{y}) = (-1)^{n(n-1)/2} g_{2n}(\bar{y}, \bar{x}).$$

Мы закончим этот пункт обобщением известного равенства $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Пусть $M_{k \times m}(F)$, $M_{m \times k}(F)$ – матричные векторные пространства, $\text{Sym}_k(F) = \{A \in M_k(F) \mid A^T = A\}$, $\text{Alt}_k(F) = \{A \in M_k(F) \mid A^T = -A\}$.

Предложение 5. *Для любых $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$*

$$\begin{aligned} \text{tr } f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) &= \begin{cases} \text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n), & \text{если } n = 2r + 1; \\ -\text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n), & \text{если } n = 2r; \end{cases} \\ \text{tr } g_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) &= \begin{cases} \text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n), & \text{если } n = 2r + 1; \\ -\text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n), & \text{если } n = 2r. \end{cases} \end{aligned}$$

Доказательство. Проведем его для первого равенства, поскольку для второго оно аналогично. Итак,

$$\begin{aligned} \text{tr } f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) &= \text{tr} \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \pi \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} A_{\pi(1)} B_{\tau(1)} \cdots A_{\pi(n)} B_{\tau(n)} = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \pi \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} \text{tr} ((A_{\pi(1)} B_{\tau(1)} \cdots A_{\pi(n)}) B_{\tau(n)}) = \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn } \pi \delta_{\text{sgn } \pi \text{sgn } \tau} \text{tr} (B_{\tau(n)} A_{\pi(1)} B_{\tau(1)} \cdots A_{\pi(n)}) \end{aligned}$$

Положим $\tau = \sigma\mu$, где

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix},$$

и заметим, что $\text{sgn } \mu = (-1)^{n-1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{tr } f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) &= \\ &= \text{tr} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } (\sigma\mu) \delta_{\text{sgn } (\sigma\mu) \text{sgn } \pi} B_{\sigma\mu(n)} A_{\pi(1)} B_{\sigma\mu(1)} \cdots A_{\pi(n)} = \\ &= (-1)^{n-1} \text{tr} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn } \sigma \delta_{(-1)^{n-1} \text{sgn } \sigma \text{sgn } \pi} B_{\sigma(1)} A_{\pi(1)} \cdots B_{\sigma(n)} A_{\pi(n)} = \\ &= \begin{cases} \text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n), & \text{если } n = 2r + 1; \\ -\text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n), & \text{если } n = 2r. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Из предложения 5 и утверждения 2 вытекает

Утверждение 3. *Пусть $n = 2r + 1$, $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$. Тогда*

$$\begin{aligned} \text{tr } f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) &= \text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = \\ &= (-1)^{(n-1)/2} \text{tr } f_{2n}(B_1^T, \dots, B_n^T, A_1^T, \dots, A_n^T); \end{aligned}$$

$$\text{tr } g_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) =$$

$$= \text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = (-1)^{(n-1)/2} \text{tr } g_{2n}(B_1^T, \dots, B_n^T, A_1^T, \dots, A_n^T).$$

Следствие 3. Пусть $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \text{Sym}_k(F)(\text{Alt}_k(F))$. Тогда

$$\text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = (-1)^{(n-1)/2} \text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n);$$

$$\text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = (-1)^{(n-1)/2} \text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n).$$

Следствие 4. Пусть

$$\text{char } F \neq 2, \quad n - 1 = 2(2s + 1), \quad A_1, \dots, B_n \in \text{Sym}_k(F)(\text{Alt}_k(F)).$$

Тогда

$$\text{tr } f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0; \quad \text{tr } g_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0.$$

Доказательство. В силу следствия 3

$$\text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = -\text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n);$$

$$\text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = -\text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n).$$

Отсюда и из того, что $\text{char } F \neq 2$, получаем равенства $\text{tr } f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = 0$; $\text{tr } g_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = 0$. Применяя предложение 5, получаем требуемый результат. Следствие доказано. \square

2. Некоторые тождества подпространств $M_1^{(m,k)}(F)$, $M_0^{(m,k)}(F)$

В этом пункте мы найдем условия, при которых квазимногочлены Капелли являются тождествами для подпространств $M_i^{(m,k)}(F)$.

Утверждение 4. Пусть при некотором $q \in \mathbf{N}$, любых $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_{q-1} \in M_{m \times k}(F)$ $f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0$, тогда

$$g_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0.$$

Верно и обратное. Пусть $g_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0$, тогда

$$f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0.$$

Доказательство. В силу 5) предложения 1 для произвольной подстановки $\omega \in A_{q-1}^-$ имеем $f_{2q-1}(\bar{x}, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(q-1)}) = g_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y})$. Следовательно,

$$0 = f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_{\omega(1)}, \dots, B_{\omega(q-1)}) = g_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}).$$

Обратно, по свойству 5) предложения 1 для произвольной подстановки $\omega \in A_{q-1}^-$ имеем $g_{2q-1}(\bar{x}, y_{\omega(1)}, \dots, y_{\omega(q-1)}) = f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y})$. Следовательно,

$$0 = g_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_{\omega(1)}, \dots, B_{\omega(q-1)}) = f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}).$$

\square

Аналогичным образом доказывается

Утверждение 5. Пусть при некотором $q \in \mathbf{N}$, любых $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$ $f_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0$, тогда

$$g_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0.$$

Верно и обратное. Пусть $g_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0$, тогда

$$f_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0.$$

Замечание 2. С учетом утверждений 4 и 5 дальнейшее исследование значений многочленов $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$, $g_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$ от различных наборов матриц достаточно провести, например, для многочленов $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$, что и сделано ниже.

Утверждение 6. Пусть при некотором $q \in \mathbf{N}$, любых $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_{q-1} \in M_{m \times k}(F)$ $f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0$. Тогда для всякого $n \geq q$, произвольных $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$ верно равенство: $f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0$, $f_{2n-1}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что $q > 1$. Далее, если $n = q$, то в силу предложения 4 при $n = 2r$ и $n = 2r + 1$ соответственно имеем:

$$\begin{aligned} f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{n/2} f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{2i}}) y_{2i} + g_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1}, \\ f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{i=1}^{(n+1)/2} f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\widehat{2i-1}}) y_{2i-1} + g_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y}_{\hat{2i}}) y_{2i}. \end{aligned}$$

Отсюда и из утверждения 4 получаем, что в обоих случаях

$$f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0.$$

Пусть $n = q + r$, тогда равенства

$$f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0, \quad f_{2n-1}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}) = 0$$

вытекают из замечания 1 и утверждений 4, 5. \square

Аналогичным образом доказываются

Утверждение 7. Пусть при некотором $q \in \mathbf{N}$, любых $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$ $f_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0$. Тогда для всякого $n \geq q + 1$, произвольных $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$ верны равенства: $f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0$, $f_{2n-1}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}) = 0$.

Утверждение 8. Пусть при некотором $q \in \mathbf{N}$, любых $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$, $A_1, \dots, A_{q-1} \in M_{k \times m}(F)$ $f_{2q-1}(B_1, \dots, B_q, A_1, \dots, A_{q-1}) = 0$. Тогда для всякого $n \geq q$, произвольных $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$, $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$ верны равенства: $f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = 0$, $f_{2n-1}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_{n-1}) = 0$.

Утверждение 9. Пусть при некотором $q \in \mathbf{N}$, любых $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$, $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$ $f_{2q}(B_1, \dots, B_q, A_1, \dots, A_q) = 0$. Тогда для всякого $n \geq q + 1$, произвольных $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$, $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$ верны равенства: $f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = 0$, $f_{2n-1}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_{n-1}) = 0$.

Теперь покажем, что число q , о котором говорится в утверждениях 7–9, действительно существует.

Утверждение 10. Пусть $q = mk + 1$. Тогда для любых матриц $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$ справедливо равенство: $f_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0$.

Доказательство. Оно вытекает из линейности многочлена $f_{2q}(\bar{x}, \bar{y})$ по каждой группе переменных и части 1) предложения 2. \square

Следствие 5. Пусть $q = \max\{m^2 + 1, k^2 + 1\}$. Тогда $f_{2q}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_0^{(m,k)}(F)]$.

Утверждение 11. Пусть $q = mk + 2$. Тогда для любых матриц $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_{q-1} \in M_{m \times k}(F)$ справедливо равенство: $f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0$.

Доказательство. Вытекает из линейности многочлена $f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y})$ по каждой группе переменных и части 1) предложения 2. \square

Следствие 6. Пусть $q = \max\{m^2 + 2, k^2 + 2\}$. Тогда $f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_0^{(m,k)}(F)]$.

Замечание 3. В работе [1] показано, что при $m = 2$ многочлен $f_5(z_1, \dots, z_5) \in T[M_1^{(m,1)}(F)]$. Несложно показать, что это будет верно и при $m > 2$. Отсюда вытекает, что число q в утверждении 11, а значит, и в утверждении 10 можно понизить до числа 3.

Обозначим через $d(m, k, F)$ ($t(m, k, F)$) наименьшее натуральное число n , при котором многочлен $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$ (соответственно $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$) удовлетворяет условию: при любых $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$ справедливо равенство $f_{2n}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n) = 0$ (соответственно $f_{2n-1}(A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_{n-1}) = 0$).

Кроме того, пусть $d'(m, k, F)$ ($t'(m, k, F)$) означает наименьшее натуральное число n , при котором многочлен $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$ (соответственно $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y})$) удовлетворяет условию: при любых $B_1, \dots, B_n \in M_{m \times k}(F)$, $A_1, \dots, A_n \in M_{k \times m}(F)$ справедливо равенство $f_{2n}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_n) = 0$ (соответственно $f_{2n-1}(B_1, \dots, B_n, A_1, \dots, A_{n-1}) = 0$).

Утверждение 12. Пусть $m \geq k > 1$. Тогда справедливы неравенства: $d(m, k, F) \geq 2k$, $t(m, k, F) \geq 2k$, $d'(m, k, F) \geq 2k$, $t'(m, k, F) \geq 2k$.

Доказательство. Для многочлена $f_{2(2k-1)}(\bar{x}, \bar{y})$ рассмотрим следующую подстановку аргументов, называемую двойной лестницей:

$$(x_1, \dots, x_k, \dots, x_{2k-1}) = (e_{11}, e_{21}, \dots, e_{kk}, e_{k(k-1)}, e_{k-1(k-2)}, \dots, e_{21}),$$

$$(y_1, \dots, y_k, \dots, y_{2k-1}) = (e_{12}, e_{23}, \dots, e_{k-1k}, e_{kk}, e_{k-1(k-1)}, \dots, e_{11}),$$

где e_{ij} – матричные единицы. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} f_{2(2k-1)}(e_{11}, \dots, e_{21}, e_{12}, \dots, e_{11}) &= \\ &= e_{11} + e_{22} + \dots + e_{kk} + e_{k(k-1)} + \dots + e_{21} = \begin{cases} 2E - e_{11}, & \text{если } \operatorname{char} F \neq 2; \\ e_{11}, & \text{если } \operatorname{char} F = 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Предположим, что $d(m, k, F) < 2k$ ($t(m, k, F) < 2k$). Тогда для некоторого $q \in \mathbf{N}$ многочлен $f_{2q}(\bar{x}, \bar{y})$ ($f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y})$) удовлетворяет условию: для любых $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$, $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$ справедливо равенство: $f_{2q}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_q) = 0$ ($f_{2q-1}(A_1, \dots, A_q, B_1, \dots, B_{q-1}) = 0$). Следовательно, в силу утверждения 7 (утверждения 6) многочлен $f_{2(2k-1)}(\bar{x}, \bar{y})$ обращается в нуль на двойной лестнице, а это противоречит (1). Отсюда заключаем, что наше предположение неверно, и потому $d(m, k, F), t(m, k, F) \geq 2k$.

Предположим, что $d'(m, k, F) < 2k$ ($t'(m, k, F) < 2k$). Тогда для некоторого $q \in \mathbf{N}$ многочлен $f_{2q}(\bar{x}, \bar{y})$ ($f_{2q-1}(\bar{x}, \bar{y})$) удовлетворяет условию: для любых $B_1, \dots, B_q \in M_{m \times k}(F)$, $A_1, \dots, A_q \in M_{k \times m}(F)$ $f_{2q}(B_1, \dots, B_q, A_1, \dots, A_q) = 0$

$(f_{2q-1}(B_1, \dots, B_q, A_1, \dots, A_{q-1}) = 0)$. Следовательно, в силу утверждения 9 (утверждения 8) многочлен $f_{2(2k-1)}(\bar{x}, \bar{y})$ обращается в нуль на двойной лестнице, а это противоречит (1). Отсюда заключаем, что наше предположение неверно, и потому $d'(m, k, F), t'(m, k, F) \geq 2k$. Утверждение доказано. \square

Предложение 6. *Пусть m, k – любые натуральные числа, причем $m \geq k$, F – произвольное поле. Тогда при $n \geq mk + 1$ многочлены $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}), g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, а при $n < 2k$ $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}), g_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_1^{(m,k)}(F)]$.*

Доказательство. В силу утверждения 4 доказательство достаточно провести для многочлена $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y})$. Пусть $n = mk + 1$,

$$a^i = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & B_{m \times k}^i \\ A_{k \times m}^i & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad b^j = \begin{pmatrix} 0_{m \times m} & C_{m \times k}^j \\ D_{k \times m}^j & 0_{k \times k} \end{pmatrix} \in M_1^{(m,k)}(F),$$

где $i, j = 1, \dots, n$. Тогда согласно утверждению 10

$$f_{2n}(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n) = \begin{pmatrix} f_{2n}(B^1, \dots, B^n, D^1, \dots, D^n) & 0_{m \times k} \\ 0_{k \times m} & f_{2n}(A^1, \dots, A^n, C^1, \dots, C^n) \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $n > mk + 1$, тогда то, что $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, следует из утверждений 7 и 9. Вторая часть предложения 6 вытекает из утверждения 12. Предложение доказано. \square

Аналогичным образом доказывается

Предложение 7. *Пусть m, k – любые натуральные числа, причем $m \geq k$, F – произвольное поле. Тогда при $n \geq mk + 2$ многочлены $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, а при $n < 2k$ $f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}), g_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) \notin T[M_1^{(m,k)}(F)]$.*

Замечание 4. Очевидно, что задача о нахождении наименьшего числа n , при котором многочлены $f_{2n}(\bar{x}, \bar{y}), f_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}) \in T[M_1^{(m,k)}(F)]$, эквивалентна задаче о значениях функций $\max\{d(m, k, F), d'(m, k, F)\}$, $\max\{t(m, k, F), t'(m, k, F)\}$.

Summary

S.Yu. Antonov. Some Types of Identities of Subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of Matrix Superalgebra $M^{(m,k)}(F)$.

Some types of polynomials of free associative algebra $F\{Z\}$ have been introduced and investigated. The conditions under which these polynomials are the identities of subspaces $M_0^{(m,k)}(F)$, $M_1^{(m,k)}(F)$ of superalgebra $M^{(m,k)}(F)$ have been found.

Key words: T -ideal, polynomial identity, matrix superalgebra.

Литература

1. Антонов С.Ю. Наименьшая степень тождеств подпространства $M_1^{(2,1)}(F)$ матричной супералгебры $M^{(2,1)}(F)$ // Труды Междунар. конф. КЛИН-2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 4. – С. 27–30.

Поступила в редакцию
01.12.11

Антонов Степан Юрьевич – старший преподаватель кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: antonovst-vm@rambler.ru