ФГАОУВПО
« Казанский (Приволжский) федеральный университет»

В.А.Сочнева

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

Методическое пособие

Казань
2014

Печатается по решению Учебно-методической Комиссии Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского Протокол №2 от ноября 2014г.

Автор:
В.А.Сочнева

Рецензент
канд.физ.мат. наук, доцент КФУ Р.А.Даишев

Сочнева В.А. Введение в математическую физику: методическое пособие – Казань: Казанский университет , 2014 – 27 стр.

Учебно-методическое пособие представляет собой в основном пособие по решению задач по курсу математической физики для студентов специальности «геофизика». Содержание согласовано с конспектом курса лекций по уравнениям математической физики (Широкова Е.А., Сочнева В.А.,изд. КФУ, 2010г.). В пособии приводятся подробные решения основных типовых задач, более 50 задач предлагается для самостоятельного решения.

ВВЕДЕНИЕ.

Математическое описание многих физических процессов приводит к различным дифференциальным уравнениям. Ещё в средней школе известно, что движение точки по прямой под действием силы F определяется законом Ньютона $F = ma$, где a – ускорение, т. е. скорость изменения скорости. Если обозначить $x(t)$ путь точки на момент t, то скорость точки $v(t) = x'(t)$, а ускорение $a(t) = v'(t) = x''(t)$. Следовательно, закон движения задаётся уравнением $x''(t) = \dfrac{F}{m}$ – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Если рассмотреть более сложный пример – процесс распространения тепла в стержне длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, предполагая, что температура $U(x,t)$ меняется от левого конца $x = 0$ до правого $x = l$ в зависимости от времени t, то можно показать, что функция $U(x,t)$ удовлетворяет уравнению $U'_t(x,t) = a^2 U''_{xx}(x,t) + F(x,t)$ – это уже уравнение в частных производных, но тоже второго порядка. Множество процессов, связанных с колебаниями (механическими, электрическими и др.) сводится к другому уравнению в частных производных второго порядка $U''_{tt}(x,t) = a^2 U''_{xx}(x,t) + F(x,t)$, где $U(x,t)$ – отклонение от положения равновесия точки М с абсциссой x в момент времени t, (в случае механических колебаний), или значение переменного напряжения в электрической цепи в точке М(x) в момент времени t. Если точка $M \in R^3$, т.е. M=M(x,y,z), то $U''_{tt}(x,y,z,t) = a^2(U''_{xx}(x,y,z,t) + U''_{yy}(x,y,z,t) + U''_{zz}(x,y,z,t)) + F(x,y,z,t)$.

Уравнения в частных производных второго порядка, линейные относительно старших производных, принято называть уравнениями математической физики. Изучение методов решения и исследования этих уравнений является основой для перехода к более сложным задачам. Общий вид такого уравнения для случая двух переменных выглядит так $a_{11}(x,y)U''_{xx}(x,y) + 2a_{12}(x,y)U''_{xy}(x,y) + a_{22}(x,y)U''_{yy}(x,y) = F(x,y,U,U'_x,U'_y)$.(1)

Для решения простейших уравнений такого вида достаточно здравого смысла и умения вычислять стандартные интегралы. Например, уравнение $U''_{xy}(x,y) = 3x^2 + 1$ можно проинтегрировать по $x \Rightarrow U'_y(x,y) = x^3 + x + C(y)$, здесь $C(y)$ – произвольная функция, не зависящая от x. Интегрируя полученное выражение по y, находим $U(x,y) = (x^3 + x) \cdot y + C_1(y) + C_2(x)$. Здесь $C_1(y)$ – это интеграл от произвольной функции, т.е. тоже – произвольная функция, а $C_2(x)$ – произвольная функция, возникшая при втором интегрировании. Таким образом, в решение этого уравнения второго порядка в частных производных входят две произвольные функции. (Для сравнения: в общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка входят две произвольные постоянные).

Упражнения.

Записать общие решения следующих уравнений:

1.$U''_{xx}=0$ 2.$U''_{yy}=6y$ 3.$U''_{xy}+U'_{x}=0$ 4.$U''_{yy}+2U'_{y}=0$ 5.$U''_{xy}-3U'_{y}=x+y$.

Ответы. 1.$U(x,y)=C(y)\cdot x+C_1(y)$ 2.$U(x,y)=y^3+C(x)\cdot y+C_1(x)$

3.$U(x,y)=C_1(x)\cdot e^{-y}+C_2(y)$ 4.$U(x,y)=C_1(x)\cdot e^{-2y}+C_2(x)$

5.$U(x,y)=C_1(y)\cdot e^{3x}+C_2(x)-\dfrac{y}{9}-\dfrac{y^2}{6}-\dfrac{xy}{3}$.

$1.ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ, КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Если в уравнении (1) сделать подходящую замену переменных, то оказывается, что его «главную часть», т.е. группу слагаемых, содержащих производные второго порядка, можно упростить, приведя его к так называемому ***каноническому*** виду. Причём по виду этого упрощения уравнение можно отнести лишь к одному из трёх типов: гиперболическому, параболическому, или эллиптическому (аналогично типам кривых второго порядка в курсе аналитической геометрии). Процесс приведения уравнения к каноническому виду выглядит следующим образом.

Для уравнения (1) составляют «***характеристическое уравнение»:***

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dydx+a_{22}dx^2=0,\text{ или }a_{11}y'^2-2a_{12}y'+a_{22}=0 \qquad (2)$$

При решении этого уравнения могут представиться три случая.

1) Если это квадратное относительно y' уравнение имеет два вещественных корня $\lambda_1(x,y)=a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}$ и $\lambda_2(x,y)=a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}$, то интегрируют два уравнения $y'=\lambda_1(x,y)$ *и* $y'=\lambda_2(x,y)$, находят два семейства линий $\varphi(x,y)=C$ *и* $\psi(x,y)=C$, называемых ***характеристиками*** уравнения, а затем принимают найденные функции $\varphi(x,y)$ *и* $\psi(x,y)$ за новые переменные. Уравнение, относящееся в данном случае к ***гиперболическому типу,*** упрощается.

Рассмотрим простой пример выполнения указанных действий.

***Пример* 1**: привести к каноническому виду уравнение $U''_{xx}+2U''_{xy}-3U''_{yy}=0$.

– составим характеристическое уравнение: $dy^2-2dxdy-3dx^2=0$, откуда $y'=1+\sqrt{1+3}=3$ *и* $y'=1-\sqrt{4}=-1$;

– интегрируя эти уравнения, находим $y-3x=C$ *и* $y+x=C$;

– примем за новые переменные $\xi=y-3x$ *и* $\eta=y+x$, тогда

$$U'_x=U'_\xi\cdot\xi'_x+U'_\eta\cdot\eta'_x=-3U'_\xi+U'_\eta$$

$$U'_y=U'_\xi+U'_\eta$$

$$U''_{xx} = U''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + 2U''_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \cdot \eta'_x + U''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 = 9U''_{\xi\xi} - 6U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta}$$
$$U''_{xy} = -3U''_{\xi\xi} - 2U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta}$$
$$U''_{yy} = U''_{\xi\xi} + 2U''_{\xi\eta} + U''_{\eta\eta}.$$

Подставляя найденные значения вторых производных в исходное уравнение, получим $-16U''_{\xi\eta} = 0$. Уравнение легко решается:

$$U = C_1(\xi) + C_2(\eta) = C_1(y - 3x) + C_2(y + x)$$

2) В случае, когда дискриминант уравнения (2) равен нулю и, следовательно, характеристическое уравнение имеет только один (двукратный) корень $\lambda(x, y)$, уравнение (1) относится к ***параболическому типу.*** В этом случае интеграл уравнения $y' = \lambda(x, y)$ принимают за одну новую переменную, а в качестве второй берётся любая функция (при условии, что новые переменные являются независимыми функциями). При этом в преобразованном уравнении в группе слагаемых, содержащих старшие производные, остаётся только слагаемое с $U''_{\eta\eta}$. В частности, к параболическому типу принадлежит приводившееся во введении уравнение теплопроводности: $U'_t = a^2 U''_{xx}$.

3)Если же дискриминант уравнения (2) отрицателен, то интегралы уравнения характеристик будут комплексно – сопряжёнными. В этом случае за новые переменные берутся вещественная и мнимая части этих интегралов; уравнение приводится к виду $U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0$ и относится к ***эллиптическому типу.*** Рассмотрим соответствующие примеры: ***Пример* 2:** уравнение $U''_{xx} - 2U''_{xy} + U''_{yy} + U'_x - U'_y = 0$ – параболического типа, здесь $\lambda(x, y) = -1$, следовательно, за ξ принимается интеграл уравнения $y' = -1$ т.е. $\xi = x + y$. В качестве второй независимой переменной можно взять, например, y, т.е. $\eta = y$. После замены получим $U''_{\eta\eta} - U'_\eta = 0$. Для уравнения эллиптического типа – ***Пример* 3**: $U''_{xx} + 4U''_{xy} + 5U''_{yy} + U'_x + 2U'_y = ($ получаем комплексные значения $\lambda(x, y) = 2 + i$ *и* $\lambda(x, y) = 2 - i$. Интеграл уравнения $y' = \lambda(x, y)$ имеет вид $y - 2x + ix = C$. Вещественная часть $y - 2x = \xi$, мнимая часть $x = \eta$. После замены получим $U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + U'_\eta = 0$.

Упражнения.

В уравнениях в частных производных первого порядка выполнить замену переменных, найти решения

6. $U'_x = U'_y; \quad \xi = x + y, \eta = x - y$

7. $yU'_x - xU'_y = 0; \quad \xi = x, \eta = x^2 + y^2$

8. $xU'_x + yU'_y = U; \quad \xi = x, \eta = \dfrac{y}{x}$

Привести к каноническому виду уравнения второго порядка

9. $U''_{xx} + 2U''_{xy} + U''_{yy} + U'_x + U'_y = 0$

$10. U''_{xx} - 2\cos x \cdot U''_{xy} - (3 + \sin^2 x)U''_{yy} - yU'_y = 0$

$11. \; y^2 U''_{xx} + 2xyU''_{xy} + 2x^2 U''_{yy} + yU'_y = 0$

$12. \; tg^2 x \cdot U''_{xx} - 2y \cdot tgx \cdot U''_{xy} + y^2 U''_{yy} + tg^3 x \cdot U'_x = 0$

$13. \sin^2 x \cdot U''_{xx} - 2y \cdot \sin x \cdot U''_{xy} + y^2 U''_{yy} = 0$

Ответы.

6. $U(x, y) = \varphi(x + y)$ 7. $U(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$ 8. $U(x, y) = x \cdot \varphi(\frac{y}{x})$

9. $U''_{\eta\eta} + U'_\eta = 0; \quad \xi = x - y, \eta = y$

10. $U''_{\xi\eta} + \frac{\eta - \xi}{32}(U'_\xi - U'_\eta) = 0; \xi = 2x + \sin x + y, \eta = 2x - \sin x - y$

11. $U''_{\xi\xi} + U''_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi - \eta}U'_\xi + \frac{1}{2\eta}U'_\eta = 0; \xi = x^2 - y^2, \eta = x^2$

12. $U''_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}U'_\xi = 0; \quad \xi = y \cdot \sin x, \eta = y$

13. $U''_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2}U'_\xi = 0; \quad \xi = y \cdot tg\frac{x}{2}, \eta = y$.

.

$2. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК.

Если после приведения уравнения к каноническому виду (см. *пример 1*, разобранный в $1) получается хорошо решаемое уравнение, то говорят, что уравнение решается ***методом характеристик.*** Решение, содержащее 2 произвольные функции, является ***общим решением.*** Для следующих уравнений предлагается выполнить действия, аналогичные приведённым в *примере* 1.

Упражнения. Привести к каноническому виду и найти общие решения.

14. $U''_{xx} - 2\sin x \cdot U''_{xy} - \cos^2 x \cdot U''_{yy} - \cos x \cdot U'_y = 0$

15. $x^2 U''_{xx} - 2xyU''_{xy} + y^2 U''_{yy} + xU'_x + yU'_y = 0$

16. $xU''_{xx} - yU''_{yy} + \frac{1}{2}\left(U'_x - U'_y\right) = 0; \quad (x > 0, y > 0)$

17. $U''_{xx} - 4U''_{xy} + 4U''_{yy} + 3U'_x - 6U'_y = 0$

18. $4U''_{xx} - 4U''_{xy} + U''_{yy} - 10U'_x + 5U'_y = 0$

19. $x^2 U''_{xx} - 2xyU''_{xy} - 3y^2 U''_{yy} = 0$

Если после приведения уравнения к каноническому виду там остаются слагаемые с младшими производными, то их можно удалить, сделав замену $U(x, y) = e^{\lambda x + \mu y} \cdot V(x, y)$, а затем выбрав значения параметров λ и μ так, чтобы коэффициенты при соответствующих слагаемых обратились в нули.

Рассмотрим ***пример* 3**: $U''_{xy}+2U'_x+3U'_y+6U=0$.

Положим $U(x,y)=e^{\lambda x+\mu y}\cdot V(x,y)$, тогда

$U'_x=e^{\lambda x+\mu y}(\lambda\cdot V+V'_x);U'_y=e^{\lambda x+\mu y}(\mu\cdot V+V'_y);U''_{xy}=e^{\lambda x+\mu y}(\lambda\mu V+\lambda V'_y+\mu V'_x+V''_{xy})$.

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим:

$e^{\lambda x+\mu y}\left[V(6+2\lambda+3\mu+\mu\lambda)+V'_x(2+\mu)+V'_y(3+\lambda)+V''_{xy}\right]=0$. При $\lambda=-3,\ \mu=-2$ уравнение принимает вид $V''_{xy}=0$, откуда следует :

$V=\varphi(x)+\psi(y)$ и $U(x,y)=e^{-3x-2y}(\varphi(x)+\psi(y))$, где

$\varphi(x)$ и $\psi(y)$ - произвольные функции.

Упражнения. Найти общие решения.

20. $6U''_{xy}-3U'_x+2U'_y-U=0$

21. $U''_{xx}-6U'_x+9U=0$

22. $2U''_{xy}-U'_x+3U'_y-1{,}5U=0$

23. $U''_{yy}+2U'_y+U=0$

Если для уравнения в частных производных требуется найти не самое общее, а конкретное частное решение, то на произвольные функции, входящие в общее решение, накладывают дополнительные условия. В зависимости от вида этих условий различают решаемые для данного уравнения задачи. В частности, для уравнений гиперболического типа одной из важных задач является ***задача Коши,*** или задача с начальными условиями. Она состоит в следующем: требуется найти функцию $U(x,y)$, удовлетворяющую данному уравнению и ***начальным условиям*** : $U(x,0)=\varphi(x),U'_y(x,0)=\psi(x)$, причём $x\in(-\infty,\infty)$, а переменная *y* играет роль времени и *начальный момент* – это значит *y* = 0.

***Пример* 4.**

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения $U''_{xx}+2U''_{xy}-3U''_{yy}=0$, приведённого в *примере* 1, где было получено общее решение $U=C_1(y-3x)+C_2(y+x)$. Пусть теперь требуется найти решение уравнения, которое

удовлетворяет условиям: $U(x,0)=6x+1,U'_y(x,0)=2$. Это и будут *начальные условия*. Оказывается, что выполнение этих условий однозначно определяет функции C_1 и C_2. Действительно, положим y = 0 в общем решении $U(x,y)$ и в производной от него по *y* :

$$\begin{cases}C_1(-3x)+C_2(x)=6x+1\\ C'_1(-3x)+C'_2(x)=2\end{cases}.$$

Полученная система функциональных уравнений решается следующим образом: интегрируем второе уравнение системы по *x*: $-\dfrac{1}{3}C_1(-3x)+C_2(x)=2x+C$ (С здесь – постоянная интегрирования); затем вычитаем полученное уравнение из первого, исключая $C_2(x)$, находим: $\frac{4}{3}C_1(-3x)=4x+1-C$, или $C_1(-3x)=3x+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}C.$

Подставляя это значение в первое уравнение системы, находим $C_2(x)=3x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}C$.

Заменим теперь в аргументе C_1 значение $-3x$ на $y-3x$. а для C_2 заменим x на $y+x$:

$U(x,y)=-(y-3x)+\frac{3}{4}-\frac{3C}{4}+3(y+x)+\frac{1}{4}+\frac{3C}{4}=6x+2y+1.$ Это и является решением задачи Коши. Заметим, что в процессе решения постоянная интегрирования исчезает.

Упражнения. Найти решения задачи Коши для следующих уравнений :

24. $10U''_{xx}+9U''_{xy}+2U''_{yy}=0;\quad U(x,0)=3x, U'_y(x,0)=x+2$
25. $2U''_{xx}+5U''_{xy}+2U''_{yy}=0;\quad U(x,0)=1+x, U'_y(x,0)=2$
26. $6U''_{xx}-7U''_{xy}+2U''_{yy}=0; U(x,0)=x^2, U'_y(x,0)=1$
27. $U''_{xx}-U''_{xy}-2U''_{yy}=0; U(x,0)=2x+1, U'_y(x,0)=4x$
28. $U''_{xx}+5U''_{xy}+4U''_{yy}=0; U(x,0)=2x, U'_y(x,0)=x+1$
29. $2U''_{xx}+7U''_{xy}+6U''_{yy}=0; U(x,0)=1-x^2, U'_y(x,0)=1$
30. $4y^2U''_{xx}+2(1-y^2)U''_{xy}-U''_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2U'_x-U'_y)=0; U(x,0)=3x, U'_y(x,0)=4$

Ответы.

14. $U(x,y)=\varphi(x+y-\cos x)+\psi(x-y+\cos x)$
15. $U(x,y)=\varphi(x\cdot y)\ln y+\psi(x\cdot y)$
16. $U(x,y)=\varphi(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\psi(\sqrt{x}+\sqrt{y})$
17. $U(x,y)=e^{\frac{3}{2}y}\cdot\varphi(y+2x)+\psi(y+2x)$
18. $U(x,y)=e^{5y}\cdot\varphi(y+\frac{1}{2}x)+\psi(y+\frac{1}{2}x)$
19. $U(x,y)=\varphi(\frac{y}{x})\cdot\sqrt[4]{x^3y}+\psi(\frac{y}{x})$
20. $U(x,y)=e^{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y}(\varphi(x)+\psi(y))$
21. $U(x,y)=e^{3x}(\varphi(y)+x\psi(y))$
22. $U(x,y)=e^{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y}(\varphi(x)+\psi(y))$
23. $U(x,y)=e^{-y}(\varphi(x)+y\cdot\psi(x))$
24. $U(x,y)=-\frac{9}{4}y^2+xy+2y+3x$

25. $U(x,y) = x + 2y + 1$

26. $U(x,y) = x^2 - 3y^2 + y$

27. $U(x,y) = 1 - y^2 + 4xy + 2x$

28. $U(x,y) = -\frac{5}{8}y^2 + xy + y + 2x$

29. $U(x,y) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}y^2 + y$

30. $U(x,y) = 3x + 4y - \frac{2}{3}y^3$.

Методы, применяемые при решении задачи Коши, позволяют решать и некоторые другие задачи. Рассмотрим, например, ***задачи с данными на характеристиках.***

Пример 5. Найти решение уравнения $U''_{xx} + 6U''_{xy} + 5U''_{yy} = 0$ по его значениям на двух характеристиках: $U(x,y) = \varphi(x)$ на характеристике $x - y = 0$ и $U(x,y) = \psi(x)$ на характеристике $5x - y = 0$, причём $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Приведя уравнение к каноническому виду (как это уже делалось ранее), находим его общее решение: $U(x,y) = f_1(x-y) + f_2(5x-y)$. Полагая в этом равенстве y = x и y = 5x, получим: $\begin{cases} \varphi(x) = f_1(0) + f_2(4x) \\ \psi(x) = f_1(-4x) + f_2(0) \end{cases}$, откуда следует

$$\begin{cases} f_2(x) = \varphi(\frac{x}{4}) - f_1(0) \\ f_1(x) = \psi(-\frac{x}{4}) - f_2(0) \end{cases}$$ и окончательно

$U(x,y) = \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) + \varphi\left(\frac{5x-y}{4}\right)$. От этого выражения следует вычесть ещё $f_1(0) + f_2(0)$, но эта сумма = 0 по условию.

Упражнения

31.Найти решение уравнения $U''_{tt} = U''_{xx}$ по его значениям на двух характеристиках: при $t + x = 0$ функция $U(x,t) = \varphi(x)$ и при $t - x = 0$ $U(x,t) = \psi(x)$, причём $\varphi(0) = \psi(0)$.

32. Найти решение уравнения $U''_{xx} + y \cdot U''_{yy} + \frac{1}{2}U'_y = 0$ $(y < 0)$, если заданы его значения на характеристиках: $U(x,y) = \varphi_1(x)$ при $x - 2\sqrt{-y} = 0, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $U(x,y) = \varphi_2(x)$ при $x + 2\sqrt{-y} = 1, x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. $\varphi_1(\frac{1}{2}) = \varphi_2(\frac{1}{2})$.

Ответы.

31. $U(x,t)=\varphi\left(\dfrac{x-t}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x+t}{2}\right)-\varphi(0).$

32. $U(x,y)=\varphi_1\left(\dfrac{x+2\sqrt{-y}}{2}\right)+\varphi_2\left(\dfrac{x-2\sqrt{-y}+1}{2}\right)-\varphi_1\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$ 3. МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ФУРЬЕ).

3.1 Уравнения гиперболического типа

Метод разделения переменных применяется при решении широкого круга задач для уравнений всех трёх типов (гиперболического, параболического и эллиптического). Рассмотрим в качестве примера его применение к решению *первой краевой задачи для уравнения колебаний.* Эта задача состоит в следующем: нужно найти решение уравнения $U''_{tt}(x,t)=a^2U''_{xx}(x,t)+f(x,t)$, где переменная t имеет смысл времени, $t\in[0,\infty)$; переменная $x\in[0,l]$, т.е. колеблющийся объект имеет конечную длину. Функция U(x,t) может иметь смысл отклонения точек упругой струны при механических колебаниях, напряжения в электрической линии конечной длины и т.д. При этом, как и раньше, задают начальные условия: $U(x,0)=\varphi(x),\quad U'_t(x,0)=\psi(x)$, но теперь x $\in[0,l]$, а не всей числовой оси. И для получения конкретного решения приходится ещё задавать условия, налагаемые на функцию U на концах промежутка $[0,l]$, т.е. на “краю”области, поэтому и название: *краевая задача.* При этом, если эти условия налагаются на саму функцию U, то это будет *первая краевая задача*; если на U', то это *вторая краевая задача*; а если на границе задана их комбинация, то имеем *третью краевую задачу*. Для примера будут выбраны простейшие – однородные краевые условия и функция $f(x,t)$, характеризующая внешние воздействия, также будет полагаться = 0, т.е. колебания “свободные”. Итак, решаем первую краевую задачу: найти функцию *U(x,t)*, такую, что

$$U''_{tt}(x,t)=a^2U''_{xx}(x,t);\quad U(x,0)=\varphi(x),U'_t(x,0)=\psi(x);U(0,t)=U(l,t)=0 \qquad (3)$$

Будем искать решение задачи в виде $U(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Подставляя это произведение в уравнение, получим :

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x) \quad \text{или} \quad \frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Левая часть последнего равенства не зависит от *x*, а правая – от *t*, следовательно, оба эти отношения могут быть только постоянной величиной.

Пусть $\frac{X''(x)}{X(x)} = C$ или $X''(x) - C \cdot X(x) = 0$, причём, как следует из граничных условий (3), $X(0) = X(l) = 0$. Легко проверить, что при C > 0 и C = 0 этим условиям удовлетворяет только тождественный нуль. Нас интересует ненулевое решение, что возможно, если C отрицательно, т.е. C = $-\lambda^2$. В этом случае из уравнения $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ следует, что $X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$, а из условий $X(0) = X(l) = 0$ получаем $C_1 = 0$ и $\lambda l = k\pi$, где k – любое целое число. Итак, для $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ находим $X_k(x) = C_k \cdot \sin\frac{k\pi}{l} x$ и соответствующее значение $T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l} t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l} t$. Их произведение $U_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t)$, а также сумма любого числа таких произведений

$$U(x,t) = \sum_1^\infty U_k(x,t) = \sum_1^\infty \left(\alpha_k \cos\frac{ak\pi}{l} t + \beta_k \sin\frac{ak\pi}{l} t \right) \cdot \sin\frac{k\pi}{l} x \qquad (4)$$

удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Убедимся теперь, что коэффициенты α_k *и* β_k в этом выражении можно подобрать так, что и начальные условия из (3) будут выполнены.

Действительно, положим в этой формуле t=0, получим

$U(x,0) = \sum_1^\infty \alpha_k \sin\frac{k\pi}{l} x = \varphi(x)$, откуда следует, что коэффициенты $\alpha_к$ – это коэффициенты разложения в ряд Фурье по синусам функции $\varphi(x)$; а если продифференцировать выражение (4) для *U(x,t)* по *t* и опять положить *t*=0 , то из полученного равенства $U'_t(x,0) = \sum_1^\infty \beta_k \frac{ak\pi}{l} \cdot \sin\frac{k\pi}{l} x = \psi(x)$ выражаются и коэффициенты $\beta_к$ через коэффициенты Фурье функции $\psi(x)$. Таким образом:

$$\alpha_к = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{k\pi}{l} \xi \cdot d\xi; \beta_k = \frac{l}{ak\pi} \cdot \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{k\pi}{l} \xi \cdot d\xi. \qquad (5)$$

Подставляя коэффициенты (5) в формулу (4), находим искомое решение задачи.

Единственность решения задачи (3) доказывается в теоретическом курсе, так что, каким бы способом ни решалась эта задача, мы придём всегда к найденному решению.

Заметим, что при решении таких задач коэффициенты Фурье (5) для заданных начальных условий могут находиться с помощью стандартных компьютерных программ, однако в простейших случаях вычисления проводятся непосредственно.

Приведём следующий ***Пример* 6**

Решить уравнение $U''_{tt}(x,t)=a^2U''_{xx}(x,t)$ при условиях: $U(0,t)=U(l,t)=0$;

$$U(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2h}{l}x,\ x\in(0,\dfrac{l}{2})\\ \dfrac{2h}{l}(l-x),\ x\in(\dfrac{l}{2},l)\end{cases};\ U'_t(x,0)=0.$$

Заметим, что простейшая физическая интерпретация задачи такова: найти отклонение от положения равновесия точки однородной струны, закреплённой на концах $x=0$ и $x=l$,если в начальный момент в средней точке она оттягивается на расстояние h и отпускается без начальной скорости.

В данном случае мы имеем задачу (3). Как уже было показано, с учётом нулевых граничных условий, решение приводится к виду (4), где коэффициенты $\beta_k=0$, так как

$\psi(x)=0$, а коэффициенты α_k приходится вычислять:

$$\alpha_k=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{2h}{l}x\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}\frac{2h}{l}(l-x)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}xdx\right);$$ оба интеграла внутри скобки вычисляют «по частям», в результате после подстановки пределов и приведения подобных членов получаем, что

$$\alpha_k=\frac{8h}{(k\pi)^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}=\begin{cases}0,\ k=2n\\ (-1)^n\dfrac{8h}{(2n+1)^2\pi^2}\end{cases},$$ $k = 2n + 1$. Окончательно, решение задачи в *примере* 6 принимает вид:

$$U(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x\cdot\cos\frac{a(2n+1)\pi}{l}t.$$

Решение первой краевой задачи для случая неоднородного уравнения и ненулевых граничных условий.

Задача общего вида – когда и уравнение неоднородное

$$U''_{tt}(x,t)-a^2U''_{xx}(x,t)=f(x,t), \qquad (6)$$

и граничные условия ненулевые: $U(0,t)=\alpha(t), U(l,t)=\beta(t)$, последовательно сводится к рассмотренному простейшему случаю. Так, если имеем уравнение (6) с начальными условиями $U(x,0)=\varphi(x); U'_t(x,0)=\psi(x)$, а на концах условия пока нулевые - $U(0,t)=U(l,t)=0$, будем искать решение поставленной задачи в виде $U(x,t)=\sum_1^{\infty}U_k(t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x$. Подстановка этой функции в уравнение даёт:

$\sum_1^{\infty} U_k''(t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x+\sum_1^{\infty} a^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 U_k(t)\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x = f(x,t)$. Если теперь функцию $f(x,t)$ разложить в ряд Фурье по переменной x по синусам, считая t параметром: $f(x,t)=\sum_1^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \quad f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\cdot d\xi$, то приравнивая коэффициенты при соответствующих синусах, получим уравнение для $U_k(t)$: $U_k''(t)+\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 U_k(t)=f_k(t)$ – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Произвольные постоянные в его решении определяются из условий: $U_k(0)=\varphi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi; U_k'(0)=\psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi$.

Рассмотрим следующий

***Пример* 7**. Найти решение уравнения $U_{tt}''-U_{xx}''=65e^{-8t}\sin x+t\sin 2x$ при условиях: $U(0,t)=U(\pi,t)=0; U(x,0)=U_t'(x,0)=0$.

Ищем решение в виде $U(x,t)=\sum_1^{\infty}\sin kx\cdot U_k(t)$. Заметим, что граничным условиям эта функция удовлетворяет. Подставим её в уравнение, получим $\sum_1^{\infty}\left(U_k''(t)+k^2U_k(t)\right)\cdot\sin kx=65e^{-8t}\sin x+t\sin 2x$. Здесь функция, стоящая в правой части уравнения, уже разложена в ряд Фурье по синусам кратных дуг. Поэтому, приравнивая коэффициенты при соответствующих синусах, мы находим, что из всех $U_k(t)$ отличны от нуля только два первых, они удовлетворяют уравнениям:

$U_1''(t)+U_1(t)=65e^{-8t}; \quad U_2''(t)+4U_2(t)=t$, причём из нулевых начальных условий следует, что $U_k(0)=U_k'(0)=0, \ k=1;2$. Общее решение первого уравнения имеет вид: $U(t)=a_1\sin t+b_1\cos t+e^{-8t}$, из начальных условий получаем $b_1+1=0, a_1-8=0$, т.е. $U_1(t)=8\sin t-\cos t+e^{-8t}$.Аналогично находим $U_2(t)=a_2\sin 2t+b_2\cos 2t+\frac{t}{4}$ и с учётом начальных условий :

$U_2(t)=-\frac{1}{8}\sin 2t+\frac{t}{4}$.

Окончательный ответ: $U(x,t)=\sin x\cdot\left(8\sin t-\cos t+e^{-8t}\right)+\sin 2x\cdot\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{8}\sin 2t\right)$.

В случае ненулевых граничных условий $U(0,t)=\alpha(t),\ U(l,t)=\beta(t)$ поступают следующим образом. Вместо неизвестной функции $U(x,t)$, удовлетворяющей уравнению $U''_{tt}=a^2U''_{xx}+f(x,t)$
и начальным условиям $U(x,0)=\varphi(x),\quad U'_t(x,0)=\psi(x),$ вводят новую неизвестную функцию $V(x,t)=U(x,t)-\alpha(t)-\frac{x}{l}\left(\beta(t)-\alpha(t)\right)$. Легко проверяется, что функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению $V''_{tt}=a^2V''_{xx}+F(x,t),$ где $F(x,t)=f(x,t)-\alpha''(t)-\frac{x}{l}\left(\beta''(t)-\alpha''(t)\right)$, нулевым граничным условиям и условиям Коши: $V(x,0)=\varphi(x)-\alpha(0)-\frac{x}{l}\left(\beta(0)-\alpha(0)\right)=\varphi_1(x),$

$$V'_t(x,0)=\psi(x)-\alpha'(0)-\frac{x}{l}\left(\beta'(0)-\alpha'(0)\right)=\psi_1(x)$$

Упражнения.

33.Однородная струна, закреплённая на концах $x=0\ и\ x=l$, в начальный момент имеет форму параболы: $U(x,0)=\frac{x(l-x)}{8l}$, начальная скорость и внешние силы отсутствуют. Найти закон колебаний струны.

34. Решить уравнение $U''_{tt}=64U''_{xx}$ при условиях: $x\in[0,6]$,
$U'_x(0,t)=U'_x(6,t)=0;\quad U(x,0)=0, U'_t(x,0)=8\pi\cdot\cos\pi x$

35. Решить уравнение $U''_{tt}=81\cdot U''_{xx}$ при условиях: $x\in[0,5]$, $U'_x(0,t)=U'_x(5,t)=0$; $U(x,0)=2\cos\pi x, U'_t(x,0)=0.$

Методом разделения переменных решить неоднородные волновые уравнения

36. $U''_{tt}=\frac{1}{16}U''_{xx}+50e^{-7t}\cdot\sin 4x, U(0,t)=U(\pi,t)=0, U(x,0)=U'_t(x,0)=0$, $x\in[0,\pi]$

37. $U''_{tt}=U''_{xx}+16\cos 8t\cdot\sin 8x, U(0,t)=U(2\pi,t)=0, U(x,0)=U'_t(x,0)=0$, $x\in[0,2\pi]$

38. $U''_{tt}=9U''_{xx}+36\cos 18t\cdot\sin 6x, U(0,t)=U(\pi,t)=0, U(x,0)=U'_t(x,0)=0$, $x\in[0,\pi]$

39. $U''_{tt}=\frac{1}{49}U''_{xx}+37e^{-6t}\cdot\sin 7x, U(0,t)=U(2\pi,t)=0, U(x,0)=U'_t(x,0)=0$,
$x\in[0,2\pi]$

Ответы.

33. $U(x,t)=\frac{l}{\pi^3}\sum_0^\infty\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cdot\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}}{(2n+1)^3}$

34. $U(x,t)=\cos\pi x\cdot\sin 8\pi t$; 35. $U(x,t)=2\cos\pi x\cdot\cos 9\pi t$

36. $U(x,t)=\sin 4x\cdot\left(7\sin t-\cos t+e^{-7t}\right)$; 37. $U(x,t)=t\sin 8t\cdot\sin 8x$;

38. $U(x,t)=t\sin 18t\cdot\sin 6x$; 39. $U(x,t)=\sin 7x\cdot\left(6\sin t-\cos t+e^{-6t}\right)$

3.2 Уравнения параболического типа.

Рассмотрим решение первой краевой задачи для простейшего уравнения параболического типа – для уравнения теплопроводности. Как известно, температура U(x,t) в момент времени t в точке стержня с абсциссой x меняется по закону $U_t'=a^2U_{xx}''$, $x\in[0,l]$ – это уравнение теплопроводности. Пусть на концах стержня температура нулевая: $U(0,t)=U(l,t)=0$, начальная температура $U(x,0)=\varphi(x)$. Аналогично п.3.1 ищем $U(x,t)=X(x)\cdot T(t)$, подставляем в уравнение: $X\cdot T'=a^2X''\cdot T$, $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{T'}{T}=\frac{X''}{X}$.Опять эти отношения могут быть только постоянными и только отрицательными, то есть $\frac{X''}{X}=-\lambda^2$, $X(0)=X(l)=0\Rightarrow\lambda_k=\frac{k\pi}{l}$ и следовательно $X_k=A_k\sin\frac{k\pi}{l}x$.

Для $T(t)$ имеем уравнение первого порядка $T'+a^2\lambda_k{}^2T=0$, откуда $T_k(t)=C_ke^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)t}$. Функция $U_k(x,t)=\alpha_k\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2t}$, а также любая сумма таких функций $U(x,t)=\sum_1^\infty U_k(x,t)$ является решением однородного уравнения, удовлетворяющим нулевым граничным условиям. Начальное условие $U(x,0)=\varphi(x)$ означает, что $\sum_1^\infty\alpha_k\cdot\sin\frac{k\pi}{l}x=\varphi(x)$, т.е. $\alpha_к$ должны быть коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$, $\alpha_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\cdot d\xi$.

Окончательный ответ выглядит так:

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^\infty\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)t}\cdot\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi$$

Остальные задачи – неоднородная, когда $U_t'(x,t)=a^2U_{xx}''(x,t)+f(x,t)$, или с ненулевыми граничными условиями, рассматриваются аналогично случаю п.3.1.

***Пример* 8.** Методом Фурье решить уравнение теплопроводности с ненулевыми граничными условиями.
$U'_t(x,t) = 9U''_{xx}(x,t), \quad U(x,0) = 5\sin 2\pi x - 1 + 3x, U(0,t) = -1, U(2,t) = 5$.

Вводим замену: $V(x,t) = U(x,t) - \alpha(t) - \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$, здесь $\alpha(t) = -1, \beta(t) = 5, l = 2$, таким образом $V(x,t) = U(x,t) - 3x + 1$. Задача преобразуется в следующую: найти функцию $V(x,t)$, удовлетворяющую условиям: $V'_t(x,t) = 9V''_{xx}(x,t), \quad V(x,0) = 5\sin 2\pi x, V(0,t) = V(2,t) = 0$. Как было показано выше, решением уравнения с нулевыми граничными условиями является функция $V(x,t) = \sum_1^{\infty} \alpha_k \cdot \sin\frac{k\pi}{2} x \cdot e^{-\left(\frac{3k\pi}{2}\right)^2 t}$. Коэффициенты $\alpha_к$ определяются из начального условия $V(x,0) = \sum_1^{\infty} \alpha_k \cdot \sin\frac{k\pi}{2} x = 5\sin 2\pi x$, откуда следует, что все $\alpha_к = 0$, кроме $\alpha_4 = 5$. Таким образом, $V(x,t) = 5\sin 2\pi x \cdot e^{-(6\pi)^2 t}$, а ответ задачи: $U(x,t) = 3x - 1 + 5\sin 2\pi x \cdot e^{-(6\pi)^2 t}$.

Упражнения.

Решить методом Фурье однородное уравнение теплопроводности с нулевыми граничными условиями

40. $U'_t = 2U''_{xx}, \quad U(x,0) = 4\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x, U(0,t) = U(2,t) = 0$
41. $U'_t = 7U''_{xx}, \quad U(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x, U(0,t) = U(3,t) = 0$
42. $U'_t = 5U''_{xx}, \quad U(x,0) = 10\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x, U(0,t) = U(5,t) = 0$

Решить однородное уравнение теплопроводности с ненулевыми граничными условиями

43. $U'_t = 8U''_{xx}, \ U(x,0) = 6\sin 3\pi x + 2 - 3x, U(0,t) = 2, U(3,t) = -7$
44. $U'_t = 7U''_{xx}, \ U(x,0) = 7\sin 2\pi x - 3 + 4x, U(0,t) = -3, U(1,t) = 1$
45. $U'_t = 6U''_{xx}, \ U(x,0) = 8\sin 4\pi x + 4 - 5x, U(0,t) = 4, U(2,t) = -6$
46. $U'_t = 5U''_{xx}, \quad U(x,0) = 9\sin 3\pi x - 5 + 2x, U(0,t) = -5, U(3,t) = 1$

Ответы. 40. $U(x,t) = 4\sin 3\pi x \cdot e^{-18\pi^2 t} + 5\sin 4\pi x \cdot e^{-32\pi^2 t}$

41. $U(x,t) = 6\sin 2\pi x \cdot e^{-28\pi^2 t} + 7\sin 3\pi x \cdot e^{-63\pi^2 t}$

42. $U(x,t) = 10\sin 2\pi x \cdot e^{-20\pi^2 t} + 3\sin 3\pi x \cdot e^{-45\pi^2 t}$

43. $U(x,t) = 6\sin 3\pi x \cdot e^{-72\pi^2 t} + 2 - 3x$

44. $U(x,t) = 7\sin 2\pi x \cdot e^{-28\pi^2 t} + 4x - 3$

45. $U(x,t) = 8\sin 4\pi x \cdot e^{-96\pi^2 t} + 4 - 5x$

46. $U(x,t) = 9\sin 3\pi x \cdot e^{-45\pi^2 t} + 2x - 5$

3.3 Уравнения эллиптического типа.

Как уже отмечалось, к эллиптическому типу относится уравнение $U''_{xx}+U''_{yy}=0$, называемое уравнением Лапласа. Функции $U(x,y)$, удовлетворяющие этому уравнению, называются гармоническими функциями. Принято обозначение $U''_{xx}+U''_{yy}\equiv\Delta U$. Этим уравнением, в частности, описывается установившийся процесс распространения тепла в плоской области Ω. Задача нахождения решения уравнения Лапласа в области Ω, если заданы значения $U(x,y)$ на границе Γ этой области, называется *задачей Дирихле*. Если же на Γ задаётся не сама искомая функция, а её нормальная производная $\dfrac{\partial U}{\partial n}$, т.е. задана не температура на границе, а поток тепла через границу, то соответствующая задача носит название *задачи Неймана.* В ряде случаев к решению таких задач оказывается применимым уже знакомый метод Фурье. Рассмотрим применение этого метода к решению задачи Дирихле для круга. Для сокращения записей будем считать, что радиус круга =1, граница Γ в этом случае будет единичной окружностью. Перейдём к полярным координатам: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, задача принимает вид: найти решение уравнения

$$\Delta U=\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0,$$

удовлетворяющее условию $U(1,\varphi)=f(\varphi)$.

Причём, функция $f(\varphi)$ предполагается периодической с периодом 2π. Будем искать $U(r,\varphi)=R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. После подстановки в уравнение получим:

$$R''\Phi+\frac{1}{r}R'\Phi+\frac{1}{r^2}R\Phi''=0 \quad \textit{или} \ \frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\lambda.$$

Таким образом, неизвестные $\Phi(\varphi)$ *и* $R(r)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений $\Phi''+\lambda\Phi=0$ *и* $r^2R''+rR'-\lambda R=0$, причём по смыслу задачи $\Phi(\varphi)$ – периодическая функция с периодом 2π, следовательно, параметр λ может быть равным только квадрату целого числа, т.е. $\lambda=n^2$. В этом случае $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$, а уравнение $r^2R''+rR'-n^2R=0$, называемое уравнением Эйлера, имеет, как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, общее решение $R(r)=C_1r^n+C_2r^{-n}$. Второе слагаемое этого решения в центре круга обращается в бесконечность, следовательно, непрерывное в круге решение исходного уравнения имеет вид

$$U(r,\varphi)=\sum_{0}^{\infty} r^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right).$$

Коэффициенты A_n *и* B_n определяются из граничного условия $U(1,\varphi)=f(\varphi)$:

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta;\ A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta d\theta;\ B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin k\theta d\theta\ .$$

***Пример* 9.** Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta U=0$ в круге $0<r<1;\ 0\le\varphi<2\pi$, если на границе круга $U(1,\varphi)=13\cos 6\varphi-2\sin\varphi\cdot\cos 3\varphi$.

Из полученного выше общего решения следует, что $U(r,\varphi)=\sum_{0}^{\infty} r^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)$, причём $U(1,\varphi)=13\cos 6\varphi-\sin 2\varphi+\sin 4\varphi$.

(Это последнее представление граничного условия получено разложением произведения в сумму по известным из средней школы формулам). Приравнивая коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах, окончательно получаем:

$$U(r,\varphi)=13r^6\cos 6\varphi+r^4\sin 4\varphi-r^2\sin 2\varphi.$$

Упражнения.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta U=0$ в круге единичного радиуса, если на границе круга функция $U(r,\varphi)$ принимает следующие значения:

47. $U(1,\varphi)=3\cos 7\varphi+4\sin 6\varphi$

48. $U(1,\varphi)=7\cos 3\varphi+\sin^2 2\varphi$

49. $U(1,\varphi)=9\cos 2\varphi+4\sin 2\varphi\cdot\sin 6\varphi$

50. $U(1,\varphi)=11\cos 4\varphi-8\cos^3\varphi$

Ответы:

47. $U(r,\varphi)=4r^6\sin 6\varphi+3r^7\cos 7\varphi$

48. $U(r,\varphi)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi+7r^3\cos 3\varphi$

49. $U(r,\varphi)=9r^2\cos 2\varphi+2r^4\cos 4\varphi-2r^8\cos 8\varphi$

50. $U(r,\varphi)=6r\cdot\cos\varphi+2r^3\cos 3\varphi+11r^4\cos 4\varphi$

$4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ НА ПЛОСКОСТИ .

В $ 3 было рассмотрено применение метода Фурье ко всем трём типам уравнений математической физики – гиперболическому, параболическому и эллиптическому. И во всех случаях неизвестная функция *U* была функцией двух переменных: в электрическом проводе напряжение *U* зависело от времени *t* и координаты *x*; температура стержня тоже была функцией времени и координаты ; в уравнении Лапласа функция U зависела от x и y (или φ и r) В реальности же может колебаться и плоская область G, содержащая (x,y) :

$$U''_{tt}(x,y,t)=a^2\left(U''_{xx}+U''_{yy}\right);(x,y)\in G\subset R^2;t>0 \qquad (7)$$

- это уравнение колебаний мембраны; и некоторое тело в R^3 - тогда $U''_{tt}(t,x,y,z)=a^2\Delta U$.Тепло тоже может распространяться как по плоской области, так и в R^3. Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид: $U'_t(t,x,y)=a^2\Delta U$. Рассмотрим некоторые примеры решения таких задач.

4.1. Применение метода Фурье к решению задачи о свободных колебаниях прямоугольной мембраны.

Пусть в приведённом в начале параграфа 4 уравнении колебаний мембраны (7) область G является прямоугольником: $G=\{(x,y):x\in[0,l],y\in[0,m]\}$, условия Коши имеют вид:
$U(0,x,y)=\varphi(x,y),U'_t(0,x,y)=\psi(x,y)$, а закрепление мембраны на границе означает, что $U(t,0,y)=U(t,l,y)=\mathrm{U(t,x,0)}=\mathrm{U(t,x,m)}=0$. Решение задачи , как и ранее, будем искать в виде $U(t,x,y)=T(t)\cdot X(x)\cdot Y(y)$. Условия закрепления на границе дают: $\mathrm{X}(0)=X(l)=0,Y(0)=Y(m)=0$, а уравнение колебаний мембраны после подстановки в него такого произведения и несложных преобразований принимает вид: $\frac{T''}{T}=a^2\left(\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}\right)$. Как и в одномерном случае, обе части этого равенства, а также каждое из отношений $\frac{X''}{X}$ *и* $\frac{Y''}{Y}$ могут быть только постоянными величинами, причём отрицательными (в противном случае опять получаются нулевые решения). Обозначим $\frac{X''}{X}=-\lambda^2,\ \frac{Y''}{Y}=-\mu^2$. Решая эти последние уравнения при нулевых граничных условиях, находим:

$$X_k=C_k\sin\lambda_k x,\ \text{где}\ \lambda_k=\frac{k\pi}{l},k=1,2,...\quad ;Y_n=\tilde{C}_n\sin\mu_n y,\ \text{где}\ \mu_n=\frac{n\pi}{m},n=1,2,...$$

Уравнение для $T(t)$ принимает вид:

$$T''(t)+a^2(\lambda_k^2+\mu_n^2)T(t)=0,\ \text{или}\ T''(t)+\pi^2a^2\left(\frac{k^2}{l^2}+\frac{n^2}{m^2}\right)T(t)=0.$$

Решение этого уравнения обозначим функцией $T_{kn}(t)$ - с двумя индексами:

$$T_{kn}(t)=A_{kn}\cos\omega_{kn}t+B_{kn}\sin\omega_{kn}t,\ \text{где}$$

$\omega_{kn} = \pi a\sqrt{\dfrac{k^2}{l^2} + \dfrac{n^2}{m^2}}$ - это собственные частоты колебаний мембраны. Итак, каждой паре целых положительных чисел k и n соответствует функция

$$U_{kn}(x,y,t) = \left(\alpha_{kn}\cos\omega_{kn}t + \beta_{kn}\sin\omega_{kn}t\right)\sin\lambda_k x\cdot\sin\mu_n y\,,$$

удовлетворяющая уравнению колебаний мембраны и граничным условиям. Решение, исходной задачи, удовлетворяющее начальным условиям, находится в виде двойной суммы

$$U(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{kn}(x,y,t)\,.$$

Выполнение начальных условий означает, что

$$U(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{kn}\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{m}y = \varphi(x,y)\,;$$

$$U'_t(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{kn}\beta_{kn}\sin\frac{k\pi}{l}x\cdot\sin\frac{n\pi}{m}y = \psi(x,y).$$

Для нахождения коэффициентов α_{kn} и β_{kn} остаётся разложить функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ в двойные ряды по синусам. Это разложение аналогично разложению в обычный ряд Фурье функции одной переменной. Коэффициенты двойного ряда Фурье вычисляются по формулам:

$$\alpha_{kn} = \frac{4}{l\cdot m}\int_0^l\int_0^m \varphi(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{n\pi}{m}\eta\cdot d\xi d\eta$$

$$\beta_{kn}\omega_{kn} = \frac{4}{l\cdot m}\int_0^l\int_0^m \psi(\xi,\eta)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\cdot\sin\frac{k\pi}{m}\eta\cdot d\xi d\eta\,.$$

Упражнения.

51. Найти закон свободных колебаний квадратной мембраны со стороной l, если в начальный момент мембране придана скорость $U'_t(x,y,0) = \dfrac{a}{50}$, (где a – постоянная, фигурирующая в уравнении (7) колебаний мембраны). Начальное отклонение $U(x,y,0) = 0$, в точках контура мембрана закреплена.

52. Найти закон свободных колебаний квадратной мембраны со стороной l, если в начальный момент отклонение в каждой точке определяется равенством: $U(x,y,0) = \dfrac{l}{100}\sin\dfrac{\pi x}{l}\sin\dfrac{\pi y}{l}$. Начальная скорость равна нулю, вдоль контура мембрана закреплена.

Ответы.

51. $$U(x,y,t) = \sum_k\sum_n \frac{0{,}32l}{\pi^3 kn\sqrt{k^2+n^2}}\sin\frac{\pi a\sqrt{k^2+n^2}}{l}t\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{n\pi y}{l}\,,$$ где суммирование проводится по всем парам нечётных номеров: (1,1), (1,3), (3,1)…

52. $U(x,y,t)=\frac{l}{100}\cos\frac{a\pi\sqrt{2}}{l}t\cdot\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi y}{l}$

4.2. Применение метода Фурье к решению уравнения колебаний круглой мембраны.

В случае, когда область G является кругом радиуса r_0 с центром в начале координат , в уравнении (7) переходят от декартовых координат (x,y) к полярным, т.е. выполняют замену переменных: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

Нетрудно проверить, что уравнение колебаний в новых переменных примет вид:

$$U''_{tt}=a^2\left(U''_{rr}+\frac{1}{r}U'_r+\frac{1}{r^2}U''_{\varphi\varphi}\right). \tag{7*}$$

Заметим, что из физического смысла задачи следует симметрия относительно φ, т.е. решение от φ не зависит, $U''_{\varphi\varphi}=0$ и (7*) превращается в

$$U''_{tt}(r,t)=a^2\left(U''_{rr}+\frac{1}{r}U'_r\right) \tag{7**}$$

Первая краевая задача в данном случае состоит в том, чтобы найти $U(r,t)$- решение уравнения (7**), удовлетворяющее начальным условиям: $U(r,0)=f_1(r),\quad U'_t(r,0)=f_2(r)$ и граничному: $U(r_0,t)=0$ (закрепление на границе).

Пусть $U(r,t)=T(t)\cdot R(r)$. Подставим это произведение в уравнение, разделим, как и ранее обе части на $a^2R\cdot T$, получим: $\frac{T''}{a^2T}=\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=-\lambda^2$. Знак минус у постоянной можно объяснить, в частности, требованием ограниченности и периодичности решения по переменной *t*, что вытекает из физического смысла задачи. Отсюда получим уравнение для $R(r)$: $R''+\frac{1}{r}R'+\lambda^2R=0$, которое заменой $\lambda r=\rho$ приводится к виду $R''+\frac{1}{\rho}R'+R=0$. Это уравнение является частным случаем так называемого *уравнения Бесселя.* Его решения в данном случае – это функции $J_0(\rho)=J_0(\lambda r)$ – функции Бесселя нулевого порядка. Как и хорошо известные тригонометрические функции, эти функции имеют бесконечное количество нулей ($J_0(\mu_k)=0, k=1,2,...$) и обладают свойством ортогональности на промежутке $[0,1]$ с весом *x*. Это означает, что $\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)J_0(\mu_n x)dx=0, k\neq n$; при $k=n$ этот интеграл равен $\frac{1}{2}\left[J'_0(\mu_n)\right]^2$.

Таким образом, заданную непрерывную функцию $f(r)$ можно разложить в ряд Фурье по функциям Бесселя (аналогичный тригонометрическому ряду).
Из граничного условия $R(r_0)=0$ следует, что $J_0(\lambda r_0)=0$, следовательно $\lambda r_0=\mu_k$; $\lambda=\dfrac{\mu_k}{r_0}=\lambda_k$. (Для сравнения: ранее получалось, что $\lambda_k=\dfrac{k\pi}{l}$ – это были нули тригонометрических функций). Итак, решение уравнения для $R(r)$ имеет вид $R_k(r)=J_0(\lambda_k r)$, а для $T(t)$ получаем: $T_k(t)=\alpha_k\cos\lambda_k at+\beta_k\sin\lambda_k at$.
Составим теперь сумму таких функций

$$U(t,r)=\sum_1^{\infty}(\alpha_k\cos\lambda_k at+\beta_k\sin\lambda_k at)J_0(\lambda_k r) \tag{8}$$

и подберём α_k и β_k так, чтобы выполнялись и начальные условия. Для этого нужно функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ разложить в ряды по функциям Бесселя и приравнять коэффициенты при соответствующих синусах и косинусах:

$$\alpha_k=\frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\,f_1(r_0x)dx;\ \beta_k=\frac{2r_0}{a\mu_k J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 xJ_0(\mu_k x)\,f_2(r_0x)dx. \tag{9}$$

Здесь через x обозначено отношение $\dfrac{r}{r_0}$, т.е. $r=r_0\cdot x$.

Функции Бесселя встречаются при решении и других уравнений математической физики. Некоторая информация об этих функциях приводится в следующем приложении.

Приложение.
(Некоторые сведения о функциях Бесселя)

Уравнением Бесселя называется обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка $y''+\dfrac{1}{x}y'+(1-\dfrac{\nu^2}{x^2})y=0$, его решения называют **цилиндрическими функциями**, или **функциями Бесселя** порядка ν. В привычных элементарных функциях решения этого уравнения не выражаются, уравнение решают с помощью рядов. Перепишем данное уравнение в виде $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ и будем искать его решение в виде ряда $y(x)=x^{\sigma}(a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k+...)$, где $a_0\neq 0$ и множитель x^{σ} объясняется тем, что в точке $x=0$ коэффициент при старшей производной в исходном уравнении обращается в нуль. Подставим ряд в уравнение и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях переменной x, получим систему:

$$a_0(\sigma^2-\nu^2)=0$$
$$a_1\left[(\sigma+1)^2-\nu^2\right]=0$$
$$a_2\left[(\sigma+2)^2-\nu^2\right]+a_0=0$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$a_k\left[(\sigma+k)^2-\nu^2\right]+a_{k-2}=0$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

Из этой системы следует: $\sigma^2=\nu^2, \sigma=\pm\nu, a_1=0, a_k=\dfrac{-a_{k-2}}{(\sigma+k+\nu)(\sigma+k-\nu)}$.

Пусть ν – нецелое число. Из полученных формул при $\sigma=\nu$ выразим все коэффициенты ряда для $y(x)$ через a_0 и $a_1=0$: все коэффициенты с нечётными номерами получаются равными нулю $a_{2m-1}=0$, а для $k=2m$ имеем $a_{2m}=\dfrac{-a_{2m-2}}{2^2m\cdot(m+\nu)}=\ldots=$

$$=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}m!(m+\nu)\cdots(1+\nu)}=(-1)^m\frac{a_0\Gamma(\nu+1)}{2^{2m}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}\ ,\quad m=1,\ 2,\ .\ .\ .$$

Здесь и в дальнейшем в формулах для коэффициентов используется гамма-функция Эйлера, обладающая следующим свойством: $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. И если p – целое число, то $\Gamma(p+1)=p!$

Положим $a_0=\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, тогда $a_{2m}=(-1)^m\dfrac{1}{2^{2m+\nu}\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}$, и решение уравнения Бесселя принимает вид:

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_0^\infty\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Полученная функция называется *функцией Бесселя первого рода порядка* ν. При $\sigma=-\nu$ все коэффициенты степенного ряда с нечётными номерами опять оказываются = 0, а коэффициенты с чётными номерами находятся аналогично и вычисляются заменой ν на $-\nu$ и в случае нецелого ν второе независимое решение уравнения Бесселя имеет вид:

$$J_{-\nu}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_0^\infty\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

В случае целого $\nu=n$ функции $J_n(x)\, u\, J_{-n}(x)$ оказываются зависимыми и тогда в качестве второго независимого решения уравнения Бесселя принимают, например, функцию Неймана: $N_\nu(x)=\dfrac{J_\nu(x)Cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{Sin\pi\nu}$. Её называют *цилиндрической функцией второго рода.* Серьёзное изучение функций Бесселя и других специальных функций в нашем курсе не предполагается .Отметим только, что существует некоторая аналогия между функциями Бесселя и тригонометрическими функциями. Так, при $x\to\infty$ имеют место асимптотические формулы:

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+O(x^{-\frac{3}{2}});\ N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4})+O(x^{-\frac{3}{2}}).$$

Как уже отмечалось, функции Бесселя имеют бесконечное количество нулей и обладают свойством ортогональности с весом x на промежутке $x\in[0,1]$.

$$\int_0^1 xJ_\nu(\mu_i x)J_\nu(\mu_j x)dx=0,\quad (i\neq j);\int_0^1 xJ_\nu^2(\mu_i x)dx=\frac{1}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_i)$$

(Здесь μ_i - это нули функции Бесселя $J_\nu(x)$)

Некоторые свойства функций Бесселя следуют непосредственно из представления $J_\nu(x)$ в виде ряда. Так, если положить в формуле для $J_\nu(x)$ $\nu=\dfrac{1}{2}$ и воспользоваться свойствами гамма-функций, в частности равенством $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$, то получим: $J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\sin x$. Аналогично можно получить: $J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\cos x$. Выполняя почленное дифференцирование ряда для $J_\nu(x)$ при различных значениях ν, можно *доказать* в качестве *упражнения* следующие соотношения:

53. $\dfrac{dJ_0(x)}{dx}=-J_1(x)$

54. . $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\dfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$

55. $\dfrac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x)$.

56. $J_\nu'(x)+J_{\nu+1}(x)=\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x)$

57. $J_{\nu-1}(x)-J_\nu'(x)=\dfrac{\nu}{x}J_\nu(x)$

58. $J_{\nu+1}(x)=\dfrac{2\nu}{x}J_\nu(x)-J_{\nu-1}(x)$

В заключение рассмотрим решение задачи о колебаниях круглой мембраны (см.п.4.2) в одном конкретном случае.

Пример 10. Найти собственные колебания однородной круглой мембраны радиуса r_0, закреплённой по краям, если в начальный момент она представляет поверхность параболоида вращения, а начальные скорости равны нулю, т.е.

$$U_{tt}''=a^2\left(U_{rr}''+\frac{1}{r}U_r'\right);r\in(0,r)\ ;U(r_0,t)=0;U(r,0)=A\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right);U_t'(r,0)=0\ .$$

При решении этой задачи в общем виде в п.4.2 было получено решение (8), в котором коэффициенты α_k *и* β_k находились по формулам (9). Подставляя в формулы (9) заданные начальные условия, получим

$$\alpha_k=\frac{2}{J_1^2(\mu_k)}\int_0^1 x\cdot A\cdot(1-x^2)J_0(\mu_k x)dx;\quad \beta_k=0.$$

Интеграл в выражении для α_k берётся «по частям» (используются формулы типа тех, что приведены в упражнениях №№ 53 – 58). Разложение (8), где $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{r_0}$, принимает вид:

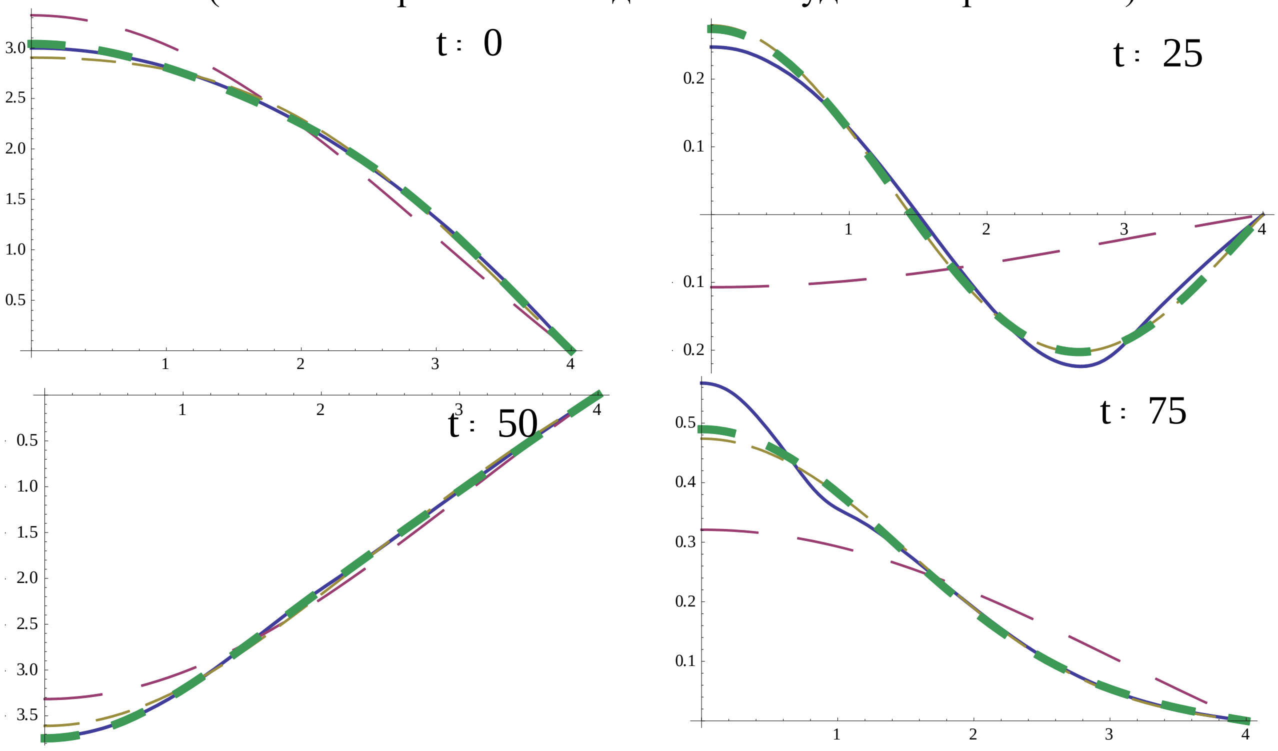
$$U(t,r) = 8A\sum_{1}^{\infty}\frac{J_0\left(\dfrac{\mu_k}{r_0}r\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)}\cdot\cos\left(a\frac{\mu_k}{r_0}t\right) \qquad (8^1)$$

Значения каждого слагаемого в представлении функции $U(r,$ при различных значениях аргументов могут быть найдены с помощью таблиц. Однако, современные компьютерные программы позволяют находить значения и коэффициентов α_k, и любых частичных сумм ряда (8^1) с заданной точностью.

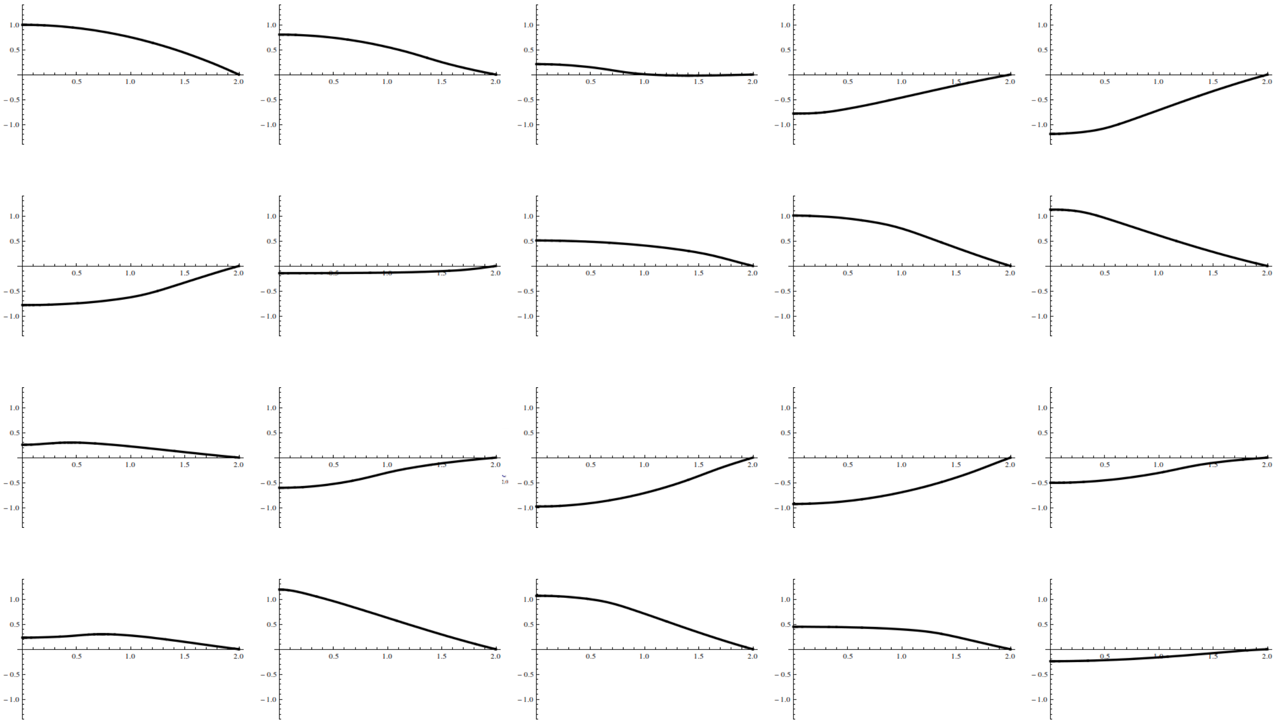
Приведём для наглядности полученное с помощью компьютера изображение:

А) сечения мембраны ($0 < r < r_0$), представленное приближённо одним; двумя и тремя слагаемыми ряда (8^1)

Тонкая сплошная линия - точное решение, редкий пунктир - частичная сумма ряда Фурье-Бесселя всего лишь с одним слагаемым (качество приближения неудовлетворительно) , тонкий пунктир со штрихами почаще - частичная сумма ряда Фурье-Бесселя с двумя слагаемыми (качество приближения получше) , жирный пунктир - частичная сумма ряда Фурье-Бесселя с тремя слагаемыми (качество приближения достаточно удовлетворительное) .



Б) изменений сечения мембраны со временем (в процессе колебаний)



СОДЕРЖАНИЕ.

ЛИТЕРАТУРА

Ю.С.Очан «Сборник задач по уравнениям математической физики» Высшая школа,1973г.
М.М.Смирнов «Задачи по уравнениям математической физики», Наука, 1975г.
Р.А. Даишев, Б.С. Никитин «Уравнения математической физики», КГУ, 2005г.
Е.А. Широкова, В.А. Сочнева «Уравнения математической физики», КФУ, 2010г.
А.Н. Тихонов, А.А. Самарский «Уравнения математической физики» (Все здания).