УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 147, кн. 3 Физико-математические науки *2005*

УДК 539.3

БОЛЬШИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛ

А.И. Голованов, Л.У. Султанов

Аннотация

Предложен метод исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) вязкоупругопластических тел с учетом больших перемещений, поворотов и конечных деформаций. Используется процедура пошагового нагружения в рамках комбинированного лагранжево-эйлерового описания деформирования среды. Решение находится с использованием метода конечных элементов (МКЭ).

1. Разрешающее уравнение. Определяющие соотношения

Традиционно в механике деформируемого твердого тела (МДТТ) для решения нелинейных задач получило распространение лагранжево описание среды, согласно которому состояние элементарного объема описывается в компонентах вектора перемещений из недеформированного состояния в деформированное и второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа, также отнесенного к недеформированному объему. В этом случае хорошо формулируется краевая задача в дифференциальной или вариационной форме, для решения которой возможно использование различных численных методов. Однако подобный подход имеет существенный недостаток в задачах с большими деформациями. Он связан со сложностью построения определяющих соотношений между используемыми тензорами напряжений и деформаций, которая особенно сильно проявляется при постулировании определяющих соотношений в дифференциальной (скоростной) форме. При этом, если течение среды описывать в эйлеровой постановке, то можно эти трудности обойти. Для описания процесса деформирования используется комбинированная лагранжево-эйлерова постановка. Поведение материальной точки (элементарного объема) отслеживается в соответствии с лагранжевым методом описания среды, а в текущий момент времени процесс деформирования представляет собой течение среды с некоторыми физико-механическими свойствами. Это соответствует подходу Эйлера, широко применяемому в механике сплошных сред.

Для описания процесса деформирования среды вводятся радиус-векторы материальной частицы $\mathbf{R} = y^i\mathbf{e}_i$ в деформированном состоянии и $\mathbf{r} = x^i\mathbf{e}_i$ в недеформированном состоянии, вектор $\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$ перемещения точки тела из недеформированного в деформированное состояние, вектор $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = v^i\mathbf{e}_i$ скорости перемещения точки, тензор деформаций скорости $(d) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^i v}{\partial y^j} + \dfrac{\partial^j v}{\partial y^i}\right)\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, где $\mathbf{e}_i$ – орты глобальной декартовой системы координат. Напряженное состояние описывается тензором истинных напряжений Коши – Эйлера $(\Sigma) = \sigma^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Исходным является уравнение виртуальных мощностей в актуальной конфигурации

$$\iiint\limits_{\Omega} (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\, d\Omega = \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{v}\, d\Omega + \iint\limits_{S^\sigma} \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{v}\, dS, \tag{1}$$

где Ω – текущий объем, S^σ – часть его поверхности, на которой заданы усилия, $\mathbf{f}$, $\mathbf{p}$ – плотности векторов массовых и поверхностных сил. Кинематические граничные условия $\delta\mathbf{v} = 0$ на поверхности, не принадлежащей Ω, выполняются априори. Путем линеаризации уравнения мощностей (1) получено уравнение в скоростях напряжений

$$\iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\dot{\Sigma}\right) \cdot\cdot \left(\delta d\right) + \left(\Sigma\right) \cdot\cdot \left(\delta \dot{d}\right) + \frac{\dot{J}}{J} \left(\Sigma\right) \cdot\cdot \left(\delta d\right) \right] d\Omega =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left[\dot{\mathbf{f}} + \mathbf{f}\frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta\mathbf{v}\, d\Omega + \iint\limits_{S^\sigma} \left[\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{p}\frac{\dot{J}}{J} \right] \cdot \delta\mathbf{v}\, dS, \quad (2)$$

где J – относительное изменение объема в процессе деформирования.

Помимо скорости изменения напряжений $(\dot{\Sigma})$ используется индифферентная производная тензора напряжений по Яуманну Коши–Эйлера $\left(\Sigma^J\right)$, которая имеет вид

$$\left(\Sigma^J\right) = \left(\dot{\Sigma}\right) - \left(\omega\right) \cdot \left(\Sigma\right) + \left(\Sigma\right) \cdot \left(\omega\right), \quad (3)$$

где $(\omega) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^i v}{\partial y^j} - \dfrac{\partial^j v}{\partial y^i}\right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ – тензор скоростей поворота. Рассматривается класс нелинейно упругих материалов, для которых предполагается существование потенциальной энергии упругой деформации W как функции инвариантов тех или иных мер деформаций, производная от которой по соответствующей мере деформации определяет тензор напряжений, в частности,

$$\left(\Sigma\right) = \frac{2}{J} \left(B\right) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B}\right), \quad (4)$$

где (B) – мера деформации Фингера (левый тензор Коши–Грина). В качестве примера приведен стандартный материал второго порядка [4], для которого определяющее соотношение в скоростях напряжений записывается в следующем виде:

$$\left(\dot{\Sigma}\right) = \frac{1}{J} \left\{ \frac{\tilde{\lambda}}{2} \left(I\right) \cdot\cdot \left(\dot{B}\right) \cdot \left(B\right) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\tilde{\lambda}}{2} \left(I_{1B} - 3\right) - \tilde{\mu} \right] \left(\dot{B}\right) + 2\tilde{\mu} \left(B\right) \cdot \left(\dot{B}\right) \right\} - \frac{\dot{J}}{J} \left(\Sigma\right). \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – коэффициенты Ляме обычного закона Гука, I_{1B}, I_{2B} – первый и второй инварианты тензора (B) соответственно.

При решении задач с учетом пластического деформирования используется аддитивное представление для деформации скорости, считается, что относительное изменение объема является упругой деформацией скорости, предполагается справедливость ассоциированного закона течения. Рассмотрен идеально пластический изотропный материал. Для удобства тензоры деформации скорости и напряжений разложены на шаровые части $d_0 = \dfrac{1}{3}d^{ii}$, $\sigma_0 = \dfrac{1}{3}\sigma^{ii}$ и девиаторы $d'^{ij} = d^{ij} - \delta_{ij}d_0$, $\sigma'^{ij} = \sigma^{ij} - \delta_{ij}\sigma_0$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Физические соотношения упругого деформирования записаны в виде линейной зависимости между производной Яуманна тензора напряжения (3) и тензора деформации скорости

$$\left(\Sigma_0^J\right) = 3K\left(d_0\right), \quad \left(\Sigma'^J\right) = 2G\left(d'\right), \quad (6)$$

где G – модуль сдвига, K – модуль объемного сжатия. В этом случае соотношения упругости будут полностью удовлетворять принципу индифферентности. В качестве условия пластичности в работе используется критерий Губера–Мизеса, для которого функция текучести Φ имеет вид

$$\Phi\left(\sigma^{ij}\right) = \sigma_i - \sigma_T = 0, \tag{7}$$

где σ_i – интенсивность напряжений, σ_T – передел текучести. Для материалов с внутренним трением применяется условие пластичности Мизеса–Боткина

$$\Phi\left(\sigma^{ij}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i - C^* + \sigma_0 \operatorname{tg}\varphi^* = 0. \tag{8}$$

Здесь C^*, φ^* – сцепление и угол внутреннего трения на октаэдрических площадках.

В рамках классической теории течения пластическое деформирование моделируется на основе метода проецирования напряжений на поверхность текучести [3], т. е., если имеется два бесконечно близких состояния l и $(l+1)$, то по известным параметрам l-го состояния определяются напряжения $(l+1)$-го состояния. Сначала вычисляется тензор пробных напряжений $\left(\tilde{\Sigma}\right) = \left({}^l\Sigma\right) + \left({}^l\dot{\Sigma}\right)\Delta t$, где $\left({}^l\dot{\Sigma}\right)$ определяется с помощью (3) и (6). Тогда шаровая часть тензора истинных напряжений будет иметь вид

$$\left({}^{l+1}\Sigma_0\right) = \left(\tilde{\Sigma}_0\right), \tag{9}$$

а девиатор истинных напряжений определяется как проекция девиатора «пробных» на поверхность текучести

$$\left({}^{l+1}\Sigma'\right) = \frac{\sigma_T}{\tilde{\sigma}_i}\left(\tilde{\Sigma}'\right). \tag{10}$$

При моделировании процессов деформирования с учетом деформаций ползучести используется аддитивное представление деформации скорости. Рассмотрена обобщенная модель Максвелла, при учете пластических деформаций используются теория течения и метод проецирования напряжений на поверхность текучести. Определяющие соотношения в этом случае записаны как

$$\begin{aligned} &\left(\dot{\Sigma}_0\right) = 3K\left(d_0\right), \\ &\left(\dot{\Sigma}'\right) = 2G\left(d'\right) + (\omega)\cdot(\Sigma) - (\Sigma)\cdot(\omega) - \frac{(\Sigma')\,G}{\eta}, \end{aligned} \tag{11}$$

где η – коэффициент вязкости.

Для каждой модели поведения среды получены разрешающие уравнения путем подстановки соответствующих физических соотношений в уравнение (2).

2. Алгоритм решения

Для решения нелинейных задач используется метод последовательных нагружений, который может быть естественно реализован в рамках МКЭ. Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний. Переход от предыдущего состояния к последующему происходит путем приращения нагрузки. Методика расчета состоит в разработке алгоритма вычисления $(l+1)$-го состояния при известных параметрах процесса l-го состояния. На каждом шаге нагружения строится разрешающее уравнение, в которое входит особое слагаемое – невязка. По физическому смыслу это есть уравнение виртуальных

мощностей (1) в l-м состоянии, которое должно удовлетворяться для точного решения. Так как это уравнение на шаге нагружения в настоящей методике точно не выполняется, то его вводим в линеаризованное уравнение в виде невязки. Опыт решения нелинейных задач в шаговой постановке (в том числе и представленной в настоящей работе) свидетельствует, что наличие такого рода слагаемых в правой части соответствующего линеаризованного уравнения препятствует накоплению ошибок и не позволяет решению удаляться от действительной кривой деформирования. Полученное уравнение является линейным относительно скорости ${}^l\mathbf{v}$. Так как исследуемые процессы не имеют явного динамического характера (ускорения не учитываются), то под временем можно понимать любой монотонно возрастающий параметр, определяющий изменение нагрузки. В таком аспекте вполне уместно принять производную по времени как отношение приращения соответствующих величин, получаемых при переходе с l-го состояния в $(l+1)$-е, к приращению по времени. В результате конечноэлементной дискретизации получено уравнение для приращений перемещений в узловых точках $\left\{\Delta^l u\right\}$

$$\left[{}^lK\right]\left\{\Delta^l u\right\} = \left\{\Delta^l P\right\} - \left\{{}^lH\right\}, \tag{12}$$

где $\left[{}^lK\right]$ – матрица левых частей, $\left\{\Delta^l P\right\}$ – вектор приращения узловых сил, $\left\{{}^lH\right\}$ – вектор невязки.

Решая систему алгебраических уравнений (12), получим приращения перемещений, с помощью которых определим конфигурацию $(l+1)$-го шага ${}^{l+1}\mathbf{R} = {}^l\mathbf{R} + \Delta^l\mathbf{u}$ и напряженное состояние $\left({}^{l+1}\Sigma\right) = \left({}^l\Sigma\right) + \left({}^l\dot{\Sigma}\right)\Delta t$.

При появлении пластических деформаций и вследствие использования метода проецирования напряжений на поверхность текучести (9), (10) полученное напряженное состояние не удовлетворяет разрешающей системе уравнений (12). Поэтому применяется итерационное уточнение текущего НДС. Эта итерационная процедура основана на введении в разрешающее уравнение вариации мощности «дополнительных напряжений» (Σ_∂) на возможных деформациях скорости $\iiint\limits_{\Omega_l}\left({}^l\Sigma_\partial^m\right)\cdot\cdot\left(\delta^l d\right)d\Omega$, где дополнительные напряжения определяются как разность девиаторов истинных и «пробных» напряжений. Итоговое уравнение для m-й итерации на l-м шаге нагружения имеет вид

$$\left[{}^lK\right]\left\{\Delta^l u_m\right\} = \left\{\Delta^l P\right\} - \left\{{}^lH\right\} - \left\{{}^lS^m\right\}, \tag{13}$$

где $\left\{{}^lS^m\right\}$ – вектор дополнительных напряжений.

При исследовании вязкоупругопластичеких деформаций алгоритм итерационного уточнения выглядит аналогично, за исключением разрешающего уравнения, в котором в правой части появляется дополнительное слагаемое $\iiint\limits_{\Omega}\frac{G}{\eta}\left({}^l\Sigma'\right)\cdot\cdot\left(\delta d\right)d\Omega$, характеризующее вязкие деформации.

При исследовании закритического поведения при потере устойчивости нагружение не носит монотонно возрастающего характера, вследствие чего применение классического шагового метода представляется невозможным, тогда используется алгоритм, основанный на методе продолжения по параметру [5]. Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний, тогда на очередном шаге имеем систему линейных алгебраических уравнений (13). Считаем, что известны все параметры l-го состояния. На очередном шаге приращение прикладываемой нагрузки является неизвестной и представляется в следующем виде:

$$\left\{\Delta^l P\right\} = \Delta^l t\left\{P_0\right\},$$

где $\{P_0\}$ – вектор, задающий направление нагружения, а $\Delta^l t$ – искомый параметр, определяющий приращение нагрузки. Тогда решение ищется в виде проекции касательной к кривой деформирования

$$\left\{\Delta^l u\right\} = {}^l\lambda \left\{\Delta^{l-1} u\right\} + \left\{\Delta Y\right\}, \quad \Delta^l t = {}^l\lambda \Delta^{l-1} t - \Delta r,$$

где ${}^l\lambda$ – параметр, определяющий величину шага, $\left\{\Delta^{l-1} u, \Delta^{l-1} t\right\}$ – вектор касательной, $\{\Delta Y, \Delta r\}$ – вектор проекции касательной к кривой деформирования, который находится из условия ортогональности вектора касательной к вектору проекции и уравнения равновесия.

Параметр ${}^l\lambda$, определяющий длину касательной на каждом шаге, в приведенных ниже численных расчетах принят как отношение длины дуги кривой деформирования на предыдущем шаге приращения к длине дуги на первом шаге.

Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов в рамках полилинейной трехмерной изопараметрической аппроксимации на базе восьмиузлового элемента.

3. Численные примеры

1. Задача об изгибе в кольцо упругой балки прямоугольного поперечного сечения, жестко защемленной, с одной стороны, и нагруженной изгибающим моментом, с другой. Определяющие соотношения записаны в виде (6). Значение момента, при котором балка изгибается в кольцо, было найдено аналитическим путем. Параметрическое исследование по изменению сетки конечных элементов показало, что увеличение числа элементов по высоте мало сказывается на точности решения, наибольшее влияние оказывает число элементов по длине. Величина шага нагружения существенно влияет на точность, что вполне объяснимо. На рис. 1 изображено деформированное состояние балки и несколько промежуточных этапов нагружения при сетке конечных элементов $200 \times 1 \times 1$ при разбиении нагрузки на 1000 шагов.

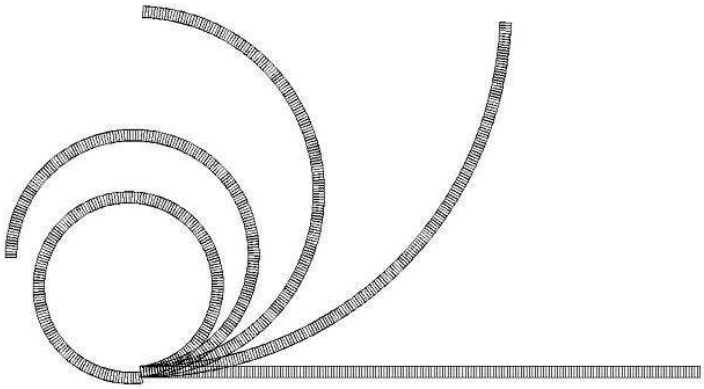

Рис. 1. Деформированные состояния балки

2. Распределение напряжений в толстостенной длинной трубе, находящейся под действием осесимметричного внутреннего давления p при упругопластичном деформировании в геометрически линейной постановке (плоская задача). Внутренний и внешний радиусы трубы равны $a = 1$ см и $b = 2$ см соответственно, модуль упругости $E = 2.0{\cdot}10^6$ кг/см^2, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Материал полагаем идеально пластическим, критерием пластичности служит условие Губера – Мизеса

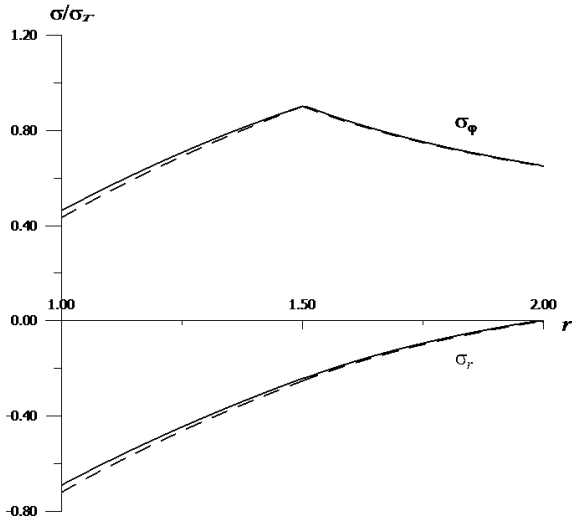

Рис. 2. Распределение радиальных и окружных напряжений в трубе

(7), физические соотношения упругого деформирования записываются в виде (6). Из аналитического решения было найдено отношение внутреннего давления к пределу текучести $p/\sigma_T = 0.7208$, при котором радиус пластической зоны $c = 1.5$ см. На рис. 2 показано распределение радиальных и окружных напряжений в трубе по отношению к пределу текучести при сетке конечных элементов 80×20, а также аналитическое решение (штриховая линия).

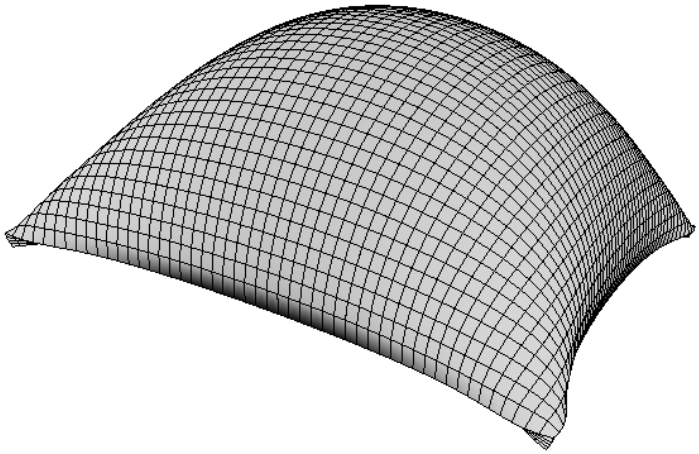

Рис. 3. Деформированное состояние плиты

3. Задача об упругом деформировании плиты из стандартного материала второго порядка (5) под действием равномерного давления. Нижнее ребро плиты не имеет вертикального смещения. Плита – квадратная со стороной $a = 20$ см и толщиной $h = 0.5$ см, $E = 1000$ кг/см^2, $\mu = 0.3$. На рис. 3 изображено деформированное состояние плиты.

4. Упругопластическое деформирование жестко защемленной с обоих концов балки прямоугольного поперечного сечения под действием распределенной на-

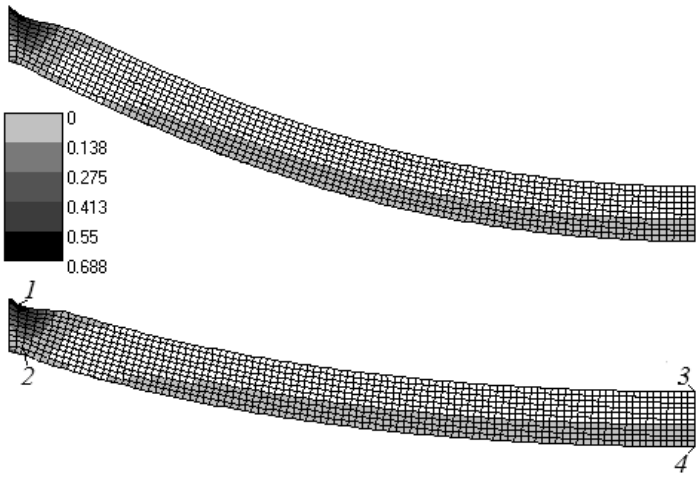

Рис. 4. Распределение интенсивности пластических деформаций в нагруженном и разгруженном состояниях

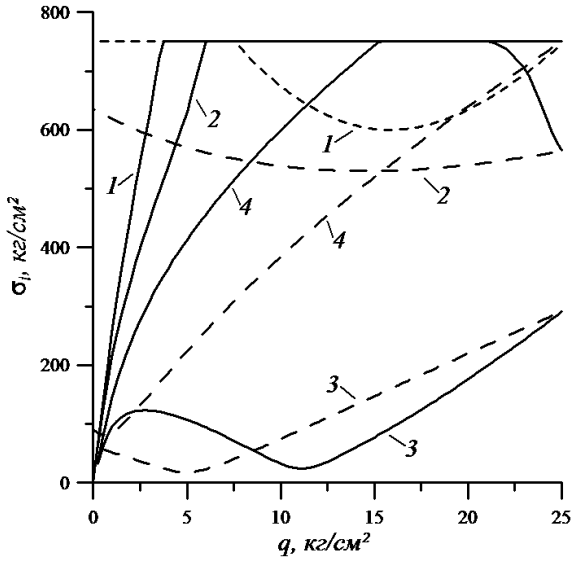

Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений от нагрузки

грузки $q = 25$ кг/см^2. Длина балки $l = 25$ см, высота – $h = 1$ см, ширина – $b = 0.125$ см, $E = 2.0 \cdot 10^4$ кг/см^2, $\mu = 0$, предел текучести $\sigma_T = 750$ кг/см^2. Материал – идеально пластический, подчиняющийся критерию пластичности Губера – Мизеса (7), определяющие соотношения заданы в виде (6). Так как задача является симметричной, то достаточно рассмотреть половину балки, введя дополнительные условия симметрии. При решении используем сетку конечных элементов размером $100 \times 10 \times 1$. Нагрузка разбита на 100 шагов.

На рис. 4 показано распределение интенсивности пластических деформаций в нагруженном и разгруженном состояниях для половины балки. Интересно отметить в этой задаче наличие впадины в окрестности защемления, а именно в этой зоне возникают конечные пластические деформации. Наличие этой впадины объясняется учетом физической нелинейности. На рис. 5 представлены зависимости

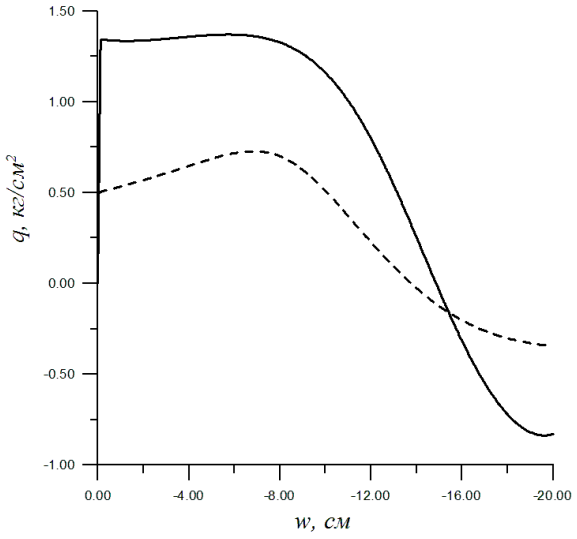

Рис. 6. Зависимости нагрузки от прогиба средней точки арки

интенсивности напряжений от нагрузки в точках, указанных на рис. 4, где сплошной линией показан этап нагружения, а штриховой – этап разгрузки. Так, в точке 1 можно наблюдать этап упругого деформирования с возрастанием интенсивности напряжений, затем наступает этап пластического с возрастанием интенсивности пластических деформаций; при разгрузке сначала происходит убывание интенсивности напряжений с неизменными пластическими деформациями, затем увеличение до предела текучести и наступление этапа догрузки с возрастанием пластических деформаций (здесь имеет место влияния впадины). В точках 2 и 4, как видно из графиков, после достижения предела текучести, возникают пластические деформации, которые сохраняются и после снятия нагрузки. Однако в точке 2 можно наблюдать эффект падения интенсивности напряжений при возрастании нагрузки. В точке 3 возникают лишь упругие деформации.

5. Задача устойчивости шарнирно опертой круговой нерастяжимой арки под равномерным давлением. Радиус арки 10 см, центральный угол равен $90°$, толщина и ширина арки – 1 см, $E = 2000$ кг/см^2, $\mu = 0$. Физические соотношения выбраны в виде (6).

При решении были получены как симметричные, так и несимметричные относительно середины арки формы деформирования. При симметричной форме рассматривалась половина арки, разбитая на сетку конечных элементов размером $120 \times 2 \times 1$, с постановкой граничных условий шарнирного опирания для конца арки (узлы, расположенные на средней линии основания, полностью защемлены) и условий симметрии для центральной точки (узлы не имеют горизонтального смещения). При несимметричной форме деформирования была рассмотрена целая арка с сеткой конечных элементов $240 \times 2 \times 1$ с постановкой граничных условий шарнирного опирания для концов арки. Для того чтобы перейти к несимметричной форме закритического деформирования, вводились возмущения на нагрузку. В результате были получены решения для соответствующих форм изгибов, которые дают хорошее совпадение с [5]. Значения критических нагрузок для симметричной $q^* = 1.343$ кг/см^2 и несимметричной $q^* = 0.5$ кг/см^2 форм практически совпадают с аналитическими решениями $q^T = 1.343$ кг/см^2, $q^T = 0.5$ кг/см^2 [5].

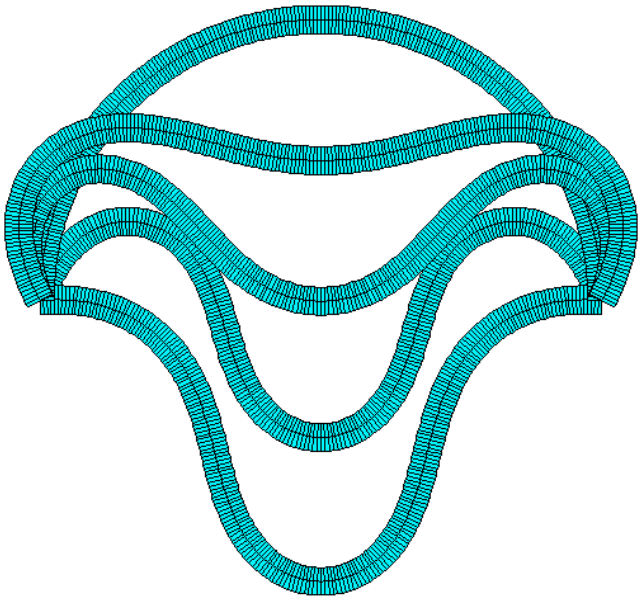

Рис. 7. Деформированные состояния арки (симметричная форма потери устойчивости)

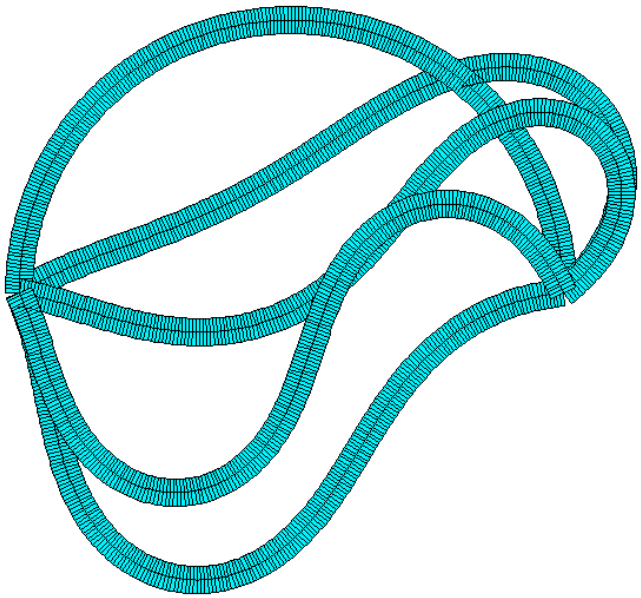

Рис. 8. Деформированные состояния арки (несимметричная форма потери устойчивости)

На рис. 6 показана зависимость нагрузки от прогиба средней точки арки, где сплошной линией обозначено решение для симметричной формы изгиба, а штриховой – для несимметричной.

На рис. 7 приведено начальное и несколько деформированных состояний для симметричного изгиба, на рис. 8 – для несимметричного. Численное решение выявило, что для несимметричной формы начальный этап закритического деформирования является устойчивым, и рост прогиба сопровождается ростом нагруз-

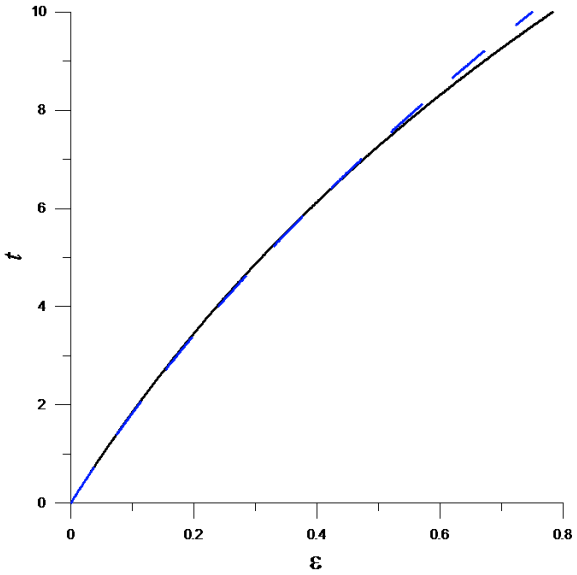

Рис. 9. Зависимость деформаций от времени

ки до величины $q = 0.728$ кг/см^2, и только затем равновесие форм становится неустойчивым. Таким образом, алгоритм, основанный на методе продолжения по параметру, показал себя в расчетах достаточно устойчивым, надежным и удобным методом решения нелинейных задач МДТТ.

6. Растяжение вязкоупругого бруса. Рассмотрен брус квадратного поперечного сечения, на одном конце которого заданы напряжения, а другой – защемлен. В качестве реологической модели выбрана обобщенная модель Максвелла (11). На рис. 9 приводится сравнение точного решения (штриховая линия) и решения, полученного настоящей методикой. Как видно, результаты практически идентичны при малых деформациях и начинают расходиться лишь при увеличении величины деформации.

7. Задача изгиба конструкции, конечноэлементная модель которой представлена на рис. 10. В силу симметрии рассмотрена половина конструкции, которая разбита на две подконструкции: четырехугольное основание и обод. Примем, что левый конец основания защемлен, вертикально направленная вниз нагрузка равномерно распределена по верхней грани обода и изменяется по закону $q = q_0 t$. Задача решалась за 150 шагов при следующих параметрах: внутренний радиус обода равен 10 см, внешний – 20 см, ширина левого края основания – 5 см, правого – 10 см, длина основания – 20 см, толщина конструкции – 1 см, $E = 2.0 \cdot 10^6$ кг/см^2, $\mu = 0.3$, $\eta = 1.0 \cdot 10^7$ кг/см^2, $q_0 = 2.0$ кг/см^2, $\sigma_T = 1500$ кг/см^2. Четырехугольное основание было разбито на 20 конечных элементов по длине, 10 – по ширине, 1 – по толщине; обод – на 20 элементов по окружному направлению, 10 – по радиальному, 1 – по толщине. Реологическая модель записана в виде (11), условие пластичности – в виде (7). Также для наглядности была решена аналогичная задача, но без учета деформаций ползучести. На рис. 11 представлено деформированное состояние конструкции с распределением интенсивности пластических деформаций. На рис. 12 показана зависимость перемещения точки A от нагрузки, на рис. 13 – зависимость интенсивности напряжений в точке B от нагрузки, где штриховыми

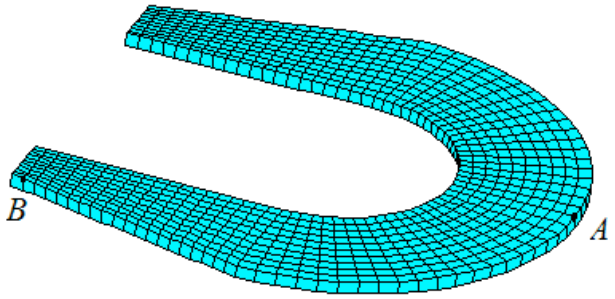

Рис. 10. Конечноэлементная модель «подковы»

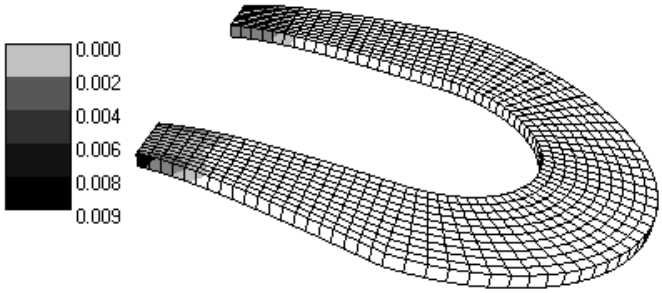

Рис. 11. Распределение интенсивности пластических деформаций

линиями обозначены решения, полученные без учета вязкости, а сплошными – с учетом последних. Из приведенных рисунков видно, что учет деформаций ползучести ведет к снижению скорости роста напряжений при возрастании деформаций.

8. Закритическое поведение толстостенной трубы под воздействием моментов, приложенных с обоих концов. Физические соотношения записаны в виде (6), используется условие пластичности (7). Внешний радиус трубы – 5 см, длина трубы – 50 см, толщина – 1 см, $E = 2000$ кг/см^2, $\mu = 0.3$. При решении использовались два значения предела текучести материала: $\sigma_T = 250$ кг/см^2 и $\sigma_T = 120$ кг/см^2.

На рис. 14 приведена зависимость нагрузка – перемещение конца трубы, где a – некий параметр нагружения, сплошной линией обозначено решение для $\sigma_T = 250$ кг/см^2, штриховой – для $\sigma_T = 120$ кг/см^2. При приделе текучести $\sigma_T = 250$ кг/см^2 происходит потеря устойчивости, а затем появляются пластические деформации. При $\sigma_T = 120$ кг/см^2 сначала появляются пластические деформации, и только затем происходит потеря устойчивости.

На рис. 15 показано распределение интенсивности пластических деформаций для $\sigma_T = 250$ кг/см^2, на рис. 16 – для $\sigma_T = 120$ кг/см^2. В том и другом случае равновесное состояние закритического деформирования является неустойчивым. Как видно из рисунков, в трубе происходит перестройка формы и появляются вмятины, в которых наблюдаются наибольшие пластические деформации.

9. Задача деформирования грунтовой насыпи под действием собственного веса и нагружения. Грунтовый массив представляется как сплошная среда, обладающая специфическими физико-механическими свойствами. Исследовано НДС грунтовой насыпи под действием собственного веса и нагрузки, равномерно распределенной

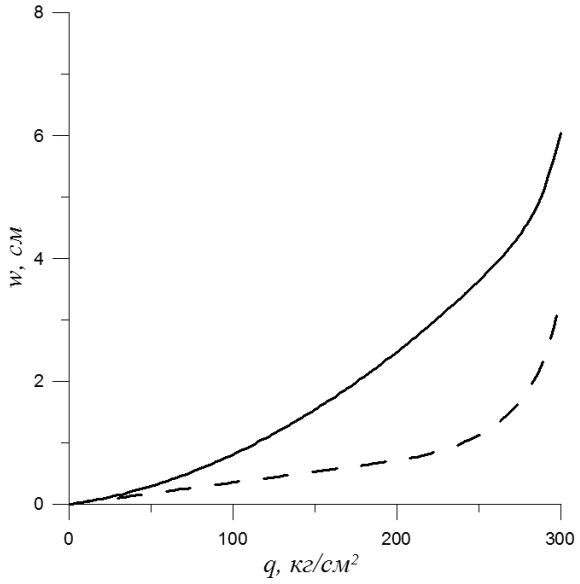

Рис. 12. Зависимость перемещения точки A от нагрузки

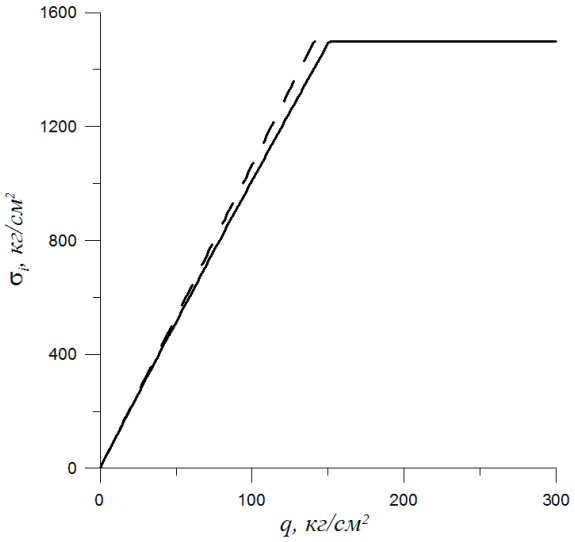

Рис. 13. Зависимость интенсивности напряжений от нагрузки в точке B

по верхней грани, нижняя грань не имеет вертикальных смещений, а боковые – горизонтальных (рис. 17). Рассмотрен случай плоского деформирования. Считается, что грунт – однородная среда со следующими физико-механическими свойствами: модуль деформации $E = 0.160$ МПа, коэффициент бокового расширения $\mu = 0.42$, сцепление $C = 40$ КПа, угол внутреннего трения $\varphi = 17$, плотность $\rho = 2000$ кг/м^3, величина нагрузки $q = 0.40$ МПа. Физические соотношения записаны в виде (6), в качестве условия текучести выбран критерий Мизеса–Боткина (8). Процесс деформирования был разбит на два этапа. На первом этапе находилось напряженное состояние насыпи под действием только собственного веса. На втором

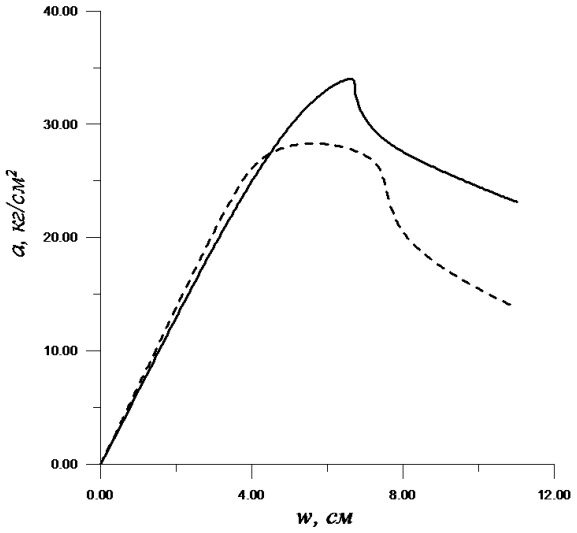

Рис. 14. Зависимость нагрузка – перемещение конца трубы

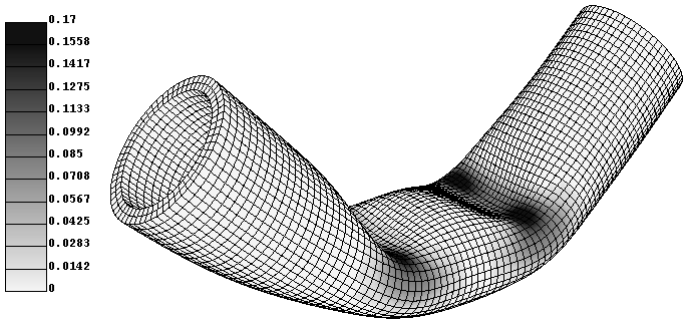

Рис. 15. Распределение интенсивности пластических деформаций для $\sigma_T = 250$ кг/см^2

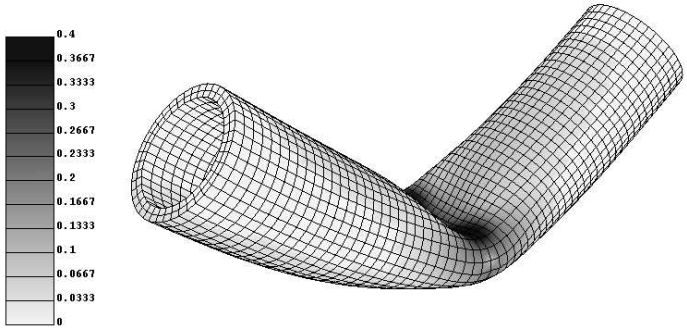

Рис. 16. Распределение интенсивности пластических деформаций для $\sigma_T = 120$ кг/см^2

этапе определялось НДС насыпи под действием нагрузки с учетом напряженного состояния, полученного на первом этапе.

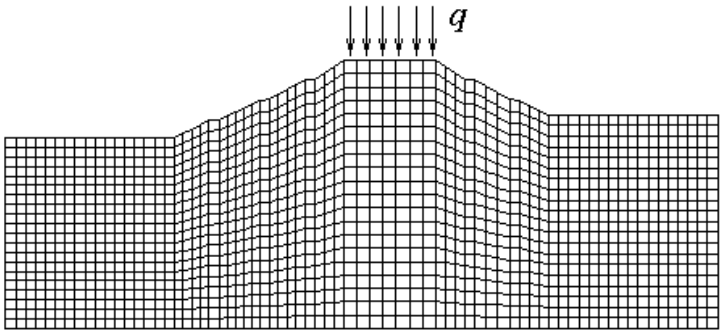

Рис. 17. Конечноэлементная модель насыпи

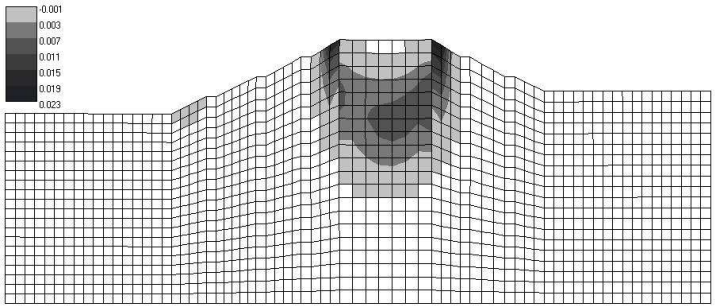

Рис. 18. Распределение пластических деформаций

На рис. 18 показано распределение интенсивности пластических деформаций. Из рисунка видно, что грунт в районе нагружения имеет осадку, максимальные пластические деформации возникают на склонах. Зона пластических деформаций имеет небольшую площадь, поэтому при таком нагружении для данной формы насыпи не возникает опасных участков.

Summary

A.I. Golovanov, L.U. Sultanov. Large visco-elasto-plastic deformation of solids.

Finite element analysis of strain-stress state of visco-elasto-plastic solids with large displacements, rotations and strains is proposed. An incremental method in mixed Lagrangian-Eulerian formulation is used.

Литература

1. *Голованов А.И., Султанов Л.У.* Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикладная механика. – 2005. – Т. 41, № 6. – С. 36–43.
2. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритм, приложения – М.: Наука, 1986. – 232 с.
3. *Уилкинс М.Л.* Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
4. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

5. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.

6. *McMeeking R.M., Rice J.R.* Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation // Int. J. Solids Stuct. – 1975. – V. 11, No 5. – P. 601–616.

7. *Taylor L.M., Becker E.B.* Some computational aspect of large deformation, rate-dependent plasticity problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1983. – V. 41, No 3. – P. 251–277.

Поступила в редакцию
20.10.05

Голованов Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, проректор по научной работе и информатизации Казанского государственного университета.

E-mail: *Alexandr.Golovanov@ksu.ru*

Султанов Ленар Усманович – научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Lenar.Sultanov@ksu.ru*