УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2022, Т. 164, кн. 1 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 5–42 ISSN 2500-2198 (Online)

ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

УДК 512.546+515.1+517.986 doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.5-42

НАКРЫВАЮЩИЕ ГРУППЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ: ОБЗОР

Р.Н. Гумеров

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Дан обзор теорем о накрывающих группах и их приложений. При рассмотрении накрывающего отображения из топологического пространства на топологическую группу естественно возникает вопрос о подъеме групповой структуры с базы накрытия на его накрывающее пространство. Существуют ли на накрывающем пространстве групповые операции, после введения которых это пространство превращается в топологическую группу, а исходное накрывающее отображение – в морфизм топологических групп? Всякое утверждение, в котором дается положительный ответ на этот вопрос для какого-либо класса накрывающих отображений, называется теоремой о накрывающей группе. Представлены основные этапы доказательства теоремы о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на произвольные компактные связные группы. Эта теорема и метод ее доказательства имеют целый ряд интересных приложений в анализе, топологии и топологической алгебре. В настоящем обзоре приведены результаты о накрытиях топологических групп, полученные применением этой теоремы или с использованием аппроксимационной конструкции, построенной при ее доказательстве. К ним относятся теоремы, устанавливающие тесную связь между конечнолистными накрытиями компактных связных абелевых групп и многочленами над банаховыми алгебрами непрерывных функций, которые называются многочленами Вейерштрасса. Говоря неформально, все конечнолистные накрытия компактных связных абелевых групп определяются множествами нулей простых многочленов Вейерштрасса. Рассмотрены связные накрытия P-адических соленоидов. Полное описание таких конечнолистных накрытий получается с использованием упомянутой выше аппроксимационной конструкции. Описаны приложения теорем о накрывающих группах и их следствий к исследованию структуры конечнолистных накрытий и к проблеме существования обобщенных средних на топологических группах. Рассмотрены также приложения, связанные со свойствами решений алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение с непрерывными коэффициентами, многообразие Вейерштрасса, многочлен Вейерштрасса, накрывающая группа, накрывающее отображение на топологическую группу, накрывающий гомоморфизм, оверлей, P-адический соленоид, полиномиальное накрытие, теорема о накрывающей группе

Введение

В статье представлен обзор теорем о накрывающих группах и их приложений в анализе, топологии и топологической алгебре.

Пусть имеется накрывающее отображение $p : X \to G$ из топологического пространства X на топологическую группу G. При этом естественно поставить следующий *вопрос о подъеме групповой структуры* с базы накрытия G на накрывающее пространство X.

Существует ли на накрывающем пространстве накрытия $p : X \to G$ структура топологической группы такая, что ее групповые операции согласованы с исходной топологией пространства X, и накрытие p становится гомоморфизмом топологических групп после введения этой структуры на X?

Структуру топологической группы на пространстве X, указанную в этом вопросе, называют *накрывающей группой.* Получающийся после введения этой структуры непрерывный гомоморфизм топологических групп $p : X \to G$ называется *накрывающим гомоморфизмом.*

Мотивацией к решению задач, рассматриваемых в обзоре, послужил ряд фактов из топологической алгебры и функционального анализа.

Важнейшим источником для начала исследований накрывающих отображений из топологических пространств на топологические группы является классическая *теорема Понтрягина о накрывающей группе* [1, теорема 79], дающая положительный ответ на вопрос о поднятии групповой структуры для накрытий связных локально линейно связных групп. В ходе дальнейшего изложения аналогичные результаты для различных классов накрывающих отображений будут называться *теоремами о накрывающих группах.* Таким теоремам посвящена первая половина обзора. В ней, в частности, подробно обсуждается теорема о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на компактные связные группы, которые, вообще говоря, не являются локально связными. Эта теорема и метод ее доказательства имеют целый ряд приложений в различных областях математики. Важную роль в изучении накрывающих групп и гомоморфизмов играют накрывающие отображения, которые являются оверлеями. Этот факт отражен в тексте при обсуждении теорем о накрывающих группах для оверлеев над топологическими группами.

Другим источником для начала исследований, результаты которых представлены в данном обзоре, служит теория многочленов и алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами. В работах В.Л. Хансена [2, 3] многочлены с непрерывными коэффициентами называются *многочленами Вейерштрасса.* Понятие многочлена Вейерштрасса связано с подготовительной теоремой Вейерштрасса из теории голоморфных функций от нескольких переменных [4]. Говоря неформально, эта теорема сводит изучение геометрии множества нулей голоморфной функции от $n+1$ переменной к рассмотрению множества нулей унитарного многочлена относительно одной из переменных. Коэффициентами этого многочлена являются голоморфные функции от оставшихся n переменных.

Во второй половине обзора обсуждаются результаты о накрытиях групп, полученные как с применением самой теоремы о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных топологических пространств на произвольные компактные связные группы, так и с использованием аппроксимационной конструкции, построенной при ее доказательстве.

К этим результатам относятся теоремы, устанавливающие тесную связь между накрытиями абелевых групп и многочленами Вейерштрасса. Нестрого говоря, эти теоремы утверждают следующее. Всякое конечнолистное накрытие компактной связной абелевой группы определяется нулями простого многочлена Вейерштрасса. Более того, каждое такое связное накрытие определяется многообразием Вейерштрасса, задаваемым нулями конечного набора двучленов, коэффициентами которых являются характеры базы накрытия.

Весьма содержательный и интересный класс компактных связных не локально связных абелевых групп образуют P-адические соленоиды. Впервые соленоиды появились в работах Л. Вьеториса [5], Б.Л. ван дер Вардена и Д. ван Данцига [6–8] в первой трети прошлого столетия. Для заданной произвольной последовательности простых чисел $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ существуют различные эквивалентные способы определения P-адического соленоида Σ_P (см., например, [9, с. 286], [10, (10.12)]). Его стандартное геометрическое описание следующее. В трехмерном пространстве рассмотрим полноторие T_1, полученное вращением диска вокруг некоторой оси. Второй экземпляр T_2 такого же полнотория, наматывая p_1 раз вокруг оси T_1, вложим в T_1. Третий экземпляр полнотория T_3, наматывая p_2 раза вокруг оси T_2, вложим в T_2. В результате такого действия полноторие T_3 намотано p_1p_2 раза вокруг оси T_1. Продолжая этот процесс, мы получаем бесконечную последовательность вложенных друг в друга полноторий, пределом которой является *P-адический соленоид* Σ_P. Соленоиды играют важную роль в нашем изложении, в том числе для построения примеров. В работе рассматриваются связные накрытия P-адических соленоидов. Полное описание таких конечнолистных накрытий получается с использованием упомянутой выше аппроксимационной конструкции, а именно: всякое конечнолистное связное накрывающее отображение на P-адический соленоид эквивалентно эндоморфизму возведения в степень элементов этого соленоида.

В настоящем обзоре приводятся приложения теорем о накрывающих группах к исследованию структуры конечнолистных накрытий и к проблеме существования обобщенных средних на топологических группах. Напомним, что для натурального числа n, которое больше единицы, n-средним, или обобщенным средним, на топологическом пространстве X называется непрерывное идемпотентное симметричное отображение из n-й декартовой степени X в пространство X. Изучение средних началось в 1930 г. со статьи А.Н. Колмогорова [11] и было продолжено рядом авторов в связи с различными аналитическими и арифметическими задачами. В статье также обсуждаются приложения, связанные со свойствами решений алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами.

1. Предварительные сведения

Все топологические пространства, рассматриваемые в статье, предполагаются хаусдорфовыми. Множество всех натуральных чисел обозначим через $\mathbb{N}$, пространство всех комплексных чисел, снабженное естественной топологией, – через $\mathbb{C}$, декартово произведение m экземпляров пространства $\mathbb{C}$, где $m \in \mathbb{N}$, – через $\mathbb{C}^m$. Единичная окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ рассматривается как подпространство в $\mathbb{C}$ с естественными групповыми операциями и обозначается через $\mathbb{S}^1$. Значок $\bigsqcup$ обозначает дизъюнктное объединение множеств.

За исключением отображения в примере 2 мы будем иметь дело с накрывающими отображениями на связные пространства. Как известно, и это легко показать, каждое такое отображение является k-листным накрытием для некоторого кардинального числа k. Напомним, что сюръективное непрерывное отображение $p : X \to Y$ между топологическими пространствами X и Y называется *k-листным накрывающим отображением, или k-листным накрытием*, если оно обладает следующим свойством. Существуют множество индексов I мощности k и открытое покрытие $\mathcal{W} = \{W\}$ пространства Y такие, что полный прообраз $p^{-1}(W)$ каждого множества $W \in \mathcal{W}$ разбивается в пространстве X на непересекающиеся открытые множества W_i, $i \in I$, то есть имеет место равенство

$$p^{-1}(W) = \bigsqcup_{i \in I} W_i, \tag{1}$$

при этом для каждого индекса $i \in I$ отображение $p|_{W_i} : W_i \to W$, представляющее собой ограничение отображения p на W_i, является гомеоморфизмом. В этом случае X называется *накрывающим пространством*, а Y – *базой* накрывающего отображения p. Мощность k множества индексов I называется *кратностью* отображения p. В зависимости от того, конечна или бесконечна эта кратность, отображение $p : X \to Y$ называется соответственно *конечнолистным* или *бесконечнолистным* накрытием. Элементы покрытия $\mathcal{W}$ называются *правильно* (или *ровно*) *накрытыми окрестностями.* Семейство открытых множеств $\{W_i : i \in I\}$ в (1) называется *разбиением* полного прообраза $p^{-1}(W)$ *на слои.* Накрывающее отображение между связными пространствами будет называться *связным.* Напомним, что всякое накрывающее отображение является локальным гомеоморфизмом.

Накрывающие отображения $p : X \to Y$ и $q : Z \to Y$ называются *изоморфными* (или *эквивалентными*), если существует гомеоморфизм $\rho : X \to Z$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $p = q \circ \rho$.

Конечнолистное накрывающее отображение $p : X \to Y$ называется *тривиальным*, если оно изоморфно проекции декартова произведения $X \times \{1, \ldots, k\}$ на первую координату, где $k \in \mathbb{N}$.

Для $n \in \mathbb{N}$ топологическая сумма пространств $X_1, \ldots, X_n$ обозначается через $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ или $\bigoplus_{j=1}^n X_j$. Для топологических пространств $X_1, \ldots, X_n$ и Y, где $X_1, \ldots, X_n$ не пересекаются, *комбинацией отображений* $f_j : X_j \to Y$, $j = 1, \ldots, n$, будет называться отображение, задаваемое формулой

$$f_1 \triangledown \ldots \triangledown f_n : \ X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to Y : \ x \mapsto f_j(x),$$

где $x \in X_j$. Для двух семейств $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_n$, каждое из которых состоит из непересекающихся пространств, и набора отображений $f_j : X_j \to Y_j$, $j = 1, \ldots n$, формулой

$$f_1 \oplus \cdots \oplus f_n : \ X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n : \ x \mapsto f_j(x),$$

где $x \in X_j$, $j = 1, \ldots, n$, определяется сумма отображений $f_1, \ldots, f_n$.

Необходимые сведения из теории обратных спектров (или систем) и их обратных пределов содержатся, например, в книгах [9, гл. VIII, § 3] и [12, § 2.5].

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Аддитивная группа G называется *k-делимой*, если для любого элемента $g \in G$ существует элемент $h \in G$ такой, что выполняется равенство $kh = g$. При этом также говорят, что группа G *допускает деление на* k или что в группе G *возможно деление на* k.

Сведения о теории двойственности Понтрягина – ван Кампена можно посмотреть в [1, гл. 6] и [10, гл. 6]. *Характером* компактной абелевой группы G называется непрерывный гомоморфизм из группы G в группу $\mathbb{S}^1$. Дискретная группа всех характеров группы G обозначается через $\widehat{G}$. Для непрерывного гомоморфизма $\varphi : G_1 \to G_2$ между компактными абелевыми группами G_1 и G_2 через $\widehat{\varphi} : \widehat{G}_2 \to \widehat{G}_1$ обозначается *двойственный гомоморфизм* между группами их характеров, действующий по правилу $\widehat{\varphi}(\chi) = \chi \circ \varphi$, где χ – произвольный характер группы G_2.

Для компактного пространства X через $C(X)$ обозначается банахова алгебра комплекснозначных непрерывных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения и равномерной нормой.

2. Теоремы о накрывающих группах

В этом разделе рассмотрим теоремы о накрывающих группах для различных классов накрывающих отображений. Сначала остановимся на теореме Понтрягина о накрывающей группе. Далее рассмотрим конечнолистные накрытия на компактные связные группы и соответствующие им теоремы. Подробнее остановимся на доказательстве теоремы о накрывающей группе для конечнолистных накрывающих отображений из связных пространств на произвольные компактные связные группы. Это связано с тем, что, помимо самостоятельного интереса, эта теорема и аппроксимационная конструкция, построенная для ее доказательства, нашли приложения для решения ряда задач из различных областей математики. В конце раздела обсуждаются оверлеи над топологическими группами и соответствующие им теоремы о накрывающих группах.

2.1. Теорема Понтрягина для локально связных групп. Как было отмечено во введении, в случае накрывающих отображений между связными и локально линейно связными топологическими пространствами положительный ответ на вопрос о подъеме групповой структуры был дан Л.С. Понтрягиным в формулируемой ниже теореме [1, теорема 79].

Теорема 1. *Пусть $p : X \to G$ – накрывающее отображение из линейно связного топологического пространства X на связную локально линейно связную топологическую группу G с единичным элементом e. Тогда для каждой точки $x_0 \in p^{-1}(e)$ существует единственная структура топологической группы на пространстве X такая, что точка x_0 является ее единичным элементом, а $p : X \to G$ становится гомоморфизмом топологических групп. Более того, если группа G абелева, то отображение p является гомоморфизмом абелевых групп.*

Для доказательства этой теоремы используются факты классической теории накрывающих пространств и фундаментальной группы, в частности методы этой теории для решения задач подъема отображений в накрывающие пространства.

Как известно, так называемые задачи подъема и двойственные им задачи продолжения, отражающие специфику объектов и морфизмов исследуемых категорий, в той или иной форме возникают во многих областях математики (см., например, [13, предисловие, гл. III]).

При изучении вопроса о подъеме групповой структуры приходится, в частности, решать следующую *задачу подъема.* Можно ли определить непрерывное умножение m_X в X, являющееся «подъемом» относительно накрытия p непрерывного отображения $f : X \times X \to G$ из декартова квадрата пространства X в G, которое задается формулой

$$f(x, y) = p(x)p(y), \quad x,\, y \in X?$$

Это означает, что нужно построить умножение m_X, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "p"] \\ X \times X \arrow[ur, dashed, "m_X"] \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

коммутативной, то есть должно выполняться равенство $p \circ m_X = f$. Решить эту задачу подъема методами классической теории накрытий позволяет «хорошее» топологическое строение пространств X и G, а именно их связность и локальная линейная связность [1, § 51], [14, гл. 5]. Напомним, что последние два свойства влекут линейную связность пространств.

Под теоремой Понтрягина всюду в настоящей работе имеется в виду теорема 1. Из нее, в частности, следует существование накрывающей группы для накрывающего отображения из линейно связного пространства на группу Ли. В книге [1, § 51] эта теорема используется для изучения универсальных накрывающих групп.

Доказательство теоремы о накрывающей группе для накрытия с односвязным накрывающим пространством содержится в книгах К. Шевалле [15, гл. II, § VIII] и М.А. Наймарка [16, гл. VIII, § 3].

В 2002 г. А. Кларк [17] доказал теорему о накрывающей группе для расслоения над тором с нульмерным слоем, предположив при этом, что расслоенное пространство является континуумом со свойством однородности. В своем доказательстве он использовал действие аддитивной группы конечномерного вещественного пространства на расслоенном пространстве.

2.2. Накрывающие группы для соленоидальных групп. Теорема Понтрягина стоит у истоков исследований вопроса о подъеме групповой структуры на накрывающие пространства, которые проводились в недавнее время несколькими авторами. Результаты этих исследований представим ниже.

Естественно было поставить указанный вопрос в случае накрывающих отображений, у которых топологии накрывающих пространств и баз устроены сложнее, чем соответствующие топологии у накрывающих отображений, фигурирующих в теореме Понтрягина.

Первый шаг в изучении вопроса о подъеме групповой структуры относительно накрытия, у которого накрывающее пространство и база не являются, вообще говоря, ни линейно связными, ни локально связными, был сделан в 2000 г. в статье [18]. В ней рассматривались конечнолистные накрывающие отображения из связных пространств на компактные соленоидальные группы.

Напомним [10, (9.2)], что топологическая группа G называется *соленоидальной*, если существует непрерывный гомоморфизм $\tau : \mathbb{R} \to G$ из аддитивной группы вещественных чисел с естественной топологией $\mathbb{R}$ в G такой, что однопараметрическая группа $\tau(\mathbb{R})$ плотна в G.

Хорошо известно (см., например, [10, § 25]), что соленоидальные группы могут быть охарактеризованы в различных терминах. В частности, в теории топологических групп доказывается, что *компактная абелева группа соленоидальна тогда и только тогда, когда группа ее характеров изоморфна подгруппе группы всех вещественных чисел с дискретной топологией* [10, теорема (25.18)(iii)].

Используя естественно возникающее действие группы $\mathbb{R}$ на накрывающем пространстве компактной связной соленоидальной группы, авторы работы [18] доказали следующую теорему о накрывающей группе для связных конечнолистных накрытий компактных соленоидальных групп.

Теорема 2. *Пусть $p : X \to S$ – конечнолистное накрывающее отображение из связного топологического пространства X на компактную соленоидальную группу S с единичным элементом e. Тогда для каждой точки $x_0 \in p^{-1}(e)$ существует единственная структура топологической группы на пространстве X такая, что точка x_0 является ее единичным элементом, а $p : X \to S$ становится гомоморфизмом топологических групп.*

2.3. Накрывающие группы для произвольных связных групп. В статье [19] были анонсированы идея доказательства теоремы о накрывающей группе для связных конечнолистных накрытий компактных групп, а также ее приложения. Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Пусть $p : X \to G$ – конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную группу G с единичным элементом e. Тогда для любой точки $x_0 \in p^{-1}(e)$ существует единственная структура топологической группы на пространстве X такая, что точка x_0 является ее единичным элементом, а $p : X \to G$ становится гомоморфизмом компактных групп. Более того, если группа G абелева, то отображение p – гомоморфизм абелевых групп.*

Детальное изложение доказательства теоремы 3 содержится в работах [20, 21]. Таким образом, утверждение теоремы 2 было распространено на произвольные компактные связные группы.

Независимое доказательство теоремы, которая аналогична теореме 3, было опубликовано в 2006 г. в статье В. Матиевич и К. Эды [22, лемма 2.9, теорема 2.13 (1)].

В работах [19–22] для доказательства теоремы о накрывающей группе используется идея, восходящая к работе П.С. Александрова [23], об аппроксимации сложных топологических объектов более простыми и попытке переноса некоторых свойств вторых объектов на первые. Со временем эта идея оформилась в понятия обратного спектра и обратного предела.

Эти понятия, а также двойственные к ним понятия прямого спектра и прямого предела занимают исключительно важные места в современной математике, особенно в алгебре, анализе и топологии. Они носят общекатегорный характер и позволяют строить новые объекты и использовать развитую технику теории категорий и функторов.

Важной вехой в истории применения обратных спектров, имеющей непосредственное отношение к доказательству теоремы 3, стало глубокое исследование Л.С. Понтрягиным и А. Вейлем структуры топологических групп с использованием аппроксимации их группами Ли.

В статье [24, с. 220] отмечается, что Л.С. Понтрягин первым применил несчетные обратные спектры в виде так называемых рядов Ли $\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$, то есть вполне упорядоченных спектров, состоящих из групп Ли, и показал, что компактная группа G является обратным пределом ряда Ли. Доказательство теоремы 3 в работах [19–21] начинается с обращения к этому факту. А именно, для заданного k-листного накрывающего отображения $p : X \to G$, $k \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего условиям теоремы 3, в категории компактных групп и их непрерывных гомоморфизмов рассматривается обратный спектр $\{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}$ над направленным вверх множеством $(\Lambda, \prec)$ такой, что имеет место изоморфизм

$$(G, \{\pi_\lambda\}) \backsimeq \varprojlim \{G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda\}.$$

Отметим, что в этом обратном спектре все группы G_λ являются компактными связными группами Ли, а значит, локально линейно связными. Все связующие морфизмы $\pi_\lambda^\mu : G_\mu \to G_\lambda$, где $\lambda \prec \mu$, и проекции $\pi_\lambda : G \to G_\lambda$ являются открытыми сюръективными отображениями. Более того, если заданная группа G абелева, то и каждая группа G_λ будет абелевой (см., например, [25, §25], [26, предложение 1.33]).

В следующем предложении утверждается, что накрытие $p : X \to G$ аппроксимируется k-листными накрытиями групп G_λ, где индекс λ пробегает некоторое подмножество конфинальное в множестве Λ. Это предложение имеет самостоятельный интерес, в том числе, с категорной точки зрения.

Предложение 1. *Существуют обратный спектр $\{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda'\}$, состоящий из компактных пространств и их непрерывных отображений, над конфинальным подмножеством $\Lambda' \subset \Lambda$ и семейство k-листных связных накрывающих отображений $\{p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$, удовлетворяющие следующим условиям. Семейство $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\}$ является морфизмом между обратными спектрами компактных пространств $\{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda'\}$ и $\{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda'\}$, и его предельный морфизм*

$$\varprojlim\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\} : \varprojlim \{ X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda' \} \to \varprojlim \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda' \} \tag{2}$$

совпадает с точностью до изоморфизма с исходным накрытием $p : X \to G$.

Второе условие в предложении 1 означает, что существуют гомеоморфизмы $\rho : X \to \varprojlim \{ X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda' \}$ и $\sigma : G \to \varprojlim \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda' \}$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "p"'] & \varprojlim \{ X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda' \} \arrow[d, "\varprojlim\{p_\lambda \mid \lambda\in\Lambda'\}"] \\ G \arrow[r, "\sigma"] & \varprojlim \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda' \} \end{tikzcd} \tag{3}$$

коммутативна.

Далее, морфизм $\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\} : \{X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda'\} \to \{G_\lambda, \pi^\mu_\lambda, \Lambda'\}$ обратных спектров компактных пространств и их непрерывных отображений превращается в морфизм обратных спектров компактных групп и их непрерывных гомоморфизмов. Это делается следующим образом.

Сначала фиксируется точка $x_0 \in p^{-1}(e)$. Затем для каждого индекса $\lambda \in \Lambda'$ точка x_0 используется для выбора в пространстве X_λ точки x_λ, которая лежит в полном прообразе единицы группы G_λ под действием k-листного накрывающего отображения $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$. Применение теоремы Понтрягина к каждому отображению p_λ с фиксированной точкой $x_\lambda \in X_\lambda$ из слоя над единицей группы G_λ, где $\lambda \in \Lambda'$, позволяет наделить пространство X_λ структурой компактной группы такой, что накрывающее отображение p_λ становится морфизмом компактных групп. При этом если группа G абелева, то группа G_λ тоже абелева, и, по теореме Понтрягина, p_λ является гомоморфизмом между абелевыми группами X_λ и G_λ.

После этого доказывается, что все связующие отображения $h^\mu_\lambda : X_\mu \to X_\lambda$ обратного спектра $\{ X_\lambda, h^\mu_\lambda, \Lambda' \}$ становятся гомоморфизмами компактных групп. С этой целью для фиксированной пары индексов $\lambda, \mu \in \Lambda'$, удовлетворяющей соотношению $\lambda \prec \mu$, рассматривается задача подъема отображения

$$F : X_\mu \times X_\mu \to G_\lambda : (x, y) \mapsto p_\lambda \circ h^\mu_\lambda(xy),$$

где $x,\, y \in X_\mu$, относительно конечнолистного накрывающего отображения компактных связных групп $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$:

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"] \\ X_\mu \times X_\mu \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "F"] & G_\lambda \end{tikzcd} . \tag{4}$$

Коммутативность следующей диаграммы (гарантируемая предложением 1)

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[d, "p_\lambda"'] & X_\mu \arrow[l, "h_\lambda^\mu"'] \arrow[d, "p_\mu"] \\ G_\lambda & G_\mu \arrow[l, "\pi_\lambda^\mu"'] \end{tikzcd},$$

в которой отображения p_λ, p_μ и π_λ^μ являются непрерывными гомоморфизмами компактных групп, позволяет показать, что оба отображения F_1 и F_2, задаваемые формулами

$$F_1 :\ X_\mu \times X_\mu \to X_\lambda :\ (x, y) \mapsto h_\lambda^\mu(xy);$$

$$F_2 :\ X_\mu \times X_\mu \to X_\lambda :\ (x, y) \mapsto h_\lambda^\mu(x)h_\lambda^\mu(y),$$

где $x,\, y \in X_\mu$, являются решениями задачи подъема (4), то есть выполняются следующие равенства отображений:

$$p_\lambda \circ F_1 = F, \quad p_\lambda \circ F_2 = F. \tag{5}$$

Поскольку декартово произведение $X_\mu \times X_\mu$ является связным пространством, из (5) и из свойства единственности для поднятий относительно накрытий [27, гл. 2, § 2, теорема 2] вытекает равенство отображений $F_1 = F_2$, которое и означает, что связующее отображение $h_\lambda^\mu :\ X_\mu \to X_\lambda$ является гомоморфизмом групп.

Таким образом, семейство

$$\{p_\lambda \mid \lambda \in \Lambda'\} :\ \{X_\lambda, h_\lambda^\mu, \Lambda'\} \to \{\, G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda'\}$$

становится морфизмом обратных спектров в категории компактных групп и их морфизмов. Поэтому определяемый им предельный морфизм (2) является гомоморфизмом компактных групп. В случае абелевой группы G предельные группы $\varprojlim \{\, X_\lambda, h_\lambda^\mu, \Lambda' \,\}$ и $\varprojlim \{\, G_\lambda, \pi_\lambda^\mu, \Lambda' \,\}$ тоже абелевы.

Далее, свойства объектов и морфизмов в диаграмме (3) позволяют наделить накрывающее пространство X требуемой групповой структурой.

Наконец, остается заметить, что единственность построенной групповой структуры следует из упомянутого выше свойства единственности для поднятий отображений на накрывающие пространства [27, гл. 2, § 2, теорема 2].

В [28] приводится доказательство теоремы 3 с использованием лишь одного k-листного накрытия $p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda$ из предложения 1, где $\lambda \in \Lambda'$. В этом доказательстве групповая операция умножения на накрывающем пространстве X задается аналитически с помощью формулы (см. [28, формула (12)]), в записи которой участвует целый ряд функций. Этими функциями являются групповое умножение на накрывающем пространстве X_λ, вводимое с помощью теоремы Понтрягина, и отображения, построенные в ходе доказательства предложения 1, среди которых присутствует отображение вложения накрывающего пространства X в декартово произведение $X \times \mathbb{C}^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

В работе [22] для доказательства теоремы о накрывающей группе, являющейся аналогом теоремы 3, использовалось аппроксимационное построение из статьи С. Мардешича и В. Матиевич [29] по теории оверлеев и теорема Понтрягина. Результаты о накрывающих отображениях на топологические группы в обсуждаемой статье собраны в следующей теореме о накрывающей группе [22, теорема 2.13].

Теорема 4. *Пусть G – компактная связная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *Всякое конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства на G эквивалентно накрывающему гомоморфизму из компактной связной группы. Более того, если G абелева, то область определения накрывающего гомоморфизма тоже абелева компактная группа.*

(2) *Пусть даны конечнолистные накрывающие гомоморфизмы $p : X \to G$ и $p' : X' \to G$. Они эквивалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны как топологические гомоморфизмы.*

Ниже приводятся два примера, показывающие, что утверждение теоремы 3 перестает быть верным, если в ней отказаться от предположения о связности накрывающего пространства или базы накрытия.

Пример 1. Пусть $X_1 = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ и $X_2 = \mathbb{S}^1 \times \{2\}$. Для $k = 1, 2$ рассмотрим k-листное накрывающее отображение p_k, задаваемое формулой

$$p_k : \ X_k \to \mathbb{S}^1 : (z, k) \mapsto z^k, \quad z \in \mathbb{S}^1,$$

а также комбинацию отображений p_1 и p_2

$$p_1 \bigtriangledown p_2 : \ X_1 \oplus X_2 \to \mathbb{S}^1.$$

Ясно, что комбинация $p_1 \bigtriangledown p_2$ является трехлистным накрывающим отображением на окружность $\mathbb{S}^1$ с несвязным накрывающим пространством $X_1 \oplus X_2$.

Утверждается, что структура топологической группы из базы $\mathbb{S}^1$ не поднимается на накрывающее пространство $X_1 \oplus X_2$.

Доказательство. Для получения противоречия предположим, что на топологической сумме $X_1 \oplus X_2$ существует структура топологической группы, превращающая накрывающее отображение $p_1 \bigtriangledown p_2$ в непрерывный гомоморфизм групп.

Пусть единичный элемент группы $X_1 \oplus X_2$ лежит в слагаемом X_2. Ясно, что для каждого элемента $y \in X_1$ справедливо равенство $X_1 = yX_2$. Из него следует, что ограничения гомоморфизма $p_1 \bigtriangledown p_2$ на X_1 и X_2, совпадающие с p_1 и p_2 соответственно, имеют одинаковые кратности. Но это неверно.

Случай, когда единица группы $X_1 \oplus X_2$ принадлежит слагаемому X_2 аналогично приводит к противоречию. Таким образом, утверждение доказано. □

Пример 2. Обозначим через Y топологическое пространство $X_1 \oplus X_2$ из предыдущего примера. Рассмотрим еще два пространства

$$Y_j := Y \times \{j\}, \quad j = 0, 1,$$

и два отображения q_j, определяемые формулой

$$q_j : Y_j \to \mathbb{S}^1 \times \{j\} : \ (y, j) \mapsto (p_1 \bigtriangledown p_2(y), j), \quad y \in Y, \quad j = 0, 1.$$

Пусть $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ – дискретная группа порядка два, а $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$ – прямое произведение групп. Нетрудно видеть, что для накрывающего отображения

$$q_0 \oplus q_1 : \ Y_0 \oplus Y_1 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{Z}_2$$

ответ на вопрос о подъеме групповой структуры на накрывающее пространство отрицательный.

Вопрос о подъеме групповой структуры с базы накрытия несвязной топологической группы рассматривается в работах [30, 31]. В них, в частности, обсуждается в терминах когомологий препятствие к подъему групповой структуры.

В 2013 г В. Матиевич и К. Эда [32] показали существенность условия конечнолистности накрытия для положительного ответа на вопрос о подъеме групповой структуры на накрывающее пространство компактной связной группы. О соответствующем примере будет сказано в п. 3.3.

2.4. Оверлеи над топологическими группами. В работах [20, 21] была сформулирована гипотеза С.А. Богатого о справедливости утверждения теоремы о накрывающей группе для оверлеев, базами которых являются связные топологические группы.

Теорию оверлеев создал в 1972 г. Р. Фокс [33, 34] с целью переноса фактов классической теории накрывающих пространств на накрытия произвольных связных метрических пространств. При этом он использовал идеи теории шейпов. Т. Мур продолжил изучение оверлеев в [35]. В работе [29] теория оверлеев была распространена на все связные пространства.

Напомним (см., например, [33, 36]), что k-листное накрывающее отображение $p : X \to Y$ называется *k-листным оверлеем* над Y, если существует открытое покрытие $\mathcal{W}$ пространства Y правильно накрытыми окрестностями, удовлетворяющее следующему свойству. Если $V, W \in \mathcal{W}$ и $V \bigcap W \neq \emptyset$, то слои V_i и W_j в разложениях (1) прообразов $p^{-1}(V)$ и $p^{-1}(W)$ соответственно, где $i, j \in I$, можно так заиндексировать элементами множества I мощности k, что соотношение $V_i \bigcap W_j \neq \emptyset$ влечет равенство индексов $i = j$. Если пространства X и Y связны, то мы будем называть p *связным оверлеем.*

В статье [34] построено бесконечнолистное накрывающее отображение, не являющееся оверлеем. Аналогичный пример приводится в [37]. Однако заметим, что накрытие является оверлеем в таких важных случаях, когда база накрывающего отображения локально связна или когда накрытие конечнолистно [34, 35] (см. также [29, 36]).

Далее отметим, что всякий накрывающий гомоморфизм между топологическими группами является оверлеем. Этот факт содержится в формулировке следующего утверждения [32, теорема 2.2] (см. также [38, следствие 3.8]).

Предложение 2. *Пусть $p : H \to G$ – непрерывный эпиморфизм между топологическими группами H и G. Если существует открытая окрестность $A \subseteq H$ единицы $e_H \in H$ и открытая окрестность $B \subseteq G$ единицы $e_G \in G$ такие, что ограничение $p|_A : A \to B$ является гомеоморфизмом, то p – k-листный оверлей, где k – мощность ядра гомоморфизма p. В частности, каждый накрывающий гомоморфизм является оверлеем.*

В 2013 г. В. Матиевич, К. Эда [32] и Я. Дыдак [38] в 2016 г. доказали теорему о накрывающей группе для оверлеев над компактными связными топологическими группами (см. [32, теорема 2.4, следствие 2.5], [38, следствие 8.4]). Справедлив следующий результат [38, следствие 8.4].

Теорема 5. *Пусть $p : X \to G$ – оверлей из связного пространства X на компактную связную группу G. Тогда на накрывающем пространстве X существует структура топологической группы, превращающая p в гомоморфизм топологических групп, а его ядро – в конечно порожденную абелеву подгруппу в X.*

В работе [38] предложен подход к определению оверлеев, который напоминает определение паракомпактных пространств через сильно звездно вписанные открытые покрытия. При этом даются две характеризации оверлеев, которые, в частности, позволяют включить в формулировку теоремы 5 утверждение о ядре накрывающего гомоморфизма. Отметим также, что такой подход позволяет дать простое доказательство того, что бесконечнолистное накрывающее отображение из [34] не является оверлеем (см. [38, разд. 2]).

Дальнейшее глубокое исследование вопроса о подъеме групповой структуры на накрывающие пространства групп проведено в 2017 г. в статье В. Матиевич и К. Эды [39]. Целью этой статьи являлось обобщение ранее полученных теорем о накрывающих группах для накрытий локально линейно связных топологических групп и для оверлеев над компактными связными группами. Для достижения этой цели авторы ввели новое понятие p-компактно связного накрывающего пространства и его локальную версию.

Пусть $p : X \to Y$ – накрывающее отображение топологических пространств. Если для любых точек $a, b \in X$ существует (открытое) связное подмножество C в X такое что $a, b \in C$, и замыкание множества $p(C)$ компактно в Y, то пространство X называется *p-компактно (открыто) связным.* Накрывающее пространство X называется *локально p-компактно связным*, если для любой точки $a \in X$ и любой окрестности U точки a существует окрестность V этой точки такая, что для каждой точки $b \in V$ найдется замкнутое подмножество C в U, которое содержит обе точки a и b и для которого замыкание множества $p(C)$ компактно в Y (см. разд. 2 [39], где обсуждаются эти понятия). Заметим лишь, что у накрывающего отображения $p : X \to Y$ из связного пространства X на компактное пространство Y его накрывающее пространство X является p-компактно (открыто) связным. Более того, в статье [39, лемма 3.12] доказывается

Предложение 3. *Пусть $p : X \to G$ – накрывающее отображение из связного топологического пространства X на локально компактную группу G. Тогда X является p-компактно открыто связным пространством.*

Для связного оверлея $p : X \to G$, у которого накрывающее пространство X является p-компактно открыто связным, имеет место следующая теорема о накрывающей группе (см. [39, теорема 1.1, следствие 3.11]).

Теорема 6. *Пусть $p : X \to G$ – оверлей из связного пространства X на топологическую группу G и пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $p(x_0)$ – единица группы G. Если X является p-компактно открыто связным пространством, то на нем существует умножение $\cdot$ такое, что $(X, \cdot)$ – топологическая группа с единицей x_0, а p – гомоморфизм групп. Более того, если $x_0^\star \in X$ – другая точка, образ $p(x_0^\star)$ которой является единицей группы G, то топологическая группа $(X, \cdot^\star)$ изоморфна группе $(X, \cdot)$, где $\cdot^\star$ обозначает операцию умножения на X с единицей $x_0^\star$. Более того, если группа G абелева, то отображение $p : (X, \cdot) \to G$ является гомоморфизмом абелевых групп.*

Для связного накрывающего отображения $p : X \to G$, у которого накрывающее пространство X является локально p-компактно связным, справедлив следующий аналог теоремы 6 (см. [39, теорема 1.2, следствие 3.11]).

Теорема 7. *Пусть $p : X \to G$ – накрывающее отображение из связного пространства X на топологическую группу G и пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $p(x_0)$ – единица группы G. Если X является локально p-компактно связным пространством, то на нем существует умножение $\cdot$ такое, что $(X, \cdot)$ – топологическая группа с единицей x_0, а p – гомоморфизм групп. Более того, если*

$x_0^\star \in X$ – другая точка, образ $p(x_0^\star)$ которой является единицей группы G, то топологическая группа $(X, \cdot^\star)$ изоморфна группе $(X, \cdot)$, где "$\cdot^\star$" обозначает операцию умножения на X с единицей $x_0^\star$. Более того, если группа G абелева, то отображение $p : (X, \cdot) \to G$ является гомоморфизмом абелевых групп.

Накрывающие группы при доказательстве теорем 6 и 7 строятся с помощью поднятия цепей открытых множеств. Как отмечают авторы статьи [39, разд. 3], при этом они следовали идее доказательства теоремы Понтрягина для связных и локально линейно связных пространств, где требуемая групповая структура вводится с помощью поднятия путей.

Из предложения 3 и теоремы 6 немедленно следует существование накрывающей группы в накрывающем пространстве оверлея над локально компактной группой [39, следствие 3.13]. Этот факт обобщает соответствующее утверждение из теоремы 5 (см. также [32, теорема 2.4, следствие 2.5]) о существовании накрывающих групп для оверлеев над компактными группами. Формулировка следствия 3.13 из [39] такова:

Теорема 8. *Пусть $p : X \to G$ – оверлей из связного пространства X на локально компактную группу G и пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $p(x_0)$ – единица группы G. Тогда существует структура топологической группы на пространстве X, превращающая X в топологическую группу с единицей x_0, а $p : X \to G$ – в гомоморфизм групп. Более того, если группа G абелева, то отображение p – гомоморфизм абелевых групп.*

Ясно, что локально линейно связное пространство X является локально p-компактно связным для любого накрывающего отображения $p : X \to Y$. Эта импликация позволяет рассматривать теорему 7 как обобщение теоремы Понтрягина.

Единственность накрывающих групп, рассматриваемых в [39], утверждается в следующей теореме [39, теорема 1.3].

Теорема 9. *Пусть $p : X \to G$ – накрывающее отображение из связного пространства X на топологическую группу G и пусть точка $x_0 \in X$ такая, что $p(x_0)$ – единица группы G. Пусть выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$p : X \to G$ является оверлеем и группа G локально компактна;*

(2) *X является локально p-компактно связным пространством.*

Тогда существует единственная групповая структура на накрывающем пространстве X, превращающая X в топологическую группу с единицей x_0, а p – в гомоморфизм групп.

3. Приложения теорем о накрывающих группах

Данный раздел посвящен приложениям теорем о накрывающих группах. При этом в основном рассматриваются приложения теоремы 3 к конечнолистным накрывающим отображениям на произвольные компактные связные абелевы группы. Подробные доказательства большинства приведенных результатов приводятся в диссертации автора настоящего обзора [40]. Теорема 3 позволяет привлечь понятия и хорошо разработанные методы теории двойственности Понтрягина – ван Кампена для изучения свойств накрывающих отображений на компактные абелевы группы.

3.1. Многочлены Вейерштрасса и полиномиальные накрытия. Исследованием свойств многочленов Вейерштрасса и алгебраических уравнений с непрерывными коэффициентами, заданными на различных топологических пространствах, занимались многие авторы.

Д. Деккард, К. Пирси [41, 42] и Р.С. Кантриман [43] в 60-х годах прошлого столетия изучали вопрос о характеризации компактов X таких, что всякий унитарный (со старшим коэффициентом равным единице) многочлен над банаховой алгеброй $C(X)$ имеет корень в этой алгебре. В таком случае говорят, что $C(X)$ *алгебраически замкнута*. Они показали, что для алгебраически замкнутой банаховой алгебры $C(X)$ компакт X удовлетворяет довольно жестким топологическим условиям. К примеру [43], в нем нет подпространств, которые гомеоморфны окружности.

Е.А. Горин и В.Я. Лин в работе [44] рассматривали алгебраические уравнения, определяемые сепарабельными, называемыми также простыми, многочленами Вейерштрасса. Одной из отправных точек их исследования послужило доказательство В.В. Жиковым [45] классической теоремы Вальтера – Бора – Фландерса [46–48] о решениях алгебраического уравнения с почти периодическими коэффициентами на вещественной оси. Как хорошо известно, алгебру почти периодических функций можно реализовать как алгебру всех непрерывных функций на компактификации Бора [10, (26.11)], являющейся связной абелевой группой. В статье [44] получены различные условия на компакт X, гарантирующие *полную разрешимость* уравнений степени n, означающую наличие у уравнения n строго различных решений в алгебре $C(X)$.

Результаты исследований свойств алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами и их связь с группами кос Артина обсуждаются в обзоре В.Я. Лина [49].

Изучению вопроса о характеризации алгебраической замкнутости алгебры $C(X)$ посвящен цикл статей Т. Миуры, О. Хатори, К. Ниидзимы, К. Кавамуры и Д. Хонмы [50–55]. В них получены различные необходимые и достаточные условия для выполнения этого свойства. В частности, показано, что для компакта X, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, алгебраическая замкнутость $C(X)$ эквивалентна возможности извлечения квадратного корня в этой алгебре.

В работах [2, 3, 56] В.Л. Хансен начал исследование тесной связи, существующей между многочленами Вейерштрасса и накрывающими отображениями, так как с каждым простым многочленом Вейерштрасса с непрерывными комплексно-значными коэффициентами, определенными на связном топологическом пространстве, ассоциируется конечнолистное полиномиальное накрывающее отображение.

Перейдем к основным определениям и фактам о многочленах с непрерывными коэффициентами и о полиномиальных накрытиях (см. [3, 57]).

Всюду далее в этом разделе G будет обозначать произвольную компактную связную абелеву группу.

Многочленом Вейерштрасса степени $n \in \mathbb{N}$ над банаховой алгеброй $C(G)$ или над группой G называется полиномиальная функция

$$R : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \tag{6}$$

значения которой задаются формулой

$$R(g, z) = z^n + f_1(g)z^{n-1} + f_2(g)z^{n-2} + \cdots + f_n(g), \tag{7}$$

в которой коэффициенты $f_1, \ldots, f_n : G \to \mathbb{C}$ являются непрерывными комплекснозначными функциями на G, $g \in G$ и $z \in \mathbb{C}$.

Таким образом, на многочлен Вейерштрасса можно смотреть как на параметрическое семейство унитарных многочленов одной и той же степени над полем $\mathbb{C}$, коэффициенты которых изменяются непрерывно в зависимости от изменения параметра $g \in G$.

Теперь напомним определение простых многочленов Вейерштрасса и задаваемых ими полиномиальных накрывающих отображений.

Многочлен Вейерштрасса (6) называется *простым* (или *сепарабельным*), если для каждого элемента $g \in G$ многочлен

$$R(g,x) = x^n + f_1(g)x^{n-1} + f_2(g)x^{n-2} + \cdots + f_n(g)$$

от переменной x с комплексными коэффициентами не имеет кратных корней в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть задан произвольный простой многочлен Вейерштрасса R степени n над G. Рассмотрим множество его нулей

$$E(R) = \{(g,z) \in G \times \mathbb{C} \mid R(g,z) = 0\}$$

как подпространство декартова произведения $G \times \mathbb{C}$, а вместе с ним и проекцию на первую координату

$$pr : E(R) \to G : \ (g,z) \mapsto g,$$

которая является n-листным накрывающим отображением [3, предложение 3.2]. Следствием этого является следующее понятие.

Проекция $pr : E(R) \to G$ называется *n-листным полиномиальным накрывающим отображением*, а пространство $E(R)$ – *n-листным полиномиальным накрывающим пространством над G*, определяемым простым многочленом Вейерштрасса R над G.

Пример 3. Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим простой многочлен Вейерштрасса

$$R(g,z) = (z-1)\cdot(z-2)\cdot\ldots\cdot(z-n).$$

Полиномиальное накрывающее отображение, определяемое этим многочленом, является проекцией на первую координату

$$G \times \{1,2,\ldots,n\} \to G : \ (g,l) \mapsto g, \quad l = 1,2,\ldots,n.$$

Заметим, что всякое конечнолистное накрытие окружности $\mathbb{S}^1$ эквивалентно полиномиальному накрытию [3, теорема 8.3], [58, теорема 2.1]. В статье В.Г. Бардакова и А.Ю. Веснина [59] исследованы многочлены Вейерштрасса с непрерывными коэффициентами на $\mathbb{S}^1$ и построен алгоритм, позволяющий описать все конечнолистные накрытия $\mathbb{S}^1$ с точностью до эквивалентности.

Отметим, что большую роль в работах [44, 57–59] играют группы кос Артина.

Полиномиальным накрывающим отображениям и их классификации посвящена статья Дж.М. Моллера [60], содержащая ответы на некоторые вопросы, сформулированные в [2, 3].

Сам В.Л. Хансен продолжил свое исследование в [61–63], результаты которого вошли в его монографию [57], изданную Лондонским математическим обществом в 1989 г. В работе [64] строится теория Галуа для расширений функциональных алгебр, связанных с многочленами Вейерштрасса и полиномиальными накрытиями.

В.Л. Хансен указал критерий [3, теорема 5.1], при котором конечнолистное накрывающее отображение $p : E \to X$, базой которого является связное топологическое пространство X, эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению. Для его формулировки нам понадобится следующее определение.

Будем говорить, что конечнолистное накрывающее отображение $p : E \to X$ из топологического пространства E на связное топологическое пространство X *вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение* над X, если существует такое непрерывное отображение $h : E \to X \times \mathbb{C}$, называемое *вложением*, которое отображает E гомеоморфно на его образ $h(E)$ в декартовом произведении $X \times \mathbb{C}$ и делает диаграмму

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & X \times \mathbb{C} \arrow[dl, "pr"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативной, то есть $pr \circ h = p$, где pr – проекция на первую координату:

$$X \times \mathbb{C} \to X : (x, z) \mapsto x, \quad x \in X, \ z \in \mathbb{C}.$$

Имеет место следующий критерий [3, теорема 5.1].

Конечнолистное накрывающее отображение $p : E \to X$ из топологического пространства E на связное топологическое пространство X эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению тогда и только тогда, когда оно вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение над X.

Теорема 3 о накрывающей группе позволяет применить этот критерий для конечнолистных накрытий компактных связных абелевых групп и установить следующий результат [21, теорема 5].

Теорема 10. *Всякое конечнолистное накрывающее отображение $p : X \to G$ из топологического пространства X на связную компактную абелеву группу G эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению.*

Отметим, что накрывающее пространство X в теореме 10 может быть как связным, так и несвязным.

Доказательство этой теоремы в работе [21] проводится в два этапа.

На первом этапе рассматривается связное k-листное накрывающее отображение $p : X \to G$, $k \geqslant 2$. К этому накрытию применяется теорема 3, то есть пространство X снабжается структурой компактной связной абелевой группы, превращающей отображение $p : X \to G$ в непрерывный гомоморфизм групп.

Далее строится вложение k-листного накрывающего гомоморфизма $p : X \to G$ в тривиальное комплексное линейное расслоение над G. Ключевую роль в этом построении играет возможность использования фактов теории двойственности компактных абелевых групп, а именно: рассматривается ядро гомоморфизма $p : X \to G$, которое является конечной подгруппой в группе X порядка k, и берутся все его характеры $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1}$ за исключением тождественного характера. Затем каждый из этих характеров χ_j продолжается до характера $\widetilde{\chi}_j$ всей группы X. Сделать это позволяет лемма 24.4 из [10]. Следующим шагом определяется функция $f : X \to \mathbb{C}$ как линейная комбинация характеров

$$f := \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \widetilde{\chi}_j, \tag{8}$$

где комплексные коэффициенты выбираются так, чтобы f была инъекцией.

Компактность пространства X гарантирует, что накрывающее отображение $p : X \to G$ вкладывается в тривиальное комплексное линейное расслоение над G с помощью отображения

$$h : \ X \to G \times \mathbb{C} : \ x \mapsto (p(x), f(x)), \quad x \in X.$$

Заметим, что при доказательстве теоремы 10 в [21] простой многочлен Вейерштрасса (7), порождающий полиномиальное накрытие, которое эквивалентно исходному k-листному накрывающему отображению $p : X \to G$, выписывается явно. При этом непрерывные функциональные коэффициенты $f_n : G \to \mathbb{C}$ этого многочлена Вейерштрасса задаются формулой, в записи которой участвуют элементарные симметрические многочлены и построенная функция (8). А именно, для каждого $n = 1, 2, \ldots, k$

$$f_n(g) := (-1)^n S_n(f(x_1(g)), f(x_2(g)), \ldots, f(x_k(g))),$$

где $g \in G$, S_n – элементарный n-й симметрический многочлен от k переменных, а набор точек $x_1(g), x_2(g), \ldots, x_k(g)$ является полным прообразом $p^{-1}(g)$.

На втором этапе доказательства теоремы 10 рассматривается k-листное накрывающее отображение $p : X \to G$, $k \geqslant 2$, с несвязным накрывающим пространством X.

Для построения полиномиального накрывающего отображения, которому будет эквивалентно накрытие p, пространство X разбивается на свои компоненты связности X_j и отождествляется с их топологической суммой

$$X = \bigoplus_{j=1}^{n} X_j.$$

Рассматривая ограничения накрытия $p : X \to G$ на компоненты связности, мы имеем связные k_j-листные накрывающие отображения $p|_{X_j} : X_j \to G$ такие, что натуральные числа k_j удовлетворяют неравенствам $k_j < k$, а для их суммы выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} k_j = k.$$

К каждому конечнолистному накрывающему отображению $p|_{X_j} : X_j \to G$ применяется первый этап доказательства теоремы 10. В результате делается заключение, что накрытие $p|_{X_j} : X_j \to G$ эквивалентно некоторому полиномиальному накрывающему отображению $\widetilde{p}_j : Y_j \to G$, определяемому простым многочленом Вейерштрасса степени k_j над банаховой алгеброй $C(G)$, который имеет вид

$$R_j(g, z) = z^{k_j} + f_{1j}(g) z^{k_j - 1} + f_{2j}(g) z^{k_j - 2} + \cdots + f_{k_j j}(g),$$

где $f_{lj} \in C(G)$, $l = 1, 2, \ldots, k_j$ и $g \in G$. При этом пространство Y_j задается равенством

$$Y_j := \{(g, z) \in G \times \mathbb{C} :\ z^{k_j} + f_{1j}(g) z^{k_j - 1} + \cdots + f_{k_j j}(g) = 0\},$$

и существует гомеоморфизм $\phi_j : X_j \to Y_j$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dr, "p|_{X_j}"'] & & Y_j \arrow[dl, "\widetilde{p}_j"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть имеет место равенство $p|_{X_j} = \widetilde{p}_j \circ \phi_j$.

Далее, для произвольного числа $z_0 \in \mathbb{C}$ множество нулей простого многочлена Вейерштрасса $R_j(g, z+z_0)$, где $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$, будет обозначаться через

$$Y_j(z_0) := \{(g,z) \in G \times \mathbb{C}: \ (z+z_0)^{k_j} + f_{1j}(g)(z+z_0)^{k_j-1} + \cdots + f_{k_j j}(g) = 0\}.$$

Ясно, что топологические пространства Y_j и $Y_j(z_0)$ гомеоморфны.

Поскольку для произвольной точки (g,z), лежащей в пространстве Y_j, справедлива оценка

$$|z| \leqslant 1 + \max\{\|f_{lj}\|: \ l = 1,2,\ldots,k_j\},$$

где $\|\cdot\|$ – равномерная норма на банаховой алгебре $C(G)$, то можно выбрать числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, для которых при $j \neq l$ справедливо соотношение

$$Y_j(\alpha_j) \bigcap Y_l(\alpha_l) = \emptyset.$$

Обозначим через $\widetilde{q}_j$ проекцию пространства $Y_j(\alpha_j)$ на первую координату, а через ψ_j – гомеоморфизм пространства Y_j на пространство $Y_j(\alpha_j)$ такой, что имеет место равенство

$$\widetilde{p}_j = \widetilde{q}_j \circ \psi_j.$$

Тогда отображение $\theta_j : X_j \to Y_j(\alpha_j)$, задаваемое как композиция гомеоморфизмов

$$\theta_j := \psi_j \circ \phi_j,$$

является гомеоморфизмом, удовлетворяющим равенству

$$p|_{X_j} = \widetilde{q}_j \circ \theta_j.$$

Доказательство второго этапа и всей теоремы 10 завершается рассмотрением коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{j=1}^n X_j \arrow[rr, "\theta_1 \oplus \cdots \oplus \theta_n"] \arrow[dr, "p"'] & & \bigoplus\limits_{j=1}^n Y_j(\alpha_j) \arrow[dl, "\widetilde{q}_1 \nabla \cdots \nabla \widetilde{q}_n"] \\
& G &
\end{tikzcd},$$

в которой сумма гомеоморфизмов $\theta_1 \oplus \cdots \oplus \theta_n$ сама является гомеоморфизмом, а комбинация отображений $\widetilde{q}_1 \nabla \cdots \nabla \widetilde{q}_n$ является k-листным накрывающим отображением, определяемым простым многочленом Вейерштрасса

$$R(g,z) = \prod_{j=1}^n R_j(g, z+\alpha_j)$$

степени k над банаховой алгеброй $C(G)$.

В завершение этого пункта отметим, что теорема 10 перестает быть верной для неабелевых компактных связных групп. Требуемое накрытие нам позволяет построить теорема 3.7 из [57, гл. III]. Из нее следует, что хорошо известное (см., например, [16, с. 181]) двухлистное накрывающее отображение из специальной унитарной группы $SU(2)$ в группу $SO(3)$ вращений трехмерного пространства неэквивалентно полиномиальному накрытию.

3.2. Многообразия Вейерштрасса и связные накрытия абелевых групп. Исследованию связи между конечнолистными накрывающими отображениями на компактные связные абелевы группы и непрерывными многообразиями Вейерштрасса посвящена наша статья [65].

Пусть дано конечное семейство многочленов Вейерштрасса $P_1, \dots, P_m$ над алгеброй $C(G)$. Подпространство $E(P_1, \dots, P_m)$ декартова произведения $G \times \mathbb{C}^m$, задаваемое формулой

$$E(P_1, \dots, P_m) = \{(g, z_1, \dots, z_m) \mid g \in G,\ z_j \in \mathbb{C},\ P_j(g, z_j) = 0,\ j = 1, \dots, m\},$$

называется *непрерывным многообразием Вейерштрасса*, порождаемым многочленами $P_1, \dots, P_m$.

Имеет место следующая теорема [65, теорема 1].

Теорема 11. *Пусть $p : X \to G$ – k-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу G, $k \in \mathbb{N}$. Тогда существуют конечный набор характеров $\chi_1, \dots, \chi_m$ группы G и натуральные числа $k_1, \dots, k_m$ такие, что накрытие $p : X \to G$ эквивалентно отображению проектирования на первую координату многообразия Вейерштрасса, порождаемого многочленами*

$$R_1(g, z) = z^{k_1} - \chi_1(g), \dots, R_m(g, z) = z^{k_m} - \chi_m(g), \tag{9}$$

где $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$. При этом степени многочленов Вейерштрасса $R_1, \dots, R_m$ связаны с кратностью k накрывающего отображения $p : X \to G$ соотношением

$$k = k_1 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

Многочлены Вейерштрасса, указанные в теореме 11, начинают строиться, как и при доказательстве теоремы 10, с применения теоремы 3 о накрывающей группе для конечнолистных связных накрытий компактных групп. А именно, в силу теоремы 3, на накрывающем пространстве X заданного связного k-листного накрытия $p : X \to G$ вводят структуру компактной связной абелевой группы, которая превращает отображение p в непрерывный гомоморфизм абелевых групп. Тогда ядро этого гомоморфизма $\mathrm{Ker}(p)$ является дискретной подгруппой порядка k в группе X.

Далее в предположении, что $k > 1$, рассматривается разложение ядра $\mathrm{Ker}\,(p)$ в прямое произведение своих подгрупп

$$\mathrm{Ker}\,(p) = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \dots \times \langle x_m \rangle, \tag{10}$$

где $\langle x_j \rangle$ – циклическая подгруппа порядка $k_j \geqslant 2$ с образующим элементом $x_j \in \mathrm{Ker}\,(p)$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть для каждого индекса $j = 1, \dots, m$ символ $\psi_{0j} : \mathrm{Ker}\,(p) \to \mathbb{S}^1$ обозначает характер группы $\mathrm{Ker}\,(p)$, задаваемый равенством

$$\psi_{0j}(x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}) = \exp\left(i\, \frac{2\pi n_j}{k_j}\right),$$

где $0 \leqslant n_j \leqslant k_j - 1$, $n_j \in \mathbb{N}$, i – мнимая единица. Тогда всякий характер конечной группы $\mathrm{Ker}(p)$ имеет вид [10, (23.27)(d)]

$$\psi_{01}^{n_1} \psi_{02}^{n_2} \cdots \psi_{0m}^{n_m} :\ \mathrm{Ker}\,(p) \to \mathbb{S}^1,$$

где $0 \leqslant n_j \leqslant k_j - 1$, $n_j \in \mathbb{N}$.

Лемма 24.4 из [10] позволяет продолжить каждый характер ψ_{0j} до характера ψ_j всей группы X.

Легко видеть, что в группе $\widehat{X}$ характер $\psi_j^{k_j}$ лежит в аннуляторе группы $\mathrm{Ker}(p)$. Таким образом, выполняется равенство

$$\psi_j^{k_j}(\mathrm{Ker}(p)) = \{1\}.$$

Следовательно [10, теорема 24.40], существует характер $\chi_j \in \widehat{G}$ такой, что справедливо равенство

$$\psi_j^{k_j} = \widehat{p}(\chi_j).$$

С использованием аппарата теории двойственности Понтрягина – ван Кампена показывается, что построенные характеры χ_j и указанные числа k_j – порядки циклических подгрупп в разложении (10) – определяют требуемые многочлены (9).

Из доказательства теоремы 11 следует

Теорема 12. *Пусть $p : X \to G$ – k-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную связную абелеву группу G, где k – простое число. Тогда у группы G существует такой характер χ, что накрытие $p : X \to G$ эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению, определяемому простым многочленом Вейерштрасса*

$$R(g, z) = z^k - \chi(g),$$

где $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$.

Заметим, что накрытие простой группы $SO(3)$, которое указано в п. 3.1, показывает, что теорема 12 неверна для неабелевых компактных связных групп

3.3. Накрывающие отображения на P-адические соленоиды. Пусть $P = (p_1, p_2, p_3, \ldots)$ – произвольная последовательность простых чисел. *P-адическим соленоидом* Σ_P называется обратный предел обратной последовательности

$$\mathbb{S}^1 \xleftarrow{\;f_1^2\;} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\;f_2^3\;} \mathbb{S}^1 \xleftarrow{\;f_3^4\;} \cdots, \tag{11}$$

состоящей из копий компактной группы $\mathbb{S}^1$ и связующих гомоморфизмов f_n^{n+1}, являющихся накрывающими отображениями возведения в степень: $f_n^{n+1}(z) = z^{p_n}$, где $z \in \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{N}$. При $P = (2, 2, 2, \ldots)$ соленоид $\Sigma_{(2,2,2,\ldots)}$ называется *диадическим.* Таким образом, используя стандартное обозначение для обратного предела, мы можем написать

$$\Sigma_P = \varprojlim \left\{\mathbb{S}^1, f_n^{n+1}, \mathbb{N}\right\} = \left\{(z_1, z_2, z_3, \ldots) :\ z_n \in \mathbb{S}^1, z_{n+1}^{p_n} = z_n, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Диадический соленоид построил в 1927 г. Л. Вьеторис [5] при изучении алгебраических характеристик топологических пространств. Определение произвольного P-адического соленоида дано в статье Д. ван Данцига [8] в 1936 г. Он рассматривал соленоиды с точки зрения пространств, наделенных свойством однородности, и, в частности, дал их топологическую классификацию.

В 1965 г. М. Маккорд [66] исследовал пределы обратных последовательностей топологических пространств, связующими отображениями которых являются накрывающие отображения. Он завершил классификацию P-адических соленоидов, подтвердив гипотезу, выдвинутую Р. Бингом [67], которая утверждала, что класс топологической эквивалентности, определяемый P-адическим соленоидом Σ_P, характеризуется набором простых чисел и количеством их вхождений в последовательность P. Заметим, что простое доказательство классификационной теоремы для соленоидов содержится в [68].

Относительно покоординатных групповых операций P-адический соленоид Σ_P является метризуемой компактной связной абелевой группой с единицей $(1, 1, \dots)$ [10, гл. 2, § 10], при этом пространство Σ_P не является локально связным ни в одной точке [66].

Группа характеров $\widehat{\Sigma}_M$ соленоида Σ_P изоморфна (см., например, [10, (25.3)], [69, лемма 1]) дискретной аддитивной группе рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$:

$$\widehat{\Sigma}_P \simeq \mathbb{Q}_P := \left\{ \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}. \tag{12}$$

Используя этот изоморфизм и теорему 2, мы заключаем, что группа Σ_P является соленоидальной.

Таким образом, в силу теоремы 2, для всякого связного конечнолистного накрытия P-адического соленоида $p : X \to \Sigma_P$ найдется структура топологической группы на X такая, что после ее введения, отображение p становится накрывающим гомоморфизмом между компактными абелевыми группами.

Различные свойства конечнолистных накрывающих отображений P-адических соленоидов исследовали Ч. Юйчэн [70], Я. Квапиш [71], П. Коваррубиас, Я. Харатоник [72], Я. Аартс, Р. Фоккинк [73], В. Матиевич [36], автор настоящего обзора [74, 75], С. Ван, Б. Цзян, Х. Чжэн [76] и др. В качестве примеров приложения теории оверлеев накрытия соленоидов рассмотрены в работах Р. Фокса [33, 34].

Ч. Юйчэн [70], П. Коваррубиас и Я. Харатоник [72] исследовали различные свойства эндоморфизмов возведения в степень элементов диадического соленоида $\Sigma_{(2,2,2,\dots)}$. Такой эндоморфизм рассматривался ими в качестве предельного отображения, индуцируемого морфизмом между двумя копиями одной и той же обратной последовательности (11), пределом которой служит диадический соленоид $\Sigma_{(2,2,2,\dots)}$. Было, в частности, показано, что эндоморфизмы возведения в степень являются конечнолистными накрытиями и изучена их кратность.

В следующих трех теоремах дается описание конечнолистных связных накрытий произвольного P-адического соленоида.

Теорема 13. *Если у числа $k \in \mathbb{N}$ имеется простой делитель, который равен бесконечному числу членов последовательности простых чисел P, то у P-адического соленоида не существует k-листного связного накрывающего пространства.*

Теорема 14. *Если у числа $k \in \mathbb{N}$ нет простого делителя, который равен бесконечному числу членов последовательности простых чисел P, то эндоморфизм*

$$h_P^k : \Sigma_P \to \Sigma_P : g \mapsto g^k, \quad g \in \Sigma_P,$$

возведения в степень k элементов группы Σ_P является k-листным накрывающим отображением.

Теорема 15. *Пусть $p : X \to \Sigma_P$ – k-листное связное накрывающее отображение на P-адический соленоид Σ_P, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда накрытие p эквивалентно эндоморфизму возведения в степень k элементов группы Σ_P.*

Утверждения этих теорем независимо доказали В. Матиевич в [36](см. теорему 8 и ее доказательство) и автор настоящего обзора в [74, 75] (см. в них теорему 2 и замечание 2). Для их доказательства в [36] применяется развиваемая в этой работе теория конечнолистных накрытий паракомпактных пространств с использованием фактов теории оверлеев из [29]. В [74, 75] используются методы работ [70, 72] и, для доказательства теоремы 15, применяется аппроксимирующее семейство

$$\{p_\lambda : X_\lambda \to G_\lambda = \mathbb{S}^1 \mid \lambda \in \Lambda'\}$$

конечнолистных накрывающих отображений из предложения 1.

Отметим также статью С.А. Богатого и О.Д. Фролкиной [77, см. предложение 5, следствие 5], в которой используется аппроксимация конечнолистного накрытия континуума (ср. с леммами 11, 23 из [29] и предложением 1) и содержатся ссылки на работы, в которых применяются подобные конструкции.

Кроме того, заметим, что С. Ван, Б. Цзян и Х. Чжэн [76] получили независимое доказательство того, что *каждое связное конечнолистное накрывающее пространство P-адического соленоида Σ_P гомеоморфно пространству Σ_P.*

С.А. Богатый и О.Д. Фролкина в § 5 [69] по обобщенным соленоидам изучили вопрос о существовании накрытий обобщенных соленоидов. Они использовали теорему 3 о накрывающей группе для доказательства результата [69, теорема 15], являющегося обобщением теоремы 13. Для формулировки следующего утверждения, являющегося частным случаем теоремы 15 из [69], введем обозначение. Пусть G – компактная связная группа Ли. Для произвольной последовательности простых чисел P мы обозначим через G_P пространство, являющееся обратным пределом обратной последовательности, получающейся из последовательности (11), определяющей P-адический соленоид, после замены в ней всех копий $\mathbb{S}^1$ на G. Пространство G_P называется *обобщенным соленоидом.*

Теорема 16. *Если G – компактная связная группа Ли и некоторый простой делитель числа $k \in \mathbb{N}$ равен бесконечному числу членов последовательности простых чисел P, то у обобщенного соленоида G_P не существует связного k-листного накрытия.*

Я.П. Боронски и Ф. Штурм [78], используя теорию оверлеев Р. Фокса, получили характеризацию конечнолистных накрывающих пространств псевдосоленоидов, которая аналогична приведенной выше характеризации конечнолистных связных накрытий P-адических соленоидов.

Следует заметить, что результаты о конечнолистных накрывающих отображениях P-адических соленоидов из статьи [75] нашли приложения в теории C^*-алгебр. В статье Н. Браунлоу и И. Рэйбёрна [79] эти результаты применяются для изучения скрещенных произведений C^*-алгебр. Они используются также для изучения автоморфизмов C^*-алгебр, являющихся пределами индуктивных (прямых) последовательностей редуцированных полугрупповых C^*-алгебр [80–82]. Кроме того, эти результаты послужили одной из отправных точек для начала исследования индуктивных систем C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами и их индуктивных пределов в работах [83–88]. Отметим также, что в статье [81, теорема 5] содержится подробное доказательство теоремы 15.

В 2013 г. В. Матиевич и К. Эда [32, теорема 3.1, следствие 3.2], используя технику теории шейпов и факты теории оверлеев, получили следующий результат, содержащий отрицательный ответ на вопрос о подъеме групповой структуры на накрывающее пространство P-адического соленоида.

Теорема 17. *Для каждого P-адического соленоида Σ_P существует бесконечнолистное связное накрывающее отображение $f : X \to \Sigma_P$ такое, что накрывающее пространство X не допускает введения на нем структуры топологической группы, превращающей отображение f в накрывающий гомоморфизм.*

Более того, авторы [32] не только установили факт существования накрытия, указанного в формулировке теоремы 17: для каждого P-адического соленоида Σ_P они построили связное пространство X и такое бесконечнолистное накрывающее отображение $f : X \to \Sigma_P$, что вопрос о подъеме групповой структуры на X относительно f имеет отрицательный ответ. Тем самым, как было отмечено выше, в формулировке теоремы 3 нельзя отказаться от предположения, что накрытие компактной связной группы является конечнолистным.

3.4. Накрытия, обобщенные средние и функциональные уравнения. По определению, для компактной связной абелевой группы G аддитивная группа характеров $\widehat{G}$ является k-делимой, где $k \in \mathbb{N}$, если сюръективен гомоморфизм

$$\tau_k : \ \widehat{G} \to \widehat{G} : \ \chi \mapsto k\chi.$$

В этом случае τ_k является автоморфизмом, поскольку $\widehat{G}$ является абелевой группой без кручения [10, теорема 24.25].

Пример 4. Пусть P – произвольная последовательность простых чисел и пусть натуральное число $n \geqslant 2$. Нетрудно показать, что группа рациональных чисел $\mathbb{Q}_P$ (см. (12)) является n-делимой тогда и только тогда, когда каждое простое число, являющееся делителем числа n, равняется бесконечному числу членов последовательности P.

Возможность деления в группе характеров $\widehat{G}$ имеет непосредственное отношение к вопросу о существовании средних на группе G. Ответ на подобный вопрос является одной из основных задач теории средних [89].

Напомним определение обобщенного среднего на произвольном топологическом пространстве. Пусть X – топологическое пространство и пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Непрерывное отображение

$$\mu : X \times X \times \cdots \times X \to X$$

из декартово произведения k экземпляров X называется *k-средним* на топологическом пространстве X, если оно обладает следующими двумя свойствами:

1) $\mu(x, x, \ldots, x) = x$;

2) $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \mu(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$

для любых точек $x, x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ и любой перестановки σ множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Г. Ауманн [90] изучал свойства средних на произвольных топологических пространствах и, в частности, показал, что на единичной окружности вообще не существует никаких средних. Б. Экманн, Е. Ганея и П. Хилтон [91, 92] рассматривали различные свойства обобщенных средних на группах. В статье Дж. Кислинга [93] содержатся различные необходимые и достаточные условия для возможности деления на k в группе характеров $\widehat{G}$. В частности, имеет место критерий [93, см. теорему 1.1, пункты (1), (5)]: *Пусть задана компактная связная абелева группа G и пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Тогда группа характеров $\widehat{G}$ является k-делимой в том и только том случае, когда на G существует k-среднее.*

Об исследованиях в теории средних и о любопытном применении обобщенных средних в топологических моделях социологии в качестве функций выбора можно посмотреть в [89, 94].

Пример 5. Рассмотрим отображение на декартовом квадрате диадического соленоида $\Sigma_{(2,2,\dots)}$:

$$\mu : \Sigma_{(2,2,\dots)} \times \Sigma_{(2,2,\dots)} \to \Sigma_{(2,2,\dots)},$$

где для произвольных элементов

$$x = (x_1, x_2, \dots) \quad \text{и} \quad y = (y_1, y_2, \dots) \in \Sigma_{(2,2,\dots)}$$

значение μ на паре (x, y) задается формулой

$$\mu(x, y) = (x_2 y_2, x_3 y_3, \dots).$$

Легко видеть, что отображение μ является 2-средним, или просто средним, для диадического соленоида $\Sigma_{(2,2,\dots)}$.

Пример 6. Используя среднее μ из предыдущего примера, рассмотрим отображение

$$\nu : \Sigma_{(2,2,\dots)} \times \Sigma_{(2,2,\dots)} \times \Sigma_{(2,2,\dots)} \times \Sigma_{(2,2,\dots)} \to \Sigma_{(2,2,\dots)},$$

где для произвольных четырех элементов $x, y, z, w \in \Sigma_{(2,2,\dots)}$ значение ν задается формулой

$$\nu(x, y, z, w) = \mu(\mu(x, y), \mu(z, w)).$$

Очевидно, отображение ν является 4-средним для диадического соленоида.

Следствием теоремы 3 о накрывающей группе и результатов теории двойственности Понтрягина – ван Кампена, в частности теорем 23.25 и 24.25 из [10], является следующее утверждение [21, теорема 2].

Теорема 18. *Пусть $p : X \to G$ – конечнолистное накрывающее отображение из связного топологического пространства X на компактную связную абелеву группу G. Группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на кратность накрытия p в том и только том случае, когда кратность накрытия p равняется единице, то есть отображение p является гомеоморфизмом.*

Из теоремы 18 и сформулированного выше критерия Кислинга [93, теорема 1.1] вытекают два следующих следствия.

Следствие 1. *Пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Если группа характеров $\widehat{G}$ является k-делимой, то не существует k-листного накрывающего отображения из связного топологического пространства на компактную связную абелеву группу G.*

Следствие 2. *Пусть натуральное число $k \geqslant 2$. Если существует k-листное накрывающее отображение из связного топологического пространства на компактную связную абелеву группу G, то на G не существует k-среднее.*

Таким образом, если у компактной связной абелевой группы есть k-среднее, то у нее нет k-листного связного накрытия, и наоборот. При этом нетрудно построить примеры компактных связных абелевых групп, на которых не существует k-среднее, что равносильно тому, что их группы характеров не являются k-делимыми, и при этом также нет k-листных накрывающих отображений из связных топологических пространств на эти группы. Такие примеры есть среди P-адических соленоидов (см. [33, пример 2], [35, предложение 2.2], [72, 75, 95, 96]). Итак, утверждения следствий 1 и 2 не являются обратимыми.

Пример 7. Для диадического соленоида $\Sigma_{(2,2,\dots)}$ справедливы следующие утверждения.

На $\Sigma_{(2,2,\dots)}$ есть 2-среднее (см. пример 5), а значит, нет двухлистного связного накрытия над диадическим соленоидом.

Эндоморфизм возведения в третью степень элементов диадического соленоида

$$h^3_{(2,2,\dots)} : \Sigma_{(2,2,\dots)} \to \Sigma_{(2,2,\dots)} : g \mapsto g^3, \quad g \in \Sigma_{(2,2,\dots)},$$

является трехлистным связным накрытием, следовательно, на $\Sigma_{(2,2,\dots)}$ не существует 3-среднее.

На диадическом соленоиде отсутствует 6-среднее, и у него нет шестилистного связного накрытия.

В работе [44], в частности, доказано, что для связной компактной, не обязательно абелевой, группы $\mathcal{G}$ полная разрешимость алгебраических уравнений степени k над банаховой алгеброй $C(\mathcal{G})$ следует из возможности деления на $k!$ в одномерной группе целочисленных спектральных когомологий $H^1(\mathcal{G}, \mathbb{Z})$ [44, следствия 1.10–1.12]. Хорошо известно [44, с.580], что справедлива и обратная импликация. Таким образом, получается *критерий полной разрешимости.* Напомним (см., например, [26, теорема 8.57(ii)]), что для абелевой компактной связной группы G группа когомологий $H^1(G, \mathbb{Z})$ изоморфна группе характеров $\widehat{G}$. Как следствие, в [44, с. 591] было получено обобщение теоремы Вальтера – Бора – Фландерса на связные компактные группы.

Нетрудно показать, что полная разрешимость простого многочлена Вейерштрасса над алгеброй $C(G)$ эквивалентна тривиальности полиномиального накрытия группы G, определяемого им. Поэтому критерий полной разрешимости из работы [44] немедленно доставляет критерий тривиальности k-листных полиномиальных накрытий группы G. Используя его и теорему 10, получаем следующий критерий тривиальности всех k-листных накрывающих отображений на группу G [21, теорема 3].

Теорема 19. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Все k-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу G являются тривиальными тогда и только тогда, когда группа характеров $\widehat{G}$ допускает деление на $k!$.*

В работе [21, теорема 3] для доказательства достаточности возможности деления на $k!$ в группе характеров $\widehat{G}$ для тривиальности всех k-листных накрытий группы G используется теорема 18.

Заметим, что независимое доказательство необходимости условия из теоремы 19 содержится в статье [97, теорема 3]. В этой работе изучаются свойства решений алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами. С этой целью привлекается теорема ван Кампена [98] о факторизации обратимых элементов банаховой алгебры $C(G)$. Доказательство необходимости условия из теоремы 19 опирается на следующее утверждение [97, теорема 2] о корнях алгебраического уравнения.

Теорема 20. *Пусть G – компактная связная абелева группа, χ_0 – характер группы G и $n \in \mathbb{N}$. Пусть уравнение $x^n - \chi_0 = 0$ имеет решение в банаховой алгебре $C(G)$ всех непрерывных комплекснозначных функций на G. Тогда это уравнение имеет решение и в группе характеров $\widehat{G}$.*

Из теоремы 19 и критерия Кислинга для существования обобщенного среднего (см. с. 27) непосредственно вытекает

Теорема 21. *Пусть $k \in \mathbb{N}$. Все k-листные накрывающие отображения на компактную связную абелеву группу G являются тривиальными тогда и только тогда, когда на группе G существует $k!$-среднее.*

Заметим, что условия тривиальности полиномиальных накрытий, формулируемые в алгебраических и топологических терминах, содержатся в работах [2, теорема 4.1], [3, теорема 4.3].

В связи с теоремой 19 и изоморфизмом групп $\widehat{G}$ и $H^1(G,\mathbb{Z})$ встает следующий вопрос, сформулированный в статье [21, с. 3610]:

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Верно ли, что все k-листные накрывающие отображения на компактное связное топологическое пространство X являются тривиальными при условии, что группа когомологий $H^1(X,\mathbb{Z})$ допускает деление на $k!$?

Следует заметить, что *для компактного пространства X группа когомологий $H^1(X,\mathbb{Z})$ является n-делимой тогда и только тогда, когда для каждой непрерывной функции $f: X \to \mathbb{S}^1$ функциональное уравнение $x^n = f$ имеет решение в банаховой алгебре $C(X)$*. Доказательство этого факта и обсуждение близких к нему результатов содержится в [99, результат 5], [44, введение], [57, лемма 1.6, с. 126] и [52, лемма 3.1].

Заключение

Результаты работ, рассмотренных в обзоре, показывают, что теоремы о накрывающих группах и методы, развитые при их доказательстве, имеют как самостоятельный интерес, так и целый ряд приложений. Эти результаты формулируются в различных терминах и демонстрируют неразрывное единство алгебры, анализа и топологии.

Отметим, что теоремы о накрывающих группах позволяют продолжить исследование тесной связи, существующей между конечнолистными накрывающими отображениями и многочленами Вейерштрасса над банаховыми алгебрами непрерывных функций, которое было начато в ранее опубликованных работах.

Представленные в обзоре результаты также являются источником новых интересных задач и указывают перспективные направления исследований.

Одним из направлений дальнейшего изучения вопроса о подъеме групповой структуры является развитие теории оверлеев над топологическими группами.

В свете теоремы 10 большой интерес представляет направление, связанное с изучением многочленов Вейерштрасса, задающих полиномиальные накрывающие отображения на компактные связные абелевы группы. В частности, естественно поставить задачу нахождения явного вида многочленов Вейерштрасса, определяющих конечнолистные накрытия конкретных групп, в том числе P-адических соленоидов. К этой тематике относится работа [59]. На наш взгляд, особая роль при этом должна отводиться теории двойственности Понтрягина – ван Кампена и теории групп кос.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность профессору В. Матиевич за присланные копии статей и профессору В.Л. Хансену за полезную информацию о полиномиальных накрытиях, содержащуюся в переписке.

Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
2. *Hansen V.L.* Polynomial covering spaces and homomorphisms into braid groups // Pac. J. Math. – 1979. – V. 81, No 2. – P. 399–410. – doi: 10.2140/pjm.1979.81.399.
3. *Hansen V.L.* Coverings defined by Weierstrass polynomials // J. Reine Angew. Math. – 1980. – V. 314. – P. 29–39. – doi: 10.1515/crll.1980.314.29.
4. *Weierstrass K.* Einige auf die Theorie der analytischen Functionen Veränderlichen sich beziechende Sätze // Mathematische Werke, Bd. Abhandlungen II. – Berlin: Mayer und Müller, 1895. – S. 135–188.
5. *Vietoris L.* Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen // Math. Ann. – 1927. – Bd. 97. – S. 454–472. – doi: 10.1007/BF01447877.
6. *Van Dantzig D., van der Waerden B.L.* Über metrisch homogene Räume // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 1928. – Bd. 6. – S. 367–376.
7. *Van Dantzig D.* Über topologisch homogene Kontinua // Fundam. Math. – 1930. – Bd. 15. – S. 102–125. – doi: 10.4064/fm-15-1-102-125.
8. *Van Dantzig D.* Zur topologischen Algebra. III. Brouwersche und Cantorsche Gruppen // Compos. Math. – 1936. – V. 3. – P. 408–426.
9. *Стинрод Н., Эйленберг С.* Основания алгебраической топологии. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958. – 403 с.
10. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. – М.: Наука, 1975. – 654 с.
11. *Kolmogorov A.N.* Sur la notion de la moyenne // Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. – 1930. – T. 12, F. 9. – P. 388–391.
12. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 751 с.
13. *Хелемский А.Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 288 с.
14. *Масси У.С., Столлингс Дж.* Алгебраическая топология. Введение. – М.: Мир, 1977. – 344 с.
15. *Шевалле К.* Теория групп Ли. Т. 1. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. – 316 с.
16. *Наймарк М.А.* Теория представлений групп. – М.: Наука, 1976. – 560 с.
17. *Clark A.* A generalization of Hagopian's theorem and exponents // Topol. Its Appl. – 2002. – V. 117, No 3. – P. 273–283. – doi: 10.1016/S0166-8641(01)00027-X.
18. *Grigorian S.A., Gumerov R.N., Kazantsev A.V.* Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 6. – P. 39–46.
19. *Grigorian S.A., Gumerov R.N.* On a covering group theorem and its applications // Lobachevskii J. Math. – 2002. – V. 10. – P. 9–16.
20. *Grigorian S.A., Gumerov R.N.* On the structure of finite coverings of compact connected groups: arXiv:math/0403329. – 2004. – 17 p.
21. *Grigorian S.A., Gumerov R.N.* On the structure of finite coverings of compact connected groups // Topol. Its Appl. – 2006. – V. 153, No 18. – P. 3598–3614. – doi: 10.1016/j.topol.2006.03.010.
22. *Eda K., Matijević V.* Finite-sheeted covering maps over 2-dimensional connected, compact Abelian groups // Topol. Its Appl. – 2006. – V. 153, No 7. – P. 1033–1045. – doi: 10.1016/j.topol.2005.02.005.

23. *Alexandroff P.* Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension // Ann. Math. – 1929. – V. 30, No 1/4. – P. 101–187. – doi: 10.2307/1968272.

24. *Александров П.С.* Несколько моментов в развитии Московской школы общей топологии за последние полвека // Усп. матем. наук. – 1980. – Т. 35, № 4. – С. 217–221.

25. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применения. – М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1950. – 222 с.

26. *Hofmann K.H., Morris S.A.* The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert. – Berlin: Walter de Gruyter, 2006. – xvii, 858 p. (de Gruyter Stud. Math., 25)

27. *Spanier E.H.* Algebraic Topology. – N. Y.: McGraw-Hill, 1966. – XIV, 528 p.

28. *Гумеров Р.Н.* О накрывающих группах // Изв. вузов. Матем. – 2020. – № 3. – С. 85–91. – doi: 10.26907/0021-3446-2020-3-85-91.

29. *Mardešić S., Matijević V.* Classifying overlay structures of topological spaces // Topol. Its Appl. – 2001. – V. 113, No 1–3. – P. 167–209. – doi: 10.1016/s0166-8641(00)00012-2.

30. *Taylor R.L.* Covering groups of non-connected topological groups // Proc. Am. Math. Soc. – 1954. – V. 5, No 5. – P. 753–768. – doi: 10.1090/S0002-9939-1954-0087028-0.

31. *Brown R., Mucuk O.* Covering groups of non-connected topological groups revisited // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1994. – V. 115, No 1. – P. 97–110. – doi: 10.1017/S0305004100071942.

32. *Eda K., Matijević V.* Covering maps over solenoids which are not covering homomorphisms // Fundam. Math. – 2013. – V. 221, No 1 – P. 69–82. – doi: 10.4064/fm221-1-3.

33. *Fox R.H.* On shape // Fundam. Math. – 1972. – V. 74. – P. 47–71. – doi: 10.4064/fm-74-1-47-71.

34. *Fox R.H.* Shape theory and covering spaces // Dickman R.F., Fletcher P. (Eds.) Topology Conference. Lecture Notes in Mathematics, V. 375. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1974. – P. 71–90. – doi: 10.1007/BFb0064013.

35. *Moore T.T.* On Fox's theory of overlays // Fundam. Math. – 1978. – V. 99. – P. 205–211. – doi: 10.4064/fm-99-3-205-211.

36. *Matijević V.* Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces // Rev. Mat. Comput. – 2003. – V. 16, No 1. – P. 311–327. – doi: 10.5209/rev_REMA.2003.v16.n1.16883.

37. *Brazas J.* Semicoverings, coverings, overlays and open subgroups of the quasitopological fundamental group // Topol. Proc. – 2014. – V. 44. – P. 285–313.

38. *Dydak J.* Overlays and group actions // Topol. Its Appl. – 2016. – V. 207. – P. 22–32. – doi: 10.1016/j.topol.2016.03.031.

39. *Eda K., Matijević V.* Existence and uniqueness of group structures on covering spaces over groups // Fundam. Math. – 2017. – V. 238. – P. 241–267. – doi: 10.4064/fm990-10-2016.

40. *Гумеров Р.Н.* Групповые структуры и их приложения в анализе и топологической алгебре: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Казань, 2020. – 214 с.

41. *Deckard D., Pearcy C.* On matrices over the ring of continuous functions on a Stonian space // Proc. Am. Math. Soc. – 1963. – V. 14. – P. 322–328. – doi: 10.1090/S0002-9939-1963-0147926-1.

42. *Deckard D., Pearcy C.* On algebraic closure in function algebras // Proc. Am. Math. Soc. – 1964. – V. 15. – P. 259–263. – doi: 10.1090/S0002-9939-1964-0161171-6.

43. *Countryman R.S. Jr.* On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed // Pac. J. Math. – 1967. – V. 20, No 3. – P. 433–448. – doi: 10.2140/pjm.1967.20.433.

44. *Горин Е.А., Лин В.Я* Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос // Матем. сб. – 1969. – Т. 78, № 4. – С. 579–610.

45. *Жиков В.В.* К проблеме существования почти периодических решений дифференциальных и операторных уравнений // Труды ВЕЛИ. – Владимир, 1969. – Т. 8. – С. 94–188.

46. *Walther A.* Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen // Monatsh. Math. Phys. – 1933. – Bd. 40. – S. 444–457. – doi: 10.1007/BF01708882.

47. *Bohr H., Flanders D.A.* Algebraic equations with almost-periodic coefficients // Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser. – København: Levin & Munksgaard, 1937. – V. 15. – P. 1–49.

48. *Bohr H., Flanders D.A.* Algebraic functions of analytic almost periodic functions // Duke Math. J. – 1938. – V. 4, No 4. – P. 779–787. – doi: 10.1215/S0012-7094-38-00468-5.

49. *Лин В.Я.* Косы Артина и связанные с ними группы и пространства // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 17. – С. 159–227.

50. *Hatori O., Miura T.* On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another // Proc. Am. Math. Soc. – 2000. – V. 128, No 4. – P. 1185–1189. – doi: 10.1090/S0002-9939-99-05454-4.

51. *Miura T., Niijima K.* On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras // Proc. Am. Math. Soc. – 2003. – V. 131, No 9. – P. 2869–2876. – doi: 10.1090/S0002-9939-02-06835-1.

52. *Kawamura K., Miura T.* On the existence of continious (approximate) roots of algebraic equations // Topol. Its Appl. – 2007. – V. 154, No 2. – P. 434–442. – doi: 10.1016/j.topol.2006.05.008.

53. *Honma D., Miura T.* On characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equation is solvable in $C(X)$ // Tokyo J. Math. – 2007. – V. 30, No 2. – P. 403–416. – doi: 10.3836/tjm/1202136685.

54. *Kawamura K., Miura T.* On the root closedness of continuous function algebras // Topol. Its Appl. – 2009. – V. 156, No 3. – P. 624–628. – doi: 10.1016/j.topol.2008.08.015.

55. *Kawamura K.* Higher dimensional compacta with algebraically closed function algebras // Tokyo J. Math. – 2009. – V. 32, No 2. – P. 441–445. – doi: 10.3836/tjm/1264170242.

56. *Hansen V.L.* Embedding finite covering spaces into trivial bundles // Math. Ann. – 1978. – V. 236. – P. 239–243. – doi: 10.1007/BF01351369.

57. *Hansen V.L.* Braids and Coverings: Selected Topics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 202 p. (London Math. Soc. Stud. Texts, V. 18)

58. *Hansen V.L.* Weierstrass polynomials for links // Beitr. Algebra Geometrie. – 1998. – V. 39, No 2. – P. 359–365.

59. *Бардаков В.Г., Веснин А.Ю.* Многочлены Вейерштрасса сингулярных кос и зацеплений // Чебышевский сб. – 2005. – Т. 6, № 2. – С. 36–51.

60. *Møller J.M.* On polynomial coverings and their classification // Math. Scand. – 1980. – V. 47, No 1. – P. 116–122.

61. *Hansen V.L.* Algebra and topology of Weierstrass polynomials // Expos. Math. – 1987. – V. 5. – P. 267–274.

62. *Hansen V.L.* A model for embedding finite coverings defined by principal bundles into bundules of manifolds // Topol. Its Appl. – 1988. – V. 28, No 1. – P. 1–9. – doi: 10.1016/0166-8641(88)90030-2.

63. *Hansen V.L.* The characteristic algebra of a polynomial covering map // Math. Scand. – 1989. – V. 64, No 1. – P. 219–225. – doi: 10.7146/math.scand.a-12254.

64. *Hansen V.L., Petersen P.* Groups, coverings and Galois theory // Can. J. Math. – 1991. – V. 43, No 6. – P. 1281–1293. – doi: 10.4153/CJM-1991-073-0.

65. *Гумеров Р.Н.* Многочлены Вейерштрасса и накрытия компактных групп // Сиб. матем. журн. – 2013. – Т. 54, № 2. – С. 320–324.

66. *McCord M.C.* Inverse limit sequences with covering maps // Trans. Am. Math. Soc. – 1965. – V. 114. – P. 197–209. – doi: 10.1090/S0002-9947-1965-0173237-0.

67. *Bing R.H.* A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc // Can. J. Math. – 1960. – V. 12. – P. 209–230. – doi: 10.4153/CJM-1960-018-x.

68. *Aarts J.M., Fokkink R.J.* The classification of solenoids // Proc. Am. Math. Soc. – 1991. – V. 111. – P. 1161–1163. – doi: 10.1090/S0002-9939-1991-1042260-7.

69. *Богатый С.А., Фролкина О.Д.* Классификация обобщенных соленоидов // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. – М.: Моск. гос. ун-т, 2005. – Вып. XXVI. – С. 31–59.

70. *Zhou Y.* Covering mappings on solenoids and their dynamical properties // Chin. Sci. Bull. – 2000. – V. 45, No 12. – P. 1066–1070. – doi: 10.1007/BF02887175.

71. *Kwapisz J.* Homotopy and dynamics for homeomorphisms of solenoids and Knaster continua // Fundam. Math. – 2001. – V. 168, No 3. – P. 251–278. – doi: 10.4064/fm168-3-3.

72. *Charatonik J.J., Covarrubias P.P.* On covering mappings on solenoids // Proc. Am. Math. Soc. – 2002. – V. 130, No 7. – P. 2145–2154. – doi: 10.1090/S0002-9939-01-06296-7.

73. *Aarts J.M., Fokkink R.J.* Mappings on the dyadic solenoid // Commentat. Math. Univ. Carol. – 2003. – V. 44, No 4. – P. 697–699.

74. *Gumerov R.N.* On finite-sheeted covering mappings onto solenoids. – 2003. – arXiv:math/0312288v1. – 8 p.

75. *Gumerov R.N.* On finite-sheeted covering mappings onto solenoids // Proc. Am. Math. Soc. – 2005. – V. 133, No 9. – P. 2771–2778. – doi: 10.1090/S0002-9939-05-07792-0.

76. *Jiang B., Wang S., Zheng Y.* No embeddings of solenoids into surfaces // Proc. Am. Math. Soc. – 2008. – V. 136, No 10. – P. 3697–3700. – doi: 10.1090/S0002-9939-08-09340-4.

77. *Bogatyi S., Frolkina O.* On multiplicity of maps // Topol. Its Appl. – 2012. – V. 159, No 7. – P. 1778–1786. – doi: 10.1016/j.topol.2011.09.042.

78. *Boroński J.P., Sturm F.* Finite-sheeted covering spaces and a near local homeomorphism property for pseudosolenoids // Topol. Its Appl. – 2014. – V. 161, No 1. – P. 235–242. – doi: 10.1016/j.topol.2013.10.024.

79. *Brownlowe N., Raeburn I.* Two families of Exel–Larsen crossed products // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V. 398, No 1. – P. 68–79. – doi: 10.1016/j.jmaa.2012.08.026.

80. *Гумеров Р.Н.* Предельные автоморфизмы C^*-алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59, № 1. – С. 95–109. – doi: 10.17377/smzh.2018.59.109.

81. *Gumerov R.N.* Coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C^*-algebras // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 2. – С. 275–286.

82. *Gumerov R.N.* Inductive sequences of Toeplitz algebras and limit automorphisms // Lobachevskii J. Math. – 2020. – V. 41, No 4. – P. 637–643. – doi: 10.1134/S1995080220040125.

83. *Гумеров Р.Н., Липачева Е.В., Григорян Т.А.* Об индуктивных пределах систем C^*-алгебр // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 7. – С. 79–85.

84. *Gumerov R.N.* Inductive limits for systems of Toeplitz algebras // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40, No 4. – P. 469–478. – doi: 10.1134/S1995080219040097.

85. *Lipacheva E.V.* Embedding semigroup C^*-algebras into inductive limits // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40, No 5. – P. 667–675. – doi: 10.1134/S1995080219050135.

86. *Gumerov R.N., Lipacheva E.V.* Inductive systems of C^*-algebras over posets: A survey // Lobachevskii J. Math. – 2020. – V. 41, No 4. – P. 644–654. – doi: 10.1134/S1995080220040137.

87. *Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Grigoryan T.A.* On a topology and limits for inductive systems of C^*-algebras over partially ordered sets // Int. J. Theor. Phys. – 2021. – V. 60, No 9. – P. 499–511. – doi: 10.1007/s10773-019-04048-0.

88. *Григорян С.А., Гумеров Р.Н., Липачева Е.В.* Пределы индуктивных последовательностей алгебр Теплица – Кунца // Труды Матем. ин-та им Стеклова. – 2021. – Т. 313. – С. 67–77. – doi: 10.4213/tm4170.

89. *Charatonik J.J.* Means on arc-like continua // Problems from Topology Proceedings / Ed. by E. Pearl. – Toronto: Topol. Atlas, 2003. – P. 197–200.

90. *Aumann G.* Über Räume mit Mittelbildungen // Math. Ann. – 1944. – Bd. 119. – S. 210–215. – doi: 10.1007/BF01563741.

91. *Eckmann B.* Räume mit Mittelbildungen // Comment. Math. Helvetici. – 1954. – Bd. 28. – S. 329–340. – doi: 10.1007/BF02566939.

92. *Eckmann B., Ganea T., Hilton P.J.* Generalized means // Studies in Analysis and Related Topics. – Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1962. – P. 82–92.

93. *Keesling J.* The group of homeomorphisms of a solenoid // Trans. Am. Math. Soc. – 1972. – V. 172. – P. 119–131. – doi: 10.1090/S0002-9947-1972-0315735-6.

94. *Eckmann B.* Social choice and topology, a case of pure and applied mathematics // Expos. Math. – 2004. – V. 22, No 4. – P. 385–393. – doi: 10.1016/S0723-0869(04)80016-1.

95. *Krupski P.* Means on solenoids // Proc. Am. Math. Soc. – 2003. – V. 131, No 6. – P. 1931–1933. – doi: 10.1090/s0002-9939-02-06738-2.

96. *Gumerov R.N.* On the existence of means on solenoids // Lobachevskii J. Math. – 2005. – V. 17. – P. 43–46.

97. *Гумеров Р.Н.* Характеры и накрытия компактных групп // Изв. вузов. Матем. – 2014. – № 4. – С. 11–17.

98. *van Kampen E.R.* On almost periodic functions of constant absolute value // J. London Math. Soc. – 1937. – V. s1-12, No 1. – P. 3–6. – doi: 10.1112/jlms/s1-12.45.3.

99. *Fort M.K. Jr.* Images of plane continua // Am. J. Math. – 1959. – V. 81, No 3. – P. 541–546. – doi: 10.2307/2372912.

Поступила в редакцию
01.02.2022

Гумеров Ренат Нельсонович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *Renat.Gumerov@kpfu.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 1, pp. 5–42

REVIEW ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.5-42

Covering Groups and Their Applications: A Survey

R.N. Gumerov

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: *Renat.Gumerov@kpfu.ru*

Received February 1, 2022

Abstract

This article is a survey of covering group theorems and their applications. For a given covering mapping from the topological space onto a topological group, it is natural to pose the following question on the lifting of the group structure from the base of the covering mapping to its covering space: do there exist group operations on the covering space that turn this space into a topological group and the original covering mapping into a morphism of topological groups? Each statement giving the positive answer to this question for any class of covering mappings is called a covering group theorem. Here the main stages in the proof of the covering group theorem for finite-sheeted covering mappings from connected topological spaces onto arbitrary compact connected groups are explored. This theorem and the method of its proof have a number of interesting applications in analysis, topology, and topological algebra. The results on the coverings of topological groups obtained by applying this theorem or by using an approximation construction which is built in its proof are discussed. The theorems under study are those establishing a close relationship between the finite-sheeted coverings of compact connected Abelian groups and the polynomials over Banach algebras of continuous functions, i.e., Weierstrass polynomials. Informally speaking, all finite-sheeted coverings of compact connected Abelian groups are defined by zero sets of simple Weierstrass polynomials. Connected coverings of P-adic solenoids are considered. A complete description of such finite-sheeted coverings is provided by using the above-mentioned approximation construction. Applications of the covering group theorems are specified, as well as their corollaries to the study of the structure of coverings and to the problem with the existence of generalized means on topological groups. Particular attention is paid to the applications related to the properties of the solutions of algebraic equations with continuous coefficients.

Keywords: algebraic equation with continuous coefficients, Weierstrass variety, Weierstrass polynomial, covering group, covering mapping onto topological group, covering homomorphism, overlay mapping, P-adic solenoid, polynomial covering, covering group theorem

Acknowledgments. I would like to sincerely thank Professor V. Matijević who kindly provided copies of the articles essential for this research, as well as Professor V.L. Hansen for the valuable information he gave about polynomial coverings in our correspondence.

This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030").

References

1. Pontryagin L.S. *Nepreryvnye gruppy* [Continuous Groups]. Moscow, Nauka, 1984. 520 p. (In Russian)
2. Hansen V.L. Polynomial covering spaces and homomorphisms into braid groups. *Pac. J. Math.*, 1979, vol. 81, no. 2, pp. 399–410. doi: 10.2140/pjm.1979.81.399.
3. Hansen V.L. Coverings defined by Weierstrass polynomials. *J. Reine Angew. Math.*, 1980, vol. 314, pp. 29–39. doi: 10.1515/crll.1980.314.29.
4. Weierstrass K. Einige auf die Theorie der analytischen Functionen Veränderlichen sich beziechende Sätze. In: *Mathematische Werke. Bd. Abhandlungen II.* Berlin, Mayer und Müller, 1895, S. 135–188. (In German)
5. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen. *Math. Ann.*, 1927, Bd. 97, S. 454–472. doi:10.1007/BF01447877. (In German)
6. van Dantzig D., van der Waerden B.L. Über metrisch homogene Räume. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg*, 1928, Bd. 6, S. 367–376. (In German)
7. van Dantzig D. Über topologisch homogene Kontinua. *Fundam. Math.*, 1930, Bd. 15, S. 102–125. doi: 10.4064/fm-15-1-102-125. (In German)
8. van Dantzig D. Zur topologischen Algebra, III, Brouwersche und Cantorsche Gruppen. *Compos. Math.*, 1936, vol. 3, pp. 408–426. (In German)
9. Steenrod N., Eilenberg S. *Osnovaniya algebraicheskoi topologii* [Foundations of Algebraic Topology]. Moscow, Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1958. 403 p. (In Russian)
10. Hewitt E., Ross K. *Abstraktnyi garmonicheskii analiz* [Abstract Harmonic Analysis]. Vol. 1. Moscow, Nauka, 1975. 654 p. (In Russian)
11. Kolmogorov A.N. Sur la notion de la moyenne. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend.*, 1930, T. 12, F. 9, pp. 388–391. (In French)
12. Engelking R. *Obshchaya topologiya* [General Topology]. Moscow, Mir, 1986. 751 p. (In Russian)
13. Helemskii A. Ya. *Gomologiya v banakhovykh i topologicheskikh algebrakh* [The Homology of Banach and Topological Algebras]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1986. 288 p. (In Russian)
14. Massey W.S., Stallings J. *Algebraicheskaya topologiya. Vvedenie* [Algebraic Topology. An Introduction]. Moscow, Mir, 1977. 344 p. (In Russian)
15. Chevalley L. *Teoriya grupp Li* [Theory of Lie Groups]. Vol. 1. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1948. 316 p. (In Russian)
16. Naimark M.A. *Teoriya predstavlenii grupp* [Theory of Group Representations]. Moscow, Nauka, 1976. 560 p. (In Russian)
17. Clark A. A generalization of Hagopian's theorem and exponents. *Topol. Its Appl.*, 2002, vol. 117, no. 3, pp. 273–283. doi: 10.1016/S0166-8641(01)00027-X.
18. Grigorian S.A., Gumerov R.N., Kazantsev A.V. Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups. *Lobachevskii J. Math.*, 2000, vol. 6, pp. 39–46.

19. Grigorian S.A., Gumerov R.N. On a covering group theorem and its applications. *Lobachevskii J. Math.*, 2002, vol. 10, pp. 9–16.

20. Grigorian S.A., Gumerov R.N. On the structure of finite coverings of compact connected groups. *arXiv:math/0403329*, 2004. 17 p.

21. Grigorian S.A., Gumerov R.N. On the structure of finite coverings of compact connected groups. *Topol. Its Appl.*, 2006, vol. 153, no. 18, pp. 3598–3614. doi: 10.1016/j.topol.2006.03.010.

22. Eda K., Matijević V. Finite-sheeted covering maps over 2-dimensional connected, compact Abelian groups. *Topol. Its Appl.*, 2006, vol. 153, no. 7, pp. 1033–1045. doi: 10.1016/j.topol.2005.02.005.

23. Alexandroff P. Untersuchungen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen beliebiger Dimension. *Ann. Math.*, 1929, vol. 30, no. 1/4, pp. 101–187. doi: 10.2307/1968272. (In German)

24. Aleksandrov P.S. Some moments in the development of the Moscow school of general topology in the last half-century. *Usp. Mat. Nauk*, 1980, vol. 35, no. 4, pp. 217–221. (In Russian)

25. Weil A. *Integrirovanie v topologicheskikh gruppakh i ego primeneniya* [Integration in Topological Groups and Its Applications]. Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1950. 222 p. (In Russian)

26. Hofmann K.H., Morris S.A. *The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert.* Berlin, Walter de Gruyter, 2006. xvii, 858 p. de Gruyter Stud. Math., 25.

27. Spanier E.H. *Algebraic Topology.* New York, McGraw-Hill, 1966. XIV, 548 p.

28. Gumerov R.N. On covering groups. *Russ. Math.*, 2020, vol. 64, no. 3, pp. 76–81. doi: 10.3103/S1066369X20030081.

29. Mardešić S., Matijević V. Classifying overlay structures of topological spaces. *Topol. Its Appl.*, 2001, vol. 113, nos. 1–3, pp. 167–209. doi: 10.1016/s0166-8641(00)00012-2.

30. Taylor R.L. Covering groups of non-connected topological groups. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1954, vol. 5, no. 5, pp. 753–768. doi: 10.1090/S0002-9939-1954-0087028-0.

31. Brown R., Mucuk O. Covering groups of non-connected topological groups revisited. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1994, vol. 115, no. 1, pp. 97–110. doi: 10.1017/S0305004100071942.

32. Eda K., Matijević V. Covering maps over solenoids which are not covering homomorphisms. *Fundam. Math.*, 2013, vol. 221, no. 1, pp. 69–82. doi: 10.4064/fm221-1-3.

33. Fox R.H. On shape. *Fundam. Math.*, 1972, vol. 74, pp. 47–71. doi: 10.4064/fm-74-1-47-71.

34. Fox R.H. Shape theory and covering spaces. In: Dickman R.F., Fletcher P. (Eds.) *Topology Conference. Lecture Notes in Mathematics.* Vol. 375. Berlin, Heidelberg, Springer, 1974, pp. 71–90. doi: 10.1007/BFb0064013.

35. Moore T.T. On Fox's theory of overlays. *Fundam. Math.*, 1978, vol. 99, pp. 205–211. doi: 10.4064/fm-99-3-205-211.

36. Matijević V. Classifying finite-sheeted coverings of paracompact spaces. *Rev. Mat. Comput.*, 2003, vol. 16, no. 1, pp. 311–327. doi: 10.5209/rev_REMA.2003.v16.n1.16883.

37. Brazas J. Semicoverings, coverings, overlays and open subgroups of the quasitopological fundamental group. *Topol. Proc.*, 2014, vol. 44, pp. 285–313.

38. Dydak J. Overlays and group actions. *Topol. Its Appl.*, 2016, vol. 207, pp. 22–32. doi: 10.1016/j.topol.2016.03.031.

39. Eda K., Matijević V. Existence and uniqueness of group structures on covering spaces over groups. *Fundam. Math.*, 2017, vol. 238, pp. 241–267. doi: 10.4064/fm990-10-2016.

40. Gumerov R.N. Group structures and their applications in analysis and topological algebra. *Doct. Phys.-Math. Sci. Diss.* Kazan, 2020. 214 p.(In Russian)

41. Deckard D., Pearcy C. On matrices over the ring of continuous functions on a Stonian space. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1963, vol. 14, pp. 322–328. doi: 10.1090/S0002-9939-1963-0147926-1.

42. Deckard D., Pearcy C. On algebraic closure in function algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1964, vol. 15, pp. 259–263. doi: 10.1090/S0002-9939-1964-0161171-6.

43. Countryman R.S., Jr. On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed. *Pac. J. Math.*, 1967, vol. 20, no. 3, pp. 433–448. doi: 10.2140/pjm.1967.20.433.

44. Gorin E.A., Lin V.Ya. Algebraic equations with continuous coefficients and some problems of the algebraic theory of braids. *Sb. Math.*, 1969, vol. 7, no. 4, pp. 569–596. doi: 10.1070/SM1969v007n04ABEH001104.

45. Zhikov V.V. The problem on the existence of almost periodic solutions of differetial and operator equations. *Tr. VELI*, 1969. vol. 8, pp. 94–188. (In Russian)

46. Walther A. Algebraische Funktionen von fastperiodischen Funktionen. *Monatsh. Math. Phys.*, 1933, Bd. 40, S. 444–457. doi: 10.1007/BF01708882.

47. Bohr H., Flanders D.A. Algebraic equations with almost-periodic coefficients. In: *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser*. København, Levin & Munksgaard, 1937, vol. 15, pp. 1–49.

48. Bohr H., Flanders D.A. Algebraic functions of analytic almost periodic functions. *Duke Math. J.*, 1938, vol. 4, no. 4, pp. 779–787. doi: 10.1215/S0012-7094-38-00468-5.

49. Lin V.Ya. Artin braids and the groups and spaces connected with them. *J. Sov. Math.*, 1982, vol. 18, pp. 736–788. doi: 10.1007/BF01091963.

50. Hatori O., Miura T. On a characterization of the maximal ideal spaces of commutative C^*-algebras in which every element is the square of another. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2000, vol. 128, no. 4, pp. 1185–1189. doi: 10.1090/S0002-9939-99-05454-4.

51. Miura T., Niijima K. On a characterization of the maximal ideal spaces of algebraically closed commutative C^*-algebras. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, no. 9, pp. 2869–2876. doi: 10.1090/S0002-9939-02-06835-1.

52. Kawamura K., Miura T. On the existence of continuous (approximate) roots of algebraic equations. *Topol. Its Appl.*, 2007, vol. 154, no. 2, pp. 434–442. doi: 10.1016/j.topol.2006.05.008.

53. Honma D., Miura T. On characterization of compact Hausdorff space X for which certain algebraic equation is solvable in $C(X)$. *Tokyo J. Math.*, 2007, vol. 30, no. 2, pp. 403–416. doi: 10.3836/tjm/1202136685.

54. Kawamura K., Miura T. On the root closedness of continuous function algebras. *Topol. Its Appl.*, 2009, vol. 156, no. 3, pp. 624–628. doi: 10.1016/j.topol.2008.08.015.

55. Kawamura K. Higher dimensional compacta with algebraically closed function algebras. *Tokyo J. Math.*, 2009, vol. 32, no. 2, pp. 441–445. doi: 10.3836/tjm/1264170242.

56. Hansen V.L. Embedding finite covering spaces into trivial bundles. *Math. Ann.*, 1978, vol. 236, pp. 239–243. doi: 10.1007/BF01351369.

57. Hansen V.L. *Braids and Coverings: Selected Topics*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1989. 202 p. London Math. Soc. Stud. Texts, vol. 18.

58. Hansen V.L. Weierstrass polynomials for links. *Beitr. Algebra and Geom.*, 1998, vol. 39, no. 2, pp. 359–365.

59. Bardakov V.G., Vesnin A.Yu. Weierstrass polynomials of singular braids and links. *Chebyshevskii Sb.*, 2005, vol. 6, no. 2, pp. 36–51. (In Russian)

60. Møller J.M. On polynomial coverings and their classification. *Math. Scand.*, 1980, vol. 47, no. 1, pp. 116–122. doi: 10.7146/math.scand.a-11877.

61. Hansen V.L. Algebra and topology of Weierstrass polynomials. *Expos. Math.*, 1987, vol. 5, pp. 267–274.

62. Hansen V.L. A model for embedding finite coverings defined by principle bundles into bundules of manifolds. *Topol. Its Appl.*, 1988, vol. 28, no. 1, pp. 1–9. doi: 10.1016/0166-8641(88)90030-2.

63. Hansen V.L. The characteristic algebra of a polynomial covering map. *Math. Scand.*, 1989, vol. 64, no. 1, pp. 219–225. doi: 10.7146/math.scand.a-12254.

64. Hansen V.L., Petersen P. Groups, coverings and Galois theory. *Can. J. Math.*, 1991, vol. 43, no. 6, pp. 1281–1293. doi: 10.4153/CJM-1991-073-0.

65. Gumerov R.N. Weierstrass polynomials and coverings of compact groups. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 243–246. doi: 10.1134/S0037446613020080.

66. McCord M.C. Inverse limit sequences with covering maps. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1965, vol. 114, pp. 197–209. doi: 10.1090/S0002-9947-1965-0173237-0.

67. Bing R.H. A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc. *Can. J. Math.*, 1960, vol. 12, pp. 209–230. doi: 10.4153/CJM-1960-018-x.

68. Aarts J.M., Fokkink R.J. The classification of solenoids. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1991, vol. 111, pp. 1161–1163. doi: 10.1090/S0002-9939-1991-1042260-7.

69. Bogatyi S.A., Frolkina O.D. Classification of generalized solenoids. *Trudy seminara po vektornomu i tenzornomu analizu s ikh prilozheniyami k geometrii, mekhanike i fizike* [Proc. Semin. on Vector and Tensor Analysis with Their Applications to Geometry, Mechanics, and Physics]. Moscow, Mosk. Gos. Univ., 2005, no. XXVI, pp. 31–59. (In Russian)

70. Youcheng Z. Covering mappings on solenoids and their dynamical properties. *Chin. Sci. Bull.*, 2000, vol. 45, no. 12, pp. 1066–1070. doi: 10.1007/BF02887175.

71. Kwapisz J. Homotopy and dynamics for homeomorphisms of solenoids and Knaster continua. *Fundam. Math.*, 2001, vol. 168, no. 3, pp. 251–278. doi: 10.4064/fm168-3-3.

72. Charatonik J.J., Covarrubias P.P. On covering mappings on solenoids. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2002, vol. 130, no. 7, pp. 2145–2154. doi: 10.1090/S0002-9939-01-06296-7.

73. Aarts J.M., Fokkink R.J. Mappings on the dyadic solenoid. *Commentat. Math. Univ. Carol.*, 2003, vol. 44, no. 4, pp. 697–699.

74. Gumerov R.N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids, *arXiv:math/0312288v1*. 2003. 8 p.

75. Gumerov R.N. On finite-sheeted covering mappings onto solenoids. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2005, vol. 133, no. 9, pp. 2771–2778. doi: 10.1090/S0002-9939-05-07792-0.

76. Jiang B., Wang S., Zheng Y. No embeddings of solenoids into surfaces. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2008, vol. 136, no. 10, pp. 3697–3700. doi: 10.1090/S0002-9939-08-09340-4.

77. Bogatyi S., Frolkina O. On multiplicity of maps. *Topol. Its Appl.*, 2012, vol. 159, no. 7, pp. 1778–1786. doi: 10.1016/j.topol.2011.09.042.

78. Boroński J.P., Sturm F. Finite-sheeted covering spaces and a near local homeomorphism property for pseudosolenoids. *Topol. Its Appl.*, 2014, vol. 161, no. 1, pp. 235–242. doi: 10.1016/j.topol.2013.10.024.

79. Brownlowe N., Raeburn I. Two families of Exel-Larsen crossed products. *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, vol. 398, no. 1, pp. 68–79. doi: 10.1016/j.jmaa.2012.08.026.

80. Gumerov R.N. Limit automorphisms of the C^*-algebras generated by isometric representations for semigroups of rationals. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 1, pp. 73–84. doi: 10.1134/S0037446618010093.

81. Gumerov R.N. Coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C^*-algebras. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seria Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 2, pp. 275–286.

82. Gumerov R.N. Inductive sequences of Toeplitz algebras and limit automorphisms. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 4, pp. 637–643. doi: 10.1134/S1995080220040125.

83. Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Grigoryan T.A. On inductive limits for systems of C^*-algebras. *Russ. Math.*, 2018, vol. 62, no. 7, pp. 68–73. doi: 10.3103/S1066369X18070083.

84. Gumerov R.N. Inductive limits for systems of Toeplitz algebras. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 469–478. doi: 10.1134/S1995080219040097.

85. Lipacheva E.V. Embedding semigroup C^*-algebras into inductive limits. *Lobachevskii J. Math.*, 2019, vol. 40, no. 5, pp. 667–675. doi: 10.1134/S1995080219050135.

86. Gumerov R.N., Lipacheva E.V. Inductive systems of C^*-algebras over posets: A survey. *Lobachevskii J. Math.*, 2020, vol. 41, no. 4, pp. 644–654. doi: 10.1134/S1995080220040137.

87. Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Grigoryan T.A. On a topology and limits for inductive systems of C^*-algebras over partially ordered sets. *Int. J. Theor. Phys.*, 2021, vol. 60, no. 9, pp. 499–511. doi: 10.1007/s10773-019-04048-0.

88. Grigoryan S.A., Gumerov R.N., Lipacheva E.V. Limits of inductive sequences of Toeplitz–Cuntz algebras. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2021, vol. 313, pp. 60–69. doi: 10.1134/S0081543821020073.

89. Charatonik J.J. Means on arc-like continua. In: Pearl E. (Ed.) *Problems from Topology Proceedings.* Toronto, Topol. Atlas, 2003, pp. 197–200.

90. Aumann G. Über Räume mit Mittelbildungen. *Math. Ann.*, 1944, Bd. 119, S. 210–215. doi: 10.1007/BF01563741. (In German)

91. Eckmann B. Räume mit Mittelbildungen. *Comment. Math. Helvetici*, 1954, Bd. 28, S. 329–340. doi: 10.1007/BF02566939 (In German)

92. Eckmann B., Ganea T., Hilton P.J. Generalized means. In: *Studies in Analysis and Related Topics.* Stanford, Calf., Standford Univ. Press, 1962, pp. 82–92.

93. Keesling J. The group of homeomorphisms of a solenoid. *Trans. Am. Math. Soc.*, 1972, vol. 172, pp. 119–131. doi: 10.1090/S0002-9947-1972-0315735-6.

94. Eckmann B. Social choice and topology, a case of pure and applied mathematics. *Expos. Math.*, 2004, vol. 22, no. 4, pp. 385–393. doi: 10.1016/S0723-0869(04)80016-1.

95. Krupski P. Means on solenoids. *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, vol. 131, no. 6, pp. 1931–1933. doi: 10.1090/s0002-9939-02-06738-2.

96. Gumerov R.N. On the existence of means on solenoids. *Lobachevskii J. Math.*, 2005, vol. 17, pp. 43–46.

97. Gumerov R.N. Characters and coverings of compact groups. *Russ. Math.*, 2014, vol. 58, no. 4, pp. 7–13. doi: 10.3103/S1066369X14040021.

98. van Kampen E.R. On almost periodic functions of constant absolute value. *J. London Math. Soc.*, 1937, vol. s1-12, no. 1, pp. 3–6. doi: 10.1112/jlms/s1-12.45.3.

99. Fort M.K., Jr. Images of plane continua. *Am. J. Math.*, 1959, vol. 81, no. 3, pp. 541–546. doi: 10.2307/2372912.

⟨ ***Для цитирования*:** *Гумеров Р.Н.* Накрывающие группы и их приложения: обзор // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 1. – С. 5–42. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.5-42. ⟩

⟨ ***For citation*:** Gumerov R.N. Covering groups and their applications: A survey. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 1, pp. 5–42. doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.5-42. (In Russian) ⟩