

УДК 514.16

КАСАТЕЛЬНЫЕ И ТЕНЗОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ ТИПА (2,0) НАД ГРУППОЙ ЛИ

H.A. Опокина

Аннотация

В работе Е.В. Назаровой [5] изучалось касательное расслоение TG группы Ли с точки зрения естественного и синектического продолжений этой группы в алгебру дуальных чисел. Найдены инвариантные синектические связности, отвечающие инвариантной связности на группе G . Целью настоящей работы является изучение касательных и тензорных расслоений T_0^2G над группой Ли. Доказано, что эти расслоения тривиальны, а пространства расслоений также являются группами Ли. Построены лифты левоинвариантных векторных полей в эти расслоения. Найдены алгебра Ли группы TG и алгебра Ли группы T_0^2G , получены структурные уравнения этих алгебр. В качестве примеров рассмотрены касательные и $(2,0)$ -тензорные расслоения над 2-мерными связными группами Ли.

1. Тензорные расслоения над группой Ли

Пусть G – группа Ли размерности n , TG и T^*G – ее касательное и кокасательное расслоения. Следуя [9], дадим следующее

Определение 1. Тензорным расслоением типа (p, q) над G называется расслоение

$$\pi : T_q^p(G) = TG \otimes \cdots \otimes TG \otimes T^*G \otimes \cdots \otimes T^*G \rightarrow G.$$

Оно является векторным расслоением ранга $N = n^{p+q}$.

Перейдем к координатным формулировкам. Пусть $\{e_i(x)\}$ – базис касательного пространства T_xG , $\{e^i(x)\}$ – сопряженный ему базис кокасательного пространства. Тогда тензоры

$$e_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$$

образуют базис в слое $F_x = T_x \otimes \cdots \otimes T_x \otimes T_x^* \otimes \cdots \otimes T_x^*$, так что для любого $u_x \in F_x$ имеем

$$u_x = u_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q} e_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}.$$

Такой базис возникает естественным образом над всякой координатной окрестностью $U \subset G$. Тогда векторы $e_i(x) = \partial_i$ и $e^i = dx^i$ образуют соответственно натуральный репер и корепер в точке $x \in U$. Совокупность чисел $(X^A) = (x^i, u_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q})$ образует допустимые координаты в пространстве тензорного расслоения, при этом x^i называются базисными, а $u^\alpha = u_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_q}$ слоевыми координатами. В силу отождествления $p^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^N$ тензорное расслоение T_q^pG является локально тривиальным.

Рассмотрим покрытие базы G системой окрестностей. Впрочем, для группы Ли достаточно ограничиться окрестностями единицы. На пересечении двух карт $U \cup U'$ преобразование координат имеет вид: $x^i = f^i(x^{k'})$. Тогда преобразования натурального репера в T_x и корепера в T_x^* имеют, как известно, вид

$$\partial_{k'} = f_{k'}^i \partial_i, \quad dx^i = f_{k'}^i dx^{k'},$$

где $f_{k'}^i = \partial_{k'} f^i$, а $f_i^{k'}$ – элементы обратной якобиевой матрицы. Отсюда возникает следующий закон преобразования допустимых координат тензорного расслоения:

$$x^i = f^i(x^{k'}), \quad u^\alpha := u_{k_1 \dots k_p}^{m_1 \dots m_q} = f_{j'_1}^{m_1} \dots f_{j'_q}^{m_q} u_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_q} f_{k_1}^{i'_1} \dots f_{k_p}^{i'_p}. \quad (1)$$

Это значит, что $T_q^p G$ является гладким расслоением.

Тензорное расслоение $T_q^p G$ можно также определить как расслоение с типовым слоем T_q^p , присоединенное к расслоению линейных реперов LG [9]. Левое действие группы $GL(n)$ на тензорном пространстве T_q^p задается линейными операторами $R(f) = \otimes^p f \otimes {}^q f^*$ по формуле

$$R(f)t(\xi^1, \dots, \xi^p, v_1, \dots, v_q) = t(\xi^1 f, \dots, \xi^p f, f^{-1}v_1, \dots, f^{-1}v_q). \quad (2)$$

Учитывая правое действие $r' = r \cdot f$ группы $GL(n)$ на LG :

$$e_{i'} = e_k f_{i'}^k \quad (3)$$

и ее левое действие в T_q^p в соответствии с формулой (2), определим ее действие на прямом произведении $LG \times T_q^p$ формулой

$$(r, t) \circ f := (r \cdot f, R(f^{-1})t). \quad (4)$$

Тогда тензорное расслоение получается факторизацией по этому действию с отображением факторизации $\Phi : L(G) \times T_q^p \longrightarrow T_q^p(G)$. Если $U \subset G$ – тривиализующая окрестность базы с натуральным полем реперов $r_0 = \{\delta_i\}$, то это отображение реперу $r(x) : e_i(x) = x_i^k \partial_k$, в точке $x \in G$ и тензору $t \in T_q^p$, заданному своими координатами относительно стандартного базиса, ставит в соответствие точку $X = (x, u_x) \in T_q^p G$, $\pi X = x$ с допустимыми координатами

$$X^i = x^i, \quad X^\alpha := u_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = x_{s_1}^{i_1} \dots x_{s_p}^{i_p} t_{k_1 \dots k_q}^{s_1 \dots s_p} \tilde{x}_{j_1}^{k_1} \dots \tilde{x}_{j_q}^{k_q}, \quad (5)$$

где тильдой обозначены компоненты обратной матрицы.

2. Касательное расслоение над группой Ли

Пусть G – группа Ли с умножением

$$(x, y) \longrightarrow z = xy. \quad (6)$$

Обозначим через L_a и R_a левый и правый сдвиги на группе G , порожденные элементом a , через S – инволюцию $x \rightarrow x^{-1}$. Это диффеоморфизмы группы G .

Рассмотрим касательное расслоение TG над этой группой. Пусть $X, Y \in TG$. При локальной тривиализации $p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ имеем $X = (x, u_x)$ и $Y = (y, u_y)$. Определим на многообразии TG операцию умножения "о" следующим образом [8]:

$$(x, u_x) \circ (y, u_y) = (xy, L_*(x)u_y + R_*(y)u_x). \quad (7)$$

В координатной записи

$$z^k = g^k(x^i, y^j), \quad u_z^i = L_s^i(x)u_y^s + R_s^k(y)u_x^s. \quad (8)$$

Теорема 1. Относительно операции (7) многообразие TG является группой Ли.

Доказательство.

1. $E = (e, 0) \in TG$ есть единичный элемент, где e – единица группы G . Действительно, согласно (7)

$$(x, u_x) \circ (e, 0) = (xe, L_*(x)0 + R_*(e)u_x) = (x, u_x).$$

Аналогично $(e, 0) \circ (x, u_x) = (x, u_x)$.

2. Найдем обратный элемент для $X \in TG$. Сначала заметим [8], что дифференциал инволюции S может быть выражен через дифференциалы левого и правого сдвигов следующим образом: $S_* = -L_*^{-1}(x)R_*^{-1}(x)$. Условие $X \circ Y = E$ дает $xy = e$, $L_*(x)u_y + R_*(y)u_x = 0$. Отсюда $y = x^{-1}$ и $u_y = -L_*(x)^{-1}R_*^{-1}(x)u_x = S_*u_x$. Значит, обратный элемент имеет вид

$$X^{-1} = (x^{-1}, S_*u_x). \quad (9)$$

3. Проверим ассоциативность. В соответствии с (7) имеем

$$(x, u_x) \circ (y, u_y) = (xy, L_*(x)u_y + R_*(y)u_x) = (xy, w_{xy}),$$

$$(((x, u_x) \circ (y, u_y)) \circ (z, u_z)) = ((xy)z, L_*(xy)u_z + R_*(z)w_{xy}).$$

С другой стороны,

$$(y, u_y) \circ (z, u_z) = (yz, L_*(y)u_z + R_*(z)u_y) = (yz, v_{yz}),$$

$$(x, u_x) \circ ((y, u_y) \circ (z, u_z)) = (x(yz), L_*(x)v_{yz} + R_*(yz)u_x).$$

В силу $L_*(xy) = L_*(x)L_*(y)$, $R_*(xy) = R_*(y)R_*(x)$, $L_*(x)R_*(y) = R_*(y)L_*(x)$ эти выражения совпадают.

Кроме того, операция (7) – гладкая. Значит, TG – группа Ли. \square

Замечание 1. Пусть $\theta_x \in T_x^*G$ – ковектор в точке $x \in G$. Так как $\theta_x(u_x) = \theta_{x^{-1}}(S_*u_x)$, то отсюда следует, что $S^*\theta_{x^{-1}} = \theta_x$. Значит,

$$(x, \theta_x)^{-1} = (x^{-1}, S^{*-1}\theta_x) \quad (10)$$

есть обратный элемент для $(x, \theta_x) \in TG$.

Как известно, векторное поле $\xi(x)$ на группе Ли называется левоинвариантным, если оно инвариантно при левых сдвигах

$$L_*(a)\xi(x) = \xi(ax). \quad (11)$$

Положим здесь $x = e$. Тогда

$$\xi(a) = L_*(a)v, \quad (12)$$

где v – вектор в единице группы Ли G . В координатах

$$\xi^i(a) = L_j^i(a)v^j, \quad (13)$$

где

$$L_j^i(a) = (\partial_{x^j}g^i(a, x))_e. \quad (14)$$

Найдем теперь левоинвариантные векторные поля на группе TG . Левый сдвиг $L(A)$ в TG определен формулой (7), а в координатах – формулой (8). Левоинвариантное векторное поле в TG имеет вид

$$\xi(A) = L_*(A)V, \quad (15)$$

где $A \in TG$, V – вектор в $E \in TG$. Оно является элементом алгебры Ли g_0^1 группы Ли TG . Найдем компоненты этого поля. Продифференцировав (7) по x и u_x и положив затем $(x, u_x) = (e, 0)$, получим матрицу $L_*(A)$ следующего вида:

$$L_*(A) = \begin{pmatrix} L_*(a) & 0 \\ (\partial_x R_*(x))_e u_a & L_*(a) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Из координатной записи операции (8) следует, что ненулевые блоки этой матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} L_*(a) &= (L_j^i(a)), \\ (\partial_x R_*(x))_e u_a &= (R_{sj}^i(a) u_a^j), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$R_{sj}^i(a) = \left(\frac{\partial^2 g^i(a, x)}{\partial x^s \partial a^j} \right)_{x=e}. \quad (18)$$

Учитывая это, получим

$$\xi(A) = L_j^i(a) v^j \partial_i + [R_{si}^k(a) u_a^i v^s + L_i^k(a) \tilde{v}^i] \widetilde{\partial_k}, \quad (19)$$

где $\widetilde{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial u^k}$, (v^i, \tilde{v}^j) – координаты вектора V в единице группы TG . Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Всякое левоинвариантное векторное поле на группе TG имеет компоненты (19). Оно является проектируемым на левоинвариантное векторное поле (12) на группе G .*

Известно [7], что если векторное расслоение $E \rightarrow M$ ранга n допускает n глобальных сечений $(s_1(x), \dots, s_n(x))$, линейно независимых в каждой точке, то оно тривиально, т. е. существует изоморфизм $\varphi : E \rightarrow M \times F$.

Теорема 3. *TG – тривиальное расслоение.*

Доказательство. Касательное расслоение TG является локально тривиальным. Выберем базис $\{e_i\} \in T_e G$, где $n = \dim G$, и построим левоинвариантные векторные поля $e_i(x) = L_*(x)e_i$. Они линейно независимы в каждой точке $x \in G$. Получим n глобальных сечений расслоения TG . Значит, TG – тривиальное расслоение. \square

Пусть g_0^1 – множество всех левоинвариантных полей на группе Ли TG . Тогда g_0^1 является алгеброй Ли группы Ли TG . Поля $E_\alpha(A) = (e_i(A), \tilde{e}_j(A))$, где

$$\begin{aligned} e_i(A) &= L_i^j(a) \partial_j + R_{ij}^k(a) u_a^j \widetilde{\partial}_k, \\ \tilde{e}_j(A) &= L_j^s(a) \widetilde{\partial}_s \end{aligned} \quad (20)$$

образуют ее базис. Произвольное левоинвариантное векторное поле (19) выражается через них линейной комбинацией с постоянными коэффициентами:

$$V(A) = v^i e_i(A) + \tilde{v}^j \tilde{e}_j(A).$$

Найдем структурные уравнения алгебры Ли g_0^1 . Для этого вычислим коммутаторы $[e_i, e_j]$, $[e_i, \tilde{e}_k]$, $[\tilde{e}_j, \tilde{e}_k]$. Учитывая определение коммутатора $[W, V](F) = W \circ V(F) - V \circ W(F)$ и вид базиса (20), получим

$$[e_i, e_j] = \alpha_{ij}^k e_k + \beta_{ij}^k \tilde{e}_k. \quad (21)$$

Подставив сюда выражения (20) и сравнив коэффициенты при ∂_k и $\widetilde{\partial}_k$, получим при $A = E$

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}^k &= (\partial_i L_j^k - \partial_j L_i^k)_e = C_{ij}^k, \\ \beta_{ij}^k &= 0.\end{aligned}\tag{22}$$

где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли g группы Ли G .

Рассмотрим коммутаторы $[e_i, \tilde{e}_j]$. Пусть

$$[e_i, \tilde{e}_j] = \gamma_{ij}^r e_r + \lambda_{ij}^k \tilde{e}_k.\tag{23}$$

Учитывая снова (20) и сравнив коэффициенты при натуральном репере, получим при $A = E$

$$\lambda_{ij}^k = (\partial_i L_j^k)_e - (R_{ij}^k)_e, \quad \gamma_{ij}^r = 0.$$

Учитывая, что

$$(R_{is}^k(a))_e = (\partial_s L_i^k(a))_e,\tag{24}$$

найдем $\lambda_{ij}^k = c_{ij}^k$ и, следовательно, $[e_i, \tilde{e}_j] = c_{ij}^k \tilde{e}_k$.

Наконец, получим

$$[\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = 0,$$

что следует из вида базисных элементов \tilde{e}_i в (20). Итак, пришли к следующему результату

Теорема 4. Структурные уравнения алгебры Ли g_0^1 группы TG в базисе (20) имеют вид

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad [e_i, \tilde{e}_j] = c_{ij}^k \tilde{e}_k, \quad [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = 0.\tag{25}$$

В работе Е.В. Назаровой [5] касательное расслоение TG рассматривается как естественное продолжение группы Ли G в алгебру дуальных чисел. Продолжением левоинвариантных форм ω^a на G в дуальную область были получены структурные уравнения Картана

$$d\tilde{\omega}^a = -\frac{1}{2} c_{bc}^a \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^c, \quad d\tilde{\omega}^{n+a} = -\frac{1}{2} c_{bc}^a \tilde{\omega}^b \wedge \tilde{\omega}^{n+c},\tag{26}$$

где $\tilde{\omega}^a = {}^v\omega^a$, $\tilde{\omega}^{n+a} = {}^c\omega^a$. Базис $\{\tilde{\omega}^a, \tilde{\omega}^{n+a}\}$ является взаимным базису (20). Таким образом, уравнения (25) и (26) двойственны друг другу.

Примеры

Известно [2], что существуют лишь следующие связные группы Ли второго порядка:

1) Абелевые группы: \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$, $T^2 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$. Они локально изоморфны. Поэтому при рассмотрении алгебр Ли достаточно рассмотреть лишь первую из них. Операция на группе \mathbb{R}^2 задается следующим образом: $z = x + y = (x^1 + y^1, x^2 + y^2)$. Вследствие (14) дифференциал левого сдвига имеет следующие отличные от нуля компоненты: $L_1^1 = 1$, $L_2^2 = 1$. Структурные уравнения этой группы $[e_i, e_j] = 0$. Тогда структурные уравнения группы $T\mathbb{R}$ в соответствии с формулой (25) имеют вид: $[e_i, e_j] = 0$, $[e_i, \tilde{e}_j] = 0$, $[\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] = 0$, где $i, j = 1, 2$. Такие же структурные уравнения имеют касательные расслоения других абелевых групп второго порядка.

2) Связная группа аффинных преобразований вещественной прямой, сохраняющих ориентацию $Aff^+(1, \mathbb{R})$: $x' = a_1 x + a_2$, ($a_1 > 0$). Она изоморфна группе вещественных 2-матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\det A > 0$. Операция на группе задается с помощью матричного умножения:

$$AX = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 + a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем структурные уравнения касательного расслоения этой группы. В силу (14) дифференциал левого сдвига имеет следующие компоненты, отличные от нуля: $L_1^1 = a_1$, $L_2^2 = a_1$. Структурные константы:

$$c_{12}^2 = 1, \quad c_{21}^2 = -1. \quad (27)$$

Тогда структурные уравнения согласно (25) имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_2, \quad [e_2, \tilde{e}_1] = -\tilde{e}_2.$$

3. Тензорное расслоение типа (2,0) над группой Ли G

Рассмотрим тензорное расслоение $T_0^2 G$. Определим действие группы G на тензоры u_x типа (2,0) при левых сдвигах. Пусть $L(a) : x \rightarrow ax$. Дифференциал левого сдвига $L_*(a) : u_x \rightarrow u_{ax}$ действует по формуле

$$(L_*(a)u_x)(\xi_x, \theta_x) = u_{ax}(L_*(a^{-1})\xi_x, L_*(a^{-1})\theta_x), \quad (28)$$

где $\xi_x, \theta_x \in T_x^*$. Это левое действие, так как

$$\begin{aligned} (L_*(ab)u_x)(\xi_x, \theta_x) &= u_{abx}(L^*((ab)^{-1})\xi_x, L^*((ab)^{-1})\theta_x) = \\ &= u_{abx}(L^*(a^{-1})L^*(b^{-1})\xi_x, L^*(a^{-1})L^*(b^{-1})\theta_x) = (L_*(a)L_*(b)u_x)(\xi_x, \theta_x). \end{aligned}$$

Аналогично определим действие $R_*(a) : u_x \rightarrow u_{xa}$

$$(R_*(a)u_x)(\xi_x, \theta_x) = u_{xa}(R_*(a^{-1})\xi_x, R_*(a^{-1})\theta_x). \quad (29)$$

Это правое действие группы G , так как $R_*(ab) = R_*(b)R_*(a)$.

Определим операцию умножения на $T_0^2 G$, используя формулы (28) и (29):

$$(x, u_x) \circ (y, u_y) = (xy, L_*(x)u_y + R_*(y)u_x). \quad (30)$$

В координатной записи

$$z^k = g^k(x^i, y^j), \quad u_z^{ij} = L_k^i(x)L_m^j(x)u_y^{km} + R_k^i(y)R_m^j(y)u_x^{km}. \quad (31)$$

Теорема 5. Относительно операции (30) $T_0^2 G$ является группой Ли.

Доказательство.

1. Покажем, что $E = (e, 0) \in T_0^2 G$, $e \in G$, $0 \in T_0^2 G$ – единичный элемент относительно умножения (30). Имеем

$$(x, u_x) \circ (e, 0) = (xe, L_*(x)0 + R_*(e)u_x) = (x, u_x).$$

Аналогично $(e, 0) \circ (x, u_x) = (x, u_x)$.

2. Обратный элемент (y, u_y) для (x, u_x) находится из условий

$$xy = e, \quad L_*(x)u_y + R_*(y)u_x = 0.$$

Тогда $y = x^{-1}$. Учитывая, что обратный элемент для θ_x имеет вид (10), из условия инвариантности функции $u_x(\theta_x, \xi_x) = u_y(\theta_y, \xi_y)$ получим

$$u_x(\theta_x, \xi_x) = u_{x^{-1}}(S^{*-1}\theta_x, S^{*-1}\xi_x).$$

Отсюда следует $S_*^{-1}u_{x^{-1}} = u_x$. Значит,

$$(x, u_x)^{-1} = (x^{-1}, S_* u_x).$$

3. Проверим ассоциативность. В соответствии с (30) имеем

$$(x, u_x) \circ (y, u_y) = (xy, L_*(x)u_y + R_*(y)u_x) = (xy, w_{xy}).$$

Тогда

$$(((x, u_x) \circ (y, u_y)) \circ (z, u_z)) = ((xy)z, L_*(xy)u_z + R_*(z)w_{xy}).$$

С другой стороны,

$$(y, u_y) \circ (z, u_z) = (yz, L_*(y)u_z + R_*(z)u_y) = (yz, v_{yz})$$

и, следовательно,

$$(x, u_x) \circ ((y, u_y) \circ (z, u_z)) = (x(yz), L_*(x)v_{yz} + R_*(yz)u_x).$$

В силу $L_*(xy) = L_*(x)L_*(y)$, $R_*(xy) = R_*(y)R_*(x)$, $L_*(x)R_*(y) = R_*(y)L_*(x)$ эти выражения совпадают.

Операция (30) гладкая. Значит, T_0^2G – группа Ли. \square

Всякое гладкое преобразование $x \rightarrow z = f(x)$ в G порождает преобразование ${}^c f = (f, f_*)$ в T_0^2G , которое в координатах имеет вид

$$y^i = f^i(x), \quad u_y^{ab} = f_i^a(x)f_j^b(x)u_x^{ij}. \quad (32)$$

Но любое векторное поле ξ на G порождает локальную однопараметрическую группу преобразований $y = f(x, t) = \text{Exp}(t\xi)x$. С точностью до малых первого порядка

$$y^i = x^i + \xi^i(x)t. \quad (33)$$

Подставив (33) в (32), с той же точностью получим

$$u_z^{ab} = u_x^{ab} + t(u_x^{ib}\partial_i\xi^a + u_x^{aj}\partial_j\xi^b).$$

Таким образом, векторное поле ξ порождает в расслоении T_0^2G векторное поле

$${}^c\xi(X) = \xi^a\partial_a + \xi^{ab}\partial_{ab}, \quad (34)$$

где

$$\xi^{ab} = u_x^{ib}\partial_i\xi^a + u_x^{aj}\partial_j\xi^b. \quad (35)$$

Это полный лифт векторного поля ξ в расслоение T_0^2G .

В частности, рассмотрим на группе G левоинвариантное векторное поле. Подставив (13) в (35), получим

$$\xi^{ab} = u_x^{cb}\partial_c(L_d^a(x)v^d) + u_x^{ac}\partial_c(L_d^b(x)v^d).$$

Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Лифт левоинвариантного векторного поля $\xi(x)$, $x \in G$, в расслоение T_0^2G имеет вид*

$${}^c\xi(X) = L_b^a(x)v^b\partial_a + (u_x^{cb}\partial_c L_d^a(x) + u_x^{ac}\partial_c L_d^b(x))v^d\partial_{ab}. \quad (36)$$

Найдем теперь левоинвариантные векторные поля на группе T_0^2G . Левый сдвиг в $L(A)$ в T_0^2G определен формулой (30) и в координатах формулой (31). Левоинвариантное векторное поле в T_0^2G имеет вид

$$\xi(A) = L_*(A)V, \quad (37)$$

где $A \in T_0^2G$, V – вектор в $E \in T_0^2G$. Найдем компоненты этого поля. Продифференцировав (30) по x и u_x и положив затем $(x, u_x) = (e, 0)$, получим матрицу $L_*(A)$ следующего вида:

$$L_*(A) = \begin{pmatrix} L_*(a) & 0 \\ (\partial_x R_*(x))_e u_a & L_*(a) \otimes L_*(a) \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Запишем матрицу (38) в координатах. Ее третий блок

$$\begin{aligned} (\partial_x R_*(x))_e u_a &= (\partial_s(R_i^k(x)R_j^m(x))_e u_a^{ij}) = \\ &= (((\partial_s R_i^k(x))_e \delta_j^m + (\partial_s R_j^m(x))_e \delta_i^k) u_a^{ij}). \end{aligned}$$

Тогда с учетом обозначения (18) получим

$$(\partial_x R_*(x))_e u_a = (R_{si}^k(a) u_a^{im} + R_{sj}^m(a) u_a^{kj}).$$

В итоге каждый из ненулевых блоков имеет следующий координатный вид:

$$\begin{aligned} L_*(a) &= (L_j^i(a)), \\ (\partial_x R_*(x))_e u_a &= (R_{si}^k(a) u_a^{im} + R_{sj}^m(a) u_a^{kj}), \\ L_*(a) \otimes L_*(a) &= (L_i^k(a) L_j^m(a)) := (L_{ij}^{km}(a)). \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая это, получим

$$\xi(A) = L_j^i(a) v^j \partial_i + [(R_{si}^k(a) u_a^{im} + R_{sj}^m(a) u_a^{kj}) v^s + L_{ij}^{km}(a) v^{ij}] \partial_{km}. \quad (40)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. Всякое левоинвариантное векторное поле на группе T_0^2G имеет компоненты (40). Оно является проектируемым на левоинвариантное векторное поле (12) на группе G .

Пусть g_0^2 – множество всех левоинвариантных полей на группе Ли T_0^2G . Тогда g_0^2 является алгеброй Ли группы Ли T_0^2G . Поля $E_\alpha(X) = (e_i(X), e_{km}(X))$, где

$$\begin{aligned} e_i(X) &= L_i^j(x) \partial_j + (R_{is}^k(x) u_x^{sm} + R_{is}^m(x) u_x^{ks}) \partial_{km}, \\ e_{km}(X) &= L_{km}^{ij}(x) \partial_{ij} \end{aligned} \quad (41)$$

образуют ее базис. Произвольное левоинвариантное векторное поле выражается через них линейной комбинацией с постоянными коэффициентами:

$$V(X) = v^i e_i(X) + v^{km} e_{km}(X).$$

Замечание 2. В силу формулы (24) левоинвариантное векторное поле (37) совпадает с лифтом векторного поля на T_0^2G (36), если оно имеет вид

$$V(X) = v^i e_i(X),$$

где $v^i = \text{const}$. В частности, это так для абелевых групп.

Найдем структурные уравнения алгебры Ли g_0^2 . Для этого вычислим коммутаторы $[e_i, e_j]$, $[e_i, e_{ik}]$, $[e_{ij}, e_{km}]$. Учитывая вид базиса (41), получим

$$[e_i, e_j] = \alpha_{ij}^k e_k + \beta_{ij}^{km} e_{km}. \quad (42)$$

Учитывая (41) и сравнив коэффициенты при ∂_k и ∂_{km} при $A = E$, получим

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^k &= (\partial_i L_j^k - \partial_j L_i^k)_e, \\ \beta_{ij}^{km} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, $\alpha_{ij}^k = c_{ij}^k$, где c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли группы G .

Рассмотрим коммутаторы $[e_i, e_{km}]$. Пусть

$$[e_i, e_{km}] = \gamma_{ikm}^r e_r + \lambda_{ikm}^{sp} e_{sp}. \quad (44)$$

Подставив в (44) базис g_0^2 (41), сравнив коэффициенты при векторах натурального репера и положив $A = E$, получим

$$\lambda_{ikm}^{sp} = (\partial_i L_k^s)_e \delta_m^p + (\partial_i L_m^p)_e \delta_k^s - (R_{ik}^s)_e \delta_m^p - (R_{im}^p)_e \delta_k^s, \quad \gamma_{i,n+j}^r = 0.$$

Учитывая (24), будем иметь

$$\lambda_{ikm}^{sp} = c_{ik}^s \delta_m^p + c_{im}^p \delta_k^s$$

и, следовательно,

$$[e_i, e_{km}] = (c_{ik}^s \delta_m^p + c_{im}^p \delta_k^s) e_{sp}.$$

Наконец, очевидно последнее структурное уравнение

$$[e_{ij}, e_{km}] = 0.$$

Итак, имеем следующий результат.

Теорема 8. Структурные уравнения алгебры Ли g_0^2 группы $T_0^2 G$ в базисе (41) имеют вид

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad [e_i, e_{km}] = (c_{ik}^s \delta_m^p + c_{im}^p \delta_k^s) e_{sp}, \quad [e_{ij}, e_{km}] = 0. \quad (45)$$

Примеры

Найдем алгебры Ли g_0^2 для групп Ли второго порядка, которые были рассмотрены в п. 2

1) Абелевые группы: \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$, $T^2 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$. В соответствии с вычислениями, проведенными ранее, структурные уравнения в силу формулы (45) имеют вид

$$[e_i, e_j] = 0, \quad [e_i, e_{km}] = 0, \quad [e_{ij}, e_{km}] = 0.$$

Такие же структурные уравнения имеют и другие абелевые группы второго порядка.

2) Группа ориентированных аффинных преобразований второго порядка $Aff^+(1, \mathbb{R})$. Структурные константы этой группы указаны в (27). Тогда структурные уравнения алгебры g_0^2 согласно (45) имеют вид

$$[e_1, e_2] = e_2, \quad [e_1, e_{12}] = e_{12}, \quad [e_1, e_{21}] = e_{21}, \quad [e_1, e_{22}] = 2e_{22},$$

$$[e_2, e_{21}] = -e_{12}, \quad [e_2, e_{12}] = -e_{12}, \quad [e_2, e_{22}] = -e_{12} - e_{21}.$$

Summary

N.A. Opokina. Tangent and tensor bundles of (2,0) type under Lie group.

In the E.V. Nazarova's work the tangent bundle of TG Lie group was studied from the natural and synectics extension point of view of this group in algebra of dual numbers. Invariant synectics linkages under group G . Our aim was to study the tangent and tensor bundles T_0^2G under Lie group. These bundles were proved to be trivial and the bundle spaces were proved to be Lie groups. The lifts of these left-invariant vector fields were built un these bundles. Lie algebra of TG group and Lie algebra of T_0^2G under Lie group were found, and the equations of these algebras were obtained. The tangent and (2, 0) tensor bundles under 2-dimensional linked Lie groups were regarded as examples.

Литература

1. Винберг Э.Б., Горбацевич В.В., Онищук А.Л. Строение групп и алгебр Ли // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Совр. пробл. матем. – 1990. – Т. 41. – 254 с.
2. Гаврилов С.П. Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – Вып. 18. – С. 28–44.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
4. Мищенко А.С. Векторные расслоения и их применения. – М.: Наука, 1984. – 208 с.
5. Назарова Е.В. К геометрии касательных расслоений групп Ли // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. – Вып. 11. – С. 70–78.
6. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 5. Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 312 с.
7. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. – М.: Мир, 1979. – 442 с.
8. Шапуков Б.Н. Задачи по группам Ли и их приложениям. – М.: НИЦ «РХД», 2002. – 256 с.
9. Шапуков Б.Н. Тензорные расслоения // Сб. «Памяти Лобачевского посвящается». – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – С. 104–125.

Поступила в редакцию
21.12.04

Опокина Надежда Анатольевна – аспирант кафедры геометрии Казанского государственного университета.