УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 3 Физико-математические науки *2009*

УДК 517.544

ЗАДАЧА РИМАНА НА ДВУЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КЛАССА O_{A^0B}

Н.А. Бариева, И.А. Бикчантаев

Аннотация

В статье И.А. Бикчантаева (Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31) были получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на ультрагиперэллиптической поверхности. В настоящей работе этот результат обобщается на случай двулистной римановой поверхности класса O_{A^0B}.

Ключевые слова: краевые задачи, римановы поверхности.

1. Предварительные сведения и результаты. Постановка задачи

1.1. Введем следующие термины и обозначения (см. [1]). Множество M на римановой поверхности или на плоскости называется AB-устранимым, если для некоторой окрестности U множества M любая аналитическая и ограниченная в $U \setminus M$ функция аналитически продолжима в U. Пусть $AB(R)$ – семейство аналитических и ограниченных функций на римановой поверхности R; O_{AB} – класс римановых поверхностей, на которых не существует непостоянных AB-функций; SO_{AB} – семейство римановых поверхностей с краем $\{\overline{R}\}$ такое, что каждая AB-функция f на $\overline{R}$ с $\Re f = 0$ на ∂R сводится к постоянной; как известно (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]), $\overline{R}$ принадлежит SO_{AB} тогда и только тогда, когда ее дубль относительно края ∂R принадлежит O_{AB}. Областью с краем $\overline{D} = D \bigcup \partial D$ будем называть объединение области D на R с аналитической жордановой относительной границей ∂D. Через O_{A^0B} обозначим класс римановых поверхностей R таких, что каждая подобласть с краем $\overline{R'}$ на R принадлежит SO_{AB}. Имеет место строгое включение $O_{A^0B} \subset O_{AB}$ (см. [1, гл. II, § 1, п. 2C]).

1.2. В настоящей статье мы будем считать, что рассматриваемая риманова поверхность R принадлежит классу O_{A^0B} и ее род равен бесконечности.

Предложение 1. *Пусть $\overline{D}$ – область с компактным краем на римановой поверхности R класса O_{A^0B}. Тогда $\overline{D}$ может быть вложена в риманову поверхность с краем $\overline{V}$ такую, что $\partial V = \partial D$, множество $V \setminus D$ AB-устранимо и любая ее подобласть конечного рода с компактной относительной границей относительно компактна. Если род области D конечен, то $\overline{V}$ компактна.*

Доказательство. Если род области D конечен, то требуемый результат вытекает из того, что $R \in O_{A^0B}$, и теоремы из [1, гл. II, § 3, п. 15A], примененной к дублю $\overline{D}$ относительно края ∂D. Пусть теперь род области D бесконечен. Пусть $\{\overline{D}_n\}$ – исчерпание $\overline{D}$ областями с краем такими, что край ∂D_n компактен и содержит ∂D, $\overline{D}_n \subset D_{n+1} \bigcup \partial D$, род поверхности D_n конечен и все компоненты $D \setminus \overline{D}_n$ – области рода бесконечность. Каждая $\overline{D}_n$ вложима в компактную риманову поверхность с краем $\overline{V}_n$, причем ее род равен роду $\overline{D}_n$, $\partial V_n = \partial D_n$ и множество $V_n \setminus D_n$

является AB-устранимым. Тогда область $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ удовлетворяет условиям предложения. Действительно, то, что $V \setminus D$ AB-устранимо, следует из определения поверхности V. Пусть V' – область на V, род которой конечен и относительная граница $\partial V'$ компактна. При достаточно большом n справедливо вложение $V_n \supset \supset \partial V'$. Покажем, что $V' \subset V_n$. Если допустить противное, то найдется точка $q \in V' \setminus V_n$. Так как множество $V \setminus V_n$ не содержит точек относительной границы области V', то V' должна включать в себя компоненту множества $V \setminus V_n$, содержащую точку q. Но род последней, а, следовательно, и род V', равен бесконечности. Полученное противоречие показывает, что $V' \subset V_n$ и $\overline{V'}$ как замкнутое подмножество компактного множества $\overline{V}_n$ компактно. Предложение доказано. $\square$

Доказанное утверждение справедливо также и в том случае, когда относительная граница области D является пустым множеством, то есть $D = R$. Соответствующую этому случаю область V обозначим через R^*.

1.3. Если f – мероморфная функция на D, ограниченная вблизи идеальной границы, то она аналитически продолжима в V; это продолжение условимся обозначать той же буквой.

Предположим теперь, что на R существует мероморфная функция z, принимающая каждое значение $z = a \in \overline{\mathbb{C}}$ не более двух раз с учетом кратности. Тогда R может быть реализована в виде накрывающей (R, z) расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Продолженная аналитически на R^* функция z определяет безграничную накрывающую (R^*, z) для области $z(R^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$, на которой существует отличное от тождественного преобразование наложения j_{R^*}, то есть конформный автоморфизм поверхности R^*, удовлетворяющий соотношению $z(j_{R^*}(q)) = z(q)$ для всех $q \in R^*$.

Род поверхности V, очевидно, равен роду D и является конечным в том и только в том случае, если накрывающая (V, z) имеет конечное число точек ветвления.

Предложение 2. *Пусть U – область на R^* рода бесконечность с компактной относительной границей ∂U, f – мероморфная функция в U, ограниченная вблизи идеальной границы области U. Тогда f принимает одно и то же значение в точках области U, имеющих одинаковые проекции при отображении $z : U \to \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Пусть $U_0 \subset U$ – область с теми же свойствами, что и U, кроме того, $j_{R^*}(U_0) = U_0$ и функция f голоморфна в $\overline{U}_0$. Множество M проекций точек ветвления накрывающей (U_0, z) на $\overline{\mathbb{C}}$ бесконечно и множество μ его предельных точек совпадает с множеством $\partial(z(U_0)) \setminus z(\partial U_0)$. Пусть W – область на $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая $z(U_0)$ и такая, что $\partial W = z(\partial U_0)$. Так как относительная граница ∂U_0 области U_0 компактна, то $\partial W = z(\partial U_0)$ не содержит точек множества μ. Поэтому $\overline{M} = M \bigcup \mu \subset W$. Положим $f_0(z) := (f(j_{R^*}(q(z))) - f(q(z)))^2$, где $q(z)$ – точка области U_0 такая, что $z(q(z)) = z$. Функция f_0 есть AB-функция в $z(U_0)$, исчезающая в точках множества M. Множество $W \setminus z(U_0)$ не имеет внутренних точек. Действительно, если точка a вместе со своей окрестностью принадлежит $W \setminus z(U_0)$, то непостоянная функция $1/(z-a)$ есть AB-функция на R, что невозможно. Поэтому $W \setminus z(U_0) = \mu$. Следовательно, f_0 голоморфно продолжима в область W и обращается в нуль на множестве $\overline{M} = M \bigcup \mu \subset W$. По внутренней теореме единственности $f_0 = 0$. Предложение доказано. $\square$

1.4. Пусть Γ – кусочно-гладкий контур на R, T – множество узлов контура Γ. Будем предполагать, что $z(\Gamma)$ также есть кусочно-гладкий контур на $\mathbb{C}$, причем Γ и $z(\Gamma)$ не имеют точек возврата. Ориентацию на Γ выберем так, чтобы на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на z-плоскость $\mathbb{C}$, ориентация контура была согласована. Тогда ориентацию $z(\Gamma)$ можно определить как индуцированную отображением $z : \Gamma \to z(\Gamma)$.

Зададим дивизор D, носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$, и функции $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma,\ T)$ и $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma,\ T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$ (мы используем функциональные пространства $H_{\mu,(\nu)}(\Gamma,\ T)$ и $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, введенные на плоских контурах А.П. Солдатовым [2] и распространенные в [3] на контуры, расположенные на римановой поверхности). К множеству T отнесем все узлы контура Γ, все точки ветвления накрывающей (R, z), лежащие на Γ, все точки разрыва коэффициентов G и g, все точки $t \in \Gamma$ такие, что $z(t)$ есть узловая точка контура $z(\Gamma)$; в него можно включить также любое конечное число других точек контура Γ. Не умаляя общности, будем считать, что бесконечно удаленная точка не лежит на $z(\Gamma) \bigcup z(\operatorname{supp} D)$.

Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ, кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R, предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma,\ T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \qquad t \in \Gamma. \tag{1}$$

2. Случаи, когда задача Римана сводится к плоской

Пусть Γ – контур на R такой, что каждая компонента множества $R \setminus \Gamma$ имеет род, равный бесконечности.

2.1. Через $q(z)$ будем обозначать поднятие точки $z \in \overline{\mathbb{C}}$ на накрывающую $(R^*,\ z)$. Из [3] и предложений 1 и 2 следует, что если F – решение задачи (1), то функция F аналитически продолжима на $R^* \setminus \Gamma$, принимает одинаковые значения в точках накрывающей (R, z), принадлежащих одной компоненте $R \setminus \Gamma$ и имеющих одинаковую проекцию на z-плоскость; при этом функция $f(z) = F(q(z))$ однозначна в $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(\Gamma)$ и аналитически продолжима в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, где γ – множество точек на $z(\Gamma)$, имеющих два прообраза при отображении $z : \Gamma \to z(\Gamma)$ (точки ветвления накрывающей (R, z) при этом считаются дважды).

Определим в $\overline{\mathbb{C}}$ дивизор Δ, полагая $\operatorname{ord}_{z(q)}\Delta = \min\left\{\operatorname{ord}_q D,\ \operatorname{ord}_{j_{R^*}(q)} D\right\}$ при $j_{R^*}(q) \neq q$ и $\operatorname{ord}_{z(q)}\Delta = \left[\dfrac{1}{2}\operatorname{ord}_q D\right]$ при $j_{R^*}(q) = q$, где $[\ ]$ означает целую часть числа.

2.2. Если множество γ является AB-устранимым, то функция f аналитически продолжима на всю комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ и является рациональной функцией, кратной дивизору $1/\Delta$. Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции G и g удовлетворяют соотношению $g(t) = (1 - G(t))\, f(z(t))$, $t \in \Gamma$, где f – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Если это соотношение выполняется, то функция $F(q) = f(z(q))$ является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть γ является AB-устранимым множеством. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы функции G и g были связаны соотношением $g(t) = (1 - G(t))\, f(z(t))$, $t \in \Gamma$, где f – рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. При этом любое решение задачи (1) имеет вид $F = f \circ z$.*

Из этой теоремы вытекает, что:

1) при $\operatorname{ord}\Delta < 0$ задача (1) имеет решение (равное нулю) только при $g = 0$;

2) если $G = 1$, то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы $g = 0$; при этом число линейно независимых решений задачи (1) равно $\max\{0, \operatorname{ord}\Delta + 1\}$;

3) если $G(t) \not\equiv 1$, то задача (1) не может иметь более одного решения.

2.3. Предположим теперь, что множество γ не является AB-устранимым; при этом его линейная мера будет положительной. Обозначим через Γ_1 кривую на $R^* \supset R$, гомеоморфную $z(\Gamma)$ относительно отображения $z : \Gamma_1 \to z(\Gamma)$. Тогда $\Gamma_2 := j_{R^*}(\Gamma_1)$ тоже гомеоморфна $z(\Gamma)$ относительно отображения z и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = z^{-1}(z(\Gamma))$. Через $\rho_k : z(\Gamma) \to \Gamma_k$, $k = 1, 2$, обозначим гомеоморфизм $z(\Gamma)$ на Γ_k такой, что $z(\rho_k(\xi)) = \xi$ при $\xi \in z(\Gamma)$. Ориентацию на Γ_k выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании $z : R^* \to \overline{\mathbb{C}}$ ориентация на $z(\Gamma)$ совпадала с уже выбранной в п. 1.4.

Доопределим G и g на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, полагая $G(t) = 1$, $g(t) = 0$ в точках t, не принадлежащих Γ. Тогда функция f на $z(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$f^+(\xi) = G(\rho_k(\xi))f^-(\xi) + g(\rho_k(\xi)), \quad \xi \in z(\Gamma), \quad \Delta^{-1}|(f), \quad k = 1, 2. \qquad (2_k)$$

Здесь функции $G(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma),\ z(T))$, где

$$\mu'(z(\tau)) = \begin{cases} \mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) \neq \tau \\ \dfrac{1}{2}\mu, & \tau \in T, \quad j(\tau) = \tau. \end{cases}$$

Функции $g(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\ z(T))$, где

$$\nu(z(\tau)) = \begin{cases} \min\{\lambda(\tau),\ \lambda(j(\tau))\}, & \tau,\ j(\tau) \in T, \quad j(\tau) \neq \tau, \\ \lambda(\tau), & \tau \in T, \quad j(\tau) \notin T, \\ \dfrac{1}{2}\lambda(\tau), & j(\tau) = \tau \in T. \end{cases}$$

Решение задачи (2_k) будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\ z(T))$.

Таким образом, функция f является одновременно решением двух краевых задач Римана на контуре $z(\Gamma)$. Из предположения о том, что каждая компонента множества $R \setminus \Gamma$ имеет род, равный бесконечности, следует, что каждая компонента множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$ содержит бесконечное число проекций точек ветвления накрывающей (R^*, z). На множество $z(\Gamma) \setminus \gamma$ функция f аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \gamma$, за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Поэтому для совпадения решений краевых задач (2_1) и (2_2) достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторых точек $z_k \in \mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$, выбранных по одной в каждой компоненте множества $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

2.4. Если $G \circ j_{R^*} = G$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то, поскольку $F \circ j_{R^*} = F$, для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы $g \circ j_{R^*} = g$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Тогда задачи (2_1) и (2_2) совпадают. Если f – решение задачи (2_k), то $F = f \circ z$ будет решением задачи (1).

Обозначим через $X(z)$ каноническую функцию задачи (2_k), предельные значения которой на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\ z(T))$ и имеющую максимально возможный порядок $\varkappa$ на бесконечности. Тогда при $\varkappa + \operatorname{ord}\Delta \geq -1$ задача

(2_k) разрешима для любой функции $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma,\ T)$, $0<\mu<1$, $-1<\lambda<0$, и ее общее решение имеет вид

$$f(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))\,d\xi}{X^+(\xi)(\xi-z)}+X(z)\delta(z), \tag{3}$$

где δ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$.

При $\varkappa+\operatorname{ord}\Delta<-1$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2_k), а, следовательно, и задачи (1), имеют вид

$$\int\limits_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi)\,d\xi}{X^+(\xi)}=0, \quad j=1,\dots,-\varkappa-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{4}$$

где ω_j – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa+2}$. При выполнении условий (4) задача (2_k) имеет единственное решение вида (3) с $\delta=0$.

Условия (4) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_j=0, \quad j=1,\dots,-\varkappa-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{5}$$

где $\theta_j(t)=(X^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$. Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q)=\frac{X(z(q))}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k}\frac{g(t)\,dz(t)}{X^+(z(t))(z(t)-z(q))}+X(z(q))\delta(z(q)). \tag{6}$$

В формулах (5) и (6) k может принимать любое из значений 1 или 2.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть γ имеет положительную линейную меру и коэффициент G задачи* (1) *удовлетворяет соотношению $G\circ j_{R^*}=G$ на $\Gamma_1\cup\Gamma_2$. Тогда для разрешимости задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функция g удовлетворяла условиям $g\circ j_{R^*}=g$ на $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ и* (5)*. При выполнении этих условий общее решение задачи* (1) *имеет вид* (6)*, где δ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$. Однородная задача* (1) *имеет $l=\max\{0,\operatorname{ord}\Delta+\varkappa+1\}$ линейно независимых решений.*

2.5. Пусть γ – такое же, как в предыдущем пункте. Будем предполагать, что $G\circ j_{R^*}\neq G$. Ясно, что при этом однородная задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция f является решением одновременно двух различных краевых задач Римана (2_1) и (2_2). Обозначим через $X_k(z)$ каноническую функцию (того же класса, что и в п. 2.4) задачи (2_k), $\varkappa_k=\operatorname{ord}_\infty X_k(z)$. При $\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta\geq -1$ задача (2_k) безусловно разрешима и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z)=\frac{X_k(z)}{2\pi i}\int\limits_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))\,d\xi}{X^+{}_k(\xi)(\xi-z)}+X_k(z)\delta_k(z), \tag{7}$$

где $\delta_k(z)$ – произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$.

При $\varkappa_k + \operatorname{ord}\Delta < -1$ для разрешимости задачи (2_k) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int\limits_{z(\Gamma)} \frac{g(\rho_k(\xi))}{X_k^+(\xi)}\,\omega_{kj}(\xi)\,d\xi = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -\varkappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1, \tag{8}$$

где ω_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, -\varkappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1$, – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa_k+2}$. Полагая $\theta_{kj}(t) = \omega_{kj}(z(t))[X^+{}_k(z(t))]^{-1}dz(t)$, условия (8) перепишем в виде

$$\int\limits_{\Gamma\cap\Gamma_k} g\theta_{kj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -\varkappa_k - \operatorname{ord}\Delta - 1, \quad k = 1, 2. \tag{9}$$

При выполнении условий (9) задача (2_k) имеет единственное решение вида (7) с $\delta_k = 0$. Для того чтобы функции f_k определяли решение исходной задачи (1), должно выполняться равенство $f_1 = f_2$. В силу сказанного в п. 2.3 для этого достаточно потребовать выполнения этого равенства в окрестности некоторых точек $z_m \in \mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$, $m = 1, 2, \ldots, l$, принадлежащих различным компонентам множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$, где l – число компонент множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$.

Пусть z_m – точка из $\mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$, в которой функции X_k и f_k голоморфны. Функцию $X_k(z)/2\pi i X^+{}_k(\eta)(\eta - z)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки z_m:

$$\frac{X_k(z)}{2\pi i X^+{}_k(\eta)(\eta - z)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kjm}(\eta)(z - z_m)^j.$$

Пусть δ_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, \varkappa_k + \operatorname{ord}\Delta + 1$, – базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$, $k = 1, 2$. Тогда

$$X_k(z)\delta_k(z) = \sum_{n=1}^{\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{kn}X_k(z)\delta_{kn}(z),$$

где a_{kn} – комплексные числа. Разлагая функции $X_k\delta_{kn}$ в ряд Тейлора, имеем:

$$X_k(z)\delta_{kn}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{knjm}(z - z_m)^j.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций f_1 и f_2, получим соотношения, эквивалентные равенству $f_1 = f_2$:

$$\sum_{n=1}^{\varkappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{1n}a_{1njm} - \sum_{n=1}^{\varkappa_2+\operatorname{ord}\Delta+1} a_{2n}a_{2njm} =$$

$$= -\int\limits_{z(\Gamma)} \left(g(\rho_1(\eta))c_{1jm}(\eta) - g(\rho_2(\eta))c_{2jm}(\eta)\right)d\eta,$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, l. \tag{10}$$

Положим $l_1 = \max\{0, \varkappa_1 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$, $l_2 = \max\{0, \varkappa_2 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1101} & a_{1201} & \dots & a_{1l_101} & -a_{2101} & -a_{2201} & \dots & -a_{2l_201} \\ a_{1102} & a_{1202} & \dots & a_{1l_102} & -a_{2102} & -a_{2202} & \dots & -a_{2l_202} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{110l} & a_{120l} & \dots & a_{1l_10l} & -a_{210l} & -a_{220l} & \dots & -a_{2l_20l} \\ a_{1111} & a_{1211} & \dots & a_{1l_111} & -a_{2111} & -a_{2211} & \dots & -a_{2l_211} \\ a_{1112} & a_{1212} & \dots & a_{1l_112} & -a_{2112} & -a_{2212} & \dots & -a_{2l_212} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{111l} & a_{121l} & \dots & a_{1l_11l} & -a_{211l} & -a_{221l} & \dots & -a_{2l_21l} \\ a_{1121} & a_{1221} & \dots & a_{1l_121} & -a_{2121} & -a_{2221} & \dots & -a_{2l_221} \\ a_{1122} & a_{1222} & \dots & a_{1l_122} & -a_{2122} & -a_{2222} & \dots & -a_{2l_222} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{112l} & a_{122l} & \dots & a_{1l_12l} & -a_{212l} & -a_{222l} & \dots & -a_{2l_22l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{jm}(t) = \begin{cases} -c_{1jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_1, \\ c_{2jm}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_2, \end{cases}$$

$$\alpha(t) = (\alpha_{01}(t), \dots, \alpha_{0l}(t),\ \alpha_{11}(t), \dots, \alpha_{1l}(t), \alpha_{21}(t), \dots, \alpha_{2l}(t), \dots)^t =: (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots)^t,$$

$$a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1l_1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2l_2})^t.$$

Тогда система (10) запишется в виде

$$Aa = \int\limits_{\Gamma} g\alpha. \tag{11}$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг r матрицы A должен быть равен числу неизвестных a_{kn}, то есть $r = \max\{0, \varkappa_1 + \operatorname{ord}\Delta + 1\} + \max\{0, \varkappa_2 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$.

Пусть B – невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из строк матрицы A с номерами $j_1,\ j_2, \dots, j_r$ $(j_1 < j_2 < \dots < j_r)$, B_j – квадратная матрица порядка $r+1$, составленная из $r+1$ строк расширенной матрицы $\left(A, \int\limits_{\Gamma} g\alpha\right)$ с номерами $j_1,\ j_2, \dots, j_r,\ j$. Тогда

$$\det B_j = \int\limits_{\Gamma} g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{r} B_{j,j_n}\alpha_{j_n} + B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_{\Gamma} g\alpha_k$ матрицы B_j; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1,\ j_2, \dots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (10) (или (11)) имеют вид

$$\int\limits_{\Gamma} g\beta_j = 0, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_r. \tag{12}$$

Совокупность условий (9) и (12) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством $F(q) = f_k(z(q))$, где функция $f_1 = f_2$ определена формулой (7). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* γ *имеет положительную линейную меру и коэффициент* G *задачи* (1) *удовлетворяет неравенству* $G(j_{R^*}(t)) \not\equiv G(t)$, $t \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. *Тогда для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (9) *и* (12). *При их выполнении задача* (1) *имеет единственное решение, определяемое равенством* $F = f_k \circ z$, *где совпадающие между собой функции* f_k, $k = 1, 2$, *определяются равенством* (7).

3. Случай произвольного кусочно-гладкого контура

Пусть теперь Γ – произвольный кусочно-гладкий контур на R, определенный в п. 1.4.

3.1. Обозначим через E область на R, обладающую следующими свойствами:

1) род области E конечен;

2) все компоненты множества $R \setminus E$ имеют род, равный бесконечности;

3) $E \supset \Gamma$;

4) относительная граница ∂E множества E состоит из конечного и четного числа компонент, каждая из которых есть аналитическая дуга, гомеоморфная окружности и отображающаяся взаимнооднозначно в $\mathbb{C}$ функцией $z : R \to \mathbb{C}$;

5) ∂E не содержит точек ветвления накрывающей (R, z);

6) над каждой компонентой множества $z(\partial E)$ лежат две компоненты ∂E.

Пусть $\overline{E^*} = E^* \bigcup \partial E^*$ $(\subset R^*)$ – компактная риманова поверхность с краем такая, что E конформно эквивалентна области (которую мы отождествим с E) на E^*, причем $\partial E^* = \partial E$ и множество $E^* \setminus E$ является AB-устранимым. Для римановой поверхности $R \in O_{A^0B}$ такая поверхность E^* существует согласно предложению 1.

В силу AB-устранимости множества $E^* \setminus E$ функцию z можно аналитически продолжить в E^*. Таким образом, (E^*, z) становится безграничной двулистной накрывающей для области $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$. Множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{z(E^*)}$ состоит из конечного числа $m \geq 1$ односвязных областей, число которых совпадает с числом компонент множества $R \setminus E$. Образуем гиперэллиптическую поверхность $S \supset \overline{E^*}$, которая получается приклеиванием к каждой компоненте ∂E^* соответствующей компоненты множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$; при этом каждая компонента множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus z(E^*)$ берется в двух экземплярах и приклеивается к двум компонентам ∂E^*, имеющим одинаковую проекцию, причем точка $p \in \partial E^*$ отождествляется с соответствующей точкой $z(p) \in \partial(z(E^*))$.

Обозначим через α_k, $k = 1, 2, \ldots, 2h + 2$, $0 \leq h < \infty$, точки ветвления накрывающей (E^*, z), где h – род области E^*. Тогда (S, z) есть гиперэллиптическая поверхность рода h, определяемая уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k), \tag{13}$$

где $r_k = z(\alpha_k)$. Через E_0 обозначим область на S, являющуюся полным прообразом области $z(E^*) \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно отображения $z : S \to \overline{\mathbb{C}}$. Ясно, что E_0 содержит все точки ветвления накрывающей (S, z) и существует конформный гомеоморфизм $\alpha : E_0 \to E^*$ такой, что $z \circ \alpha = z$ и $\alpha \circ j_S = j_{R^*} \circ \alpha$. Множество $S \setminus \overline{E}_0$

состоит из $2m$ односвязных компонент E_1^i и E_2^i, $i=1,\ 2,\dots,m$, причем $j_S(E_1^i)= E_2^i$, $j_S(E_2^i)=E_1^i$. Отображение $z: E_k^i\to\overline{\mathbb{C}}$, $k=1,\ 2$, $i=1,2,\dots,m$, однолистно и конформно; обратное к нему отображение обозначим через $\rho_k^i: z(E_k^i)\to E_k^i$. Очевидно, $\rho_2^i=j_S\circ\rho_1^i$, $\rho_1^i=j_S\circ\rho_2^i$, $i=1,2,\dots,m$.

Положим $\Gamma_0=\alpha^{-1}(\Gamma)$ и определим на Γ_0 ориентацию, индуцированную отображением $\alpha^{-1}:\Gamma\to\Gamma_0$. Пусть F – решение задачи Римана (1). Эта функция аналитически продолжима в $R^*\setminus\Gamma$. Легко видеть, что $F\circ j_{R^*}=F$ в $R^*\setminus E^*$. Поэтому на S определена однозначная кусочно-мероморфная функция

$$F_0(q)=\begin{cases}F(\alpha(q)), & q\in E_0,\\ F(p),\ z(p)=z(q), & q\in S\setminus E_0,\ p\in R^*\setminus E^*,\end{cases}$$

с линией скачков Γ_0. Определим на S дивизор D_0, полагая

$$\operatorname{ord}_q D_0=\begin{cases}\operatorname{ord}_{\alpha(q)}D, & q\in E_0,\\ \min\left\{\operatorname{ord}_p D,\operatorname{ord}_{j_{R^*}(p)}D\right\},\ z(p)=z(q), & q\in S\setminus E_0,\ p\in R^*\setminus E^*,\ j_{R^*}(p)\neq p,\\ \left[\dfrac{1}{2}\operatorname{ord}_p D\right],\ z(p)=z(q), & q\in S\setminus E_0,\ p\in R^*\setminus E^*,\ j_{R^*}(p)=p.\end{cases}$$

Положим $T_0=\alpha^{-1}(T)$ и доопределим на T_0 функцию λ, полагая $\lambda|_{T_0}=\lambda\circ\alpha|_{T_0}$. Функция F_0 мероморфна в $S\setminus\Gamma_0$, кратна дивизору $1/D_0$, а ее предельные значения на Γ_0 принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,\ T_0)$ и удовлетворяют соотношению

$$F_0^+(t)=G(\alpha(t))F_0^-(t)+g(\alpha(t)),\quad t\in\Gamma_0. \tag{14}$$

Кроме того, в $S\setminus E_0$ она удовлетворяет соотношению

$$F_0\circ j_S=F_0. \tag{15}$$

Функции $G\circ\alpha$ и $g\circ\alpha$ принадлежат классам $H_{\mu,(\mu)}(\Gamma_0,\ T_0)$ и $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,\ T_0)$ соответственно.

Существует взаимнооднозначное соответствие между точками q поверхности S и парами чисел $(z,w)=(z(q),w(z(q)))$, связанными соотношением (13). Точку q обычно отождествляют с парой (z,w). Тогда точке $j_S(q)$ соответствует пара $(z,-w)$. Точке ветвления α_k соответствует пара $(r_k,0)$.

Выберем на S канонические циклы $\{a_k,\ b_k\}$, $k=1,2,\dots,h$, как в статье [4]. Обозначим через φ_j, $j=1,2,\dots,h$, комплексно нормированный (относительно выбранных циклов) базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на S и через ω_{qq_0} – нормированный абелев интеграл третьего рода, служащий разрывным аналогом ядра Коши (см. [3, 4]).

Положим

$$X(q)=\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t)\right),\quad q\in S.$$

Нули и бесконечности функции $X(q)$ образуют квазидивизор $(X)=\tau_1^{\varkappa_1}\tau_2^{\varkappa_2}\cdots\tau_r^{\varkappa_r}$, где $\tau_k=\alpha^{-1}(t_k)$, $t_k\in T$, – узлы линии Γ_0, $\varkappa_k$ – числа, определяемые коэффициентом G и выбором ветви функции $\ln G(\alpha(t))$ (см. [4]). Положим $\varkappa=\sum\limits_{k=1}^{r}[\varkappa_k-\lambda(\tau_k)]$, где $[\ ]$ означает целую часть числа. Число $\varkappa$, не зависящее от выбора ветви $\ln G\circ\alpha$, назовем индексом коэффициента задачи (14) в классе $H_{\mu,\lambda}(\Gamma_0,T_0)$. Положим $A= t_1^{[\varkappa_1-\lambda(\tau_1)]}t_2^{[\varkappa_2-\lambda(\tau_2)]}\cdots t_r^{[\varkappa_r-\lambda(\tau_r)]}$, $B=(q')^h q_1^{-1}\cdots q_h^{-1}$, где $q'\in S$ – произвольно фиксированная точка, не совпадающая с q_0, точки $q_1, q_2, \ldots, q_h$ образуют решение проблемы обращения Якоби вида:

$$\sum_{j=1}^{h} \int_{q'}^{q_j} \varphi_\nu \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t)) \varphi_\nu(t) \text{ (по модулю периодов)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h.$$

Тогда общее решение однородной задачи Римана (14) имеет вид

$$f(q) \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^{h}\left(\int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^{q} \varphi_j\right)\right), \tag{16}$$

где в последних двух интегралах путь интегрирования не пересекает канонических сечений $a_1, a_2, \ldots, a_h$, m_j – вполне определенные целые числа, f – произвольная мероморфная функция, кратная дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. У функции ω_{qq_0} (по переменной q) выбрана фиксированная в $S \setminus \cup_{k=1}^{h} a_k$ ветвь, исчезающая в точке q_0.

Обозначим через l_0 и l_0' число линейно независимых мероморфных функций и дифференциалов на S, кратных соответственно дивизорам $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$ и D_0AB. Через P обозначим целый дивизор порядка l_0' с носителем в $S \setminus \Gamma_0$ такой, что не существует абелевых дифференциалов на S, кратных дивизору D_0ABP и отличных от тождественного нуля. Для построения решения неоднородной задачи (14) найдем сначала частное решение этой задачи в классе функций, кратных дивизору $D_0^{-1}P^{-1}$. Такая задача безусловно разрешима в силу выбора дивизора P. Ее частным решением является функция вида (см. [4])

$$\frac{X_0(q)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t,q), \tag{17}$$

где X_0 – функция вида (16) при $f = 1$, $A_1(t,q)$ – мероморфный аналог ядра Коши на S с характеристическим дивизором Δ_1, который получается делением дивизора D_0ABP на некоторый целый дивизор. Функция (17) будет решением задачи (14) в том и только в том случае, если g удовлетворяет l_0' условиям, обеспечивающим кратность функции (17) дивизору D^{-1}. Эти условия равносильны условиям разрешимости задачи (14) и имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} g \circ \alpha \frac{\psi_j}{X_0} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l_0', \tag{18}$$

где ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, l_0'$, – базис пространства абелевых дифференциалов на S, кратных дивизору D_0AB.

При выполнении условия (18) общее решение задачи (14) имеет вид

$$F_0(q) = f(q) \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \ln G(\alpha(t))\omega_{qq_0}(t) - \sum_{j=1}^{h}\left(\int_{q'}^{q_j} \omega_{qq_0} - 2\pi i m_j \int_{q'}^{q} \varphi_j\right)\right) +$$
$$+ \frac{X_0(q)}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)} A_1(t,q), \quad q \in S. \tag{19}$$

Для того чтобы эта функция определяла решение задачи (14), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию (15).

Обозначим через $f_1,\ f_2,\dots,f_{l_0}$ базис пространства мероморфных функций на S, кратных дивизору $D_0^{-1}A^{-1}B^{-1}$. Тогда функция F_0 может быть записана в виде

$$F_0(q)=X_0(q)\sum_{k=1}^{l_0}c_kf_k(q)+\frac{X_0(q)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{g(\alpha(t))}{X_0^+(t)}\,A_1(t,q),\tag{20}$$

где c_k – произвольные комплексные числа.

В каждой компоненте множества $S\setminus\overline{E}_0$ выберем точку $s_j,\ j=1,2,\dots,m$, такую, что $z(s_j)\neq\infty$ и функции $X_0(q),\ f_k(q),\ A_1(t,q)$ голоморфны по q в точках s_j и $j_S(s_j)$. Разложим функции X_0f_k и $(X_0f_k)\circ j_S$ в ряд Тейлора по степеням $z(q)-z(s_j)$:

$$X_0(q)f_k(q)=\sum_{i=0}^{\infty}a_{jik}(z(q)-z(s_j))^i,\quad X_0(j_S(q))f_k(j_S(q))=\sum_{i=0}^{\infty}b_{jik}(z(q)-z(s_j))^i.$$

Аналогично в окрестности точки $q=s_j$ имеем:

$$\frac{X_0(q)A_1(t,q)}{2\pi iX_0^+(t)}=\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{ji}(t)(z(q)-z(s_j))^i,$$

$$\frac{X_0(j_S(q))A_1(t,j_S(q))}{2\pi iX_0^+(t)}=\sum_{i=0}^{\infty}\delta_{ji}(t)(z(q)-z(s_j))^i.$$

В силу этих разложений равенство (15) равносильно следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{l_0}(a_{jik}-b_{jik})c_k=-\int\limits_{\Gamma_0}g(\alpha(t))(\gamma_{ji}(t)-\delta_{ji}(t)),\quad j=1,2,\dots,m,\quad i=0,1,2,\dots\tag{21}$$

Полагая

$$U=\begin{pmatrix}
a_{101}-b_{101} & a_{102}-b_{102} & \dots & a_{10l_0}-b_{10l_0}\\
a_{201}-b_{201} & a_{202}-b_{202} & \dots & a_{20l_0}-b_{20l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m01}-b_{m01} & a_{m02}-b_{m02} & \dots & a_{m0l_0}-b_{m0l_0}\\
a_{111}-b_{111} & a_{112}-b_{112} & \dots & a_{11l_0}-b_{11l_0}\\
a_{211}-b_{211} & a_{212}-b_{212} & \dots & a_{21l_0}-b_{21l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m11}-b_{m11} & a_{m12}-b_{m12} & \dots & a_{m1l_0}-b_{m1l_0}\\
a_{121}-b_{121} & a_{122}-b_{122} & \dots & a_{12l_0}-b_{12l_0}\\
a_{221}-b_{221} & a_{222}-b_{222} & \dots & a_{22l_0}-b_{22l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m21}-b_{m21} & a_{m22}-b_{m22} & \dots & a_{m2l_0}-b_{m2l_0}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots
\end{pmatrix},$$

$\beta_{ji}=-(\gamma_{ji}-\delta_{ji})\circ\alpha^{-1},\ \beta=(\beta_{10},\beta_{20},\dots,\beta_{m0},\beta_{11},\beta_{21},\dots,\beta_{m1},\beta_{12},\beta_{22},\dots,\beta_{m2},\dots)^t=$ $=:(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\dots)^t,\ c=(c_1,\ c_2,\dots,c_{l_0})^t$, перепишем систему (21) в виде

$$Uc=\int\limits_{\Gamma}g\beta.\tag{22}$$

Обозначим через r ранг матрицы U. Пусть V – невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из элементов матрицы U, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_r$ $(k_1 < k_2 < \cdots < k_r)$, V_i – квадратная матрица порядка $r+1$, состоящая из элементов расширенной матрицы $\left(U, \int\limits_{\Gamma} g\beta\right)$, стоящих на пересечении строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r, i$ и столбцов с номерами $k_1, k_2, \ldots, k_r, l_0+1$. Тогда

$$\det V_i = \int\limits_{\Gamma} g\lambda_i,$$

где

$$\lambda_i = \sum_{n=1}^{r} V_{i,i_n}\, \beta_{i_n} + V_{i,i}\beta_i,$$

$V_{i,j}$ – алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_{\Gamma} g\beta_j$ матрицы V_i, $V_{i,i} = \det V$, $\lambda_i = 0$ при $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$. Условия разрешимости системы (22) имеют вид

$$\int\limits_{\Gamma} g\lambda_i = 0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad i \neq i_1, i_2, \ldots, i_r. \tag{23}$$

При выполнении условий (23) величины $c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_r}$ выражаются линейно через $\int\limits_{\Gamma} g\beta_i$, $i = i_1, i_2, \ldots, i_r$, то есть являются ограниченными линейными функционалами от функции g в пространстве $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, а остальные числа c_k остаются произвольными.

Условия (18) перепишем в виде

$$\int\limits_{\Gamma} g\frac{\psi_j \circ \alpha^{-1}}{X_0 \circ \alpha^{-1}} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l_0'. \tag{24}$$

Если функция g удовлетворяет условиям (23) и (24), то функция F_0, задаваемая соотношением (20), определяет решение F задачи (1) по формуле

$$F(q) = \begin{cases} F_0(\alpha^{-1}(q)), & q \in E, \\ F_0(p),\ z(p) = z(q), & q \in R \setminus E, \quad p \in S \setminus E_0. \end{cases} \tag{25}$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (23) *и* (24)*. При их выполнении решение задачи определяется равенствами* (20) *и* (25)*, причем в равенстве* (20) r *величины среди* c_k *являются линейными ограниченными функционалами от* $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$*, а остальные – произвольными. Однородная задача Римана* (1) *имеет* $l_0 - r$ *линейно независимых решений.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 09-01-12188-офи_м).

Summary

N.A. Barieva, I.A. Bikchantaev. Riemann Problem on a Two-sheeted Surface of a Class O_{A^0B}.

Solvability conditions and explicit solution of the Riemann boundary value problem were derived by I.A. Bikchantaev on the case of ultrahyperelliptic surface (Riemann problem on ultrahyperelliptic surface // Russian Math. – 2000. – V. 44, No 2. – P. 17–29). The present paper generalizes the last result on the case of two-sheeted Riemann surface of the class O_{A^0B}.

Key words: boundary value problems, Riemann surfaces.

Литература

1. *Sario L., Nakai M.* Classification theory of open Riemann surfaces. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970. – 446 p.
2. *Солдатов А.П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. – М.: Высш. шк., 1991. – 208 с.
3. *Бикчантаев И.А.* Задача Римана на ультрагиперэллиптической поверхности // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 2. – С. 19–31.
4. *Зверович Э.И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Усп. матем. наук. – 1971. Т. 26, № 1. – С. 113–179.

Поступила в редакцию
30.01.09

Бариева Наиля Ахмедовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

Бикчантаев Ильдар Ахмедович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *ibikchan@ksu.ru*