Методическое пособие для студентов IV курса механико-математического факультета по курсу "Методы вычислений".

Кадушин В. П., Ожегова А. В.

"Методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений"

Введение.

Многообразие реальных процессов порождает большое многообразие прикладных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям в обыкновенных и в частных производных, точное решение которых может быть получено лишь в исключительных случаях. Отсюда возникает необходимость приближенного решения таких задач. В настоящее время создано и разработано значительное число приближенных методов решения дифференциальных уравнений, изложить которые можно лишь на примере некоторых модельных задач. Одной из таких задач является задача Коши для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных. В этой работе не ставится цель изложения всех методов решения задачи Коши, а рассматриваются те методы, которые входят в программу курса "Методы вычислений"для специальностей "Математика"и "Механика".

§1. Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка.

Требуется найти функцию $y(x)$ удовлетворяющую при $x_0 \leq x \leq X$ дифференциальному уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

и начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Условия существования и единственности решения поставленной задачи будем считать выполненными.

Обычно приближенные методы разделяют на классы аналитических и численных. Аналитические методы те, что дают приближенное решение в аналитическом виде, численные — в виде значений искомой функции в заранее выбранных узлах.

Аналитические методы.

а) Метод последовательных приближений (метод Пикара).

Интегрируя обе части уранения (1) с учетом условия (2), получаем интегральное уравнение

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx. \tag{3}$$

Будем решать (3) методом последовательных приближений: задавшись произвольным начальным приближением, например, $y^{(0)}(x) = y_0$, последовательные приближения $y^{(k)}$ найдем согласно следующему итерационному процессу

$$y^{(k)}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y^{(k-1)}(x))dx, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Тогда точное решение уравнения (3) находится как предел $y^{(k)}$ при $k \to \infty$, т. е. дополнительно требуется исследовать сходимость итерационного процесса (4). Если этот процесс сходится, то за приближенное решение задачи Коши (1)-(2) принимается $y^{(n)}(x)$ при достаточно большом n_ε, определяемым уровнем допустимой точности ε.

Этот метод имеет два существенных недостатка, которые ограничивают его применение на практике, а именно, здесь не только необходимо установление его сходимости, но и оценка скорости сходимости. Второй недостаток его состоит в том, что здесь требуется проведение операции интегрирования.

Пример 1. Найти решение задачи Коши методом Пикара.

$$\begin{cases} y' = (x - x^2)y(x), \qquad x \in [0,1] \\ y(0) = 1; \end{cases} \tag{5}$$

Здесь можно легко найти точно решение

$$y^*(x) = e^{(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})}.$$

Найдем несколько приближений по методу Пикара. Пусть $y^{(0)}(x) \equiv 1$

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x) &= 1 + \int\limits_0^x (x - x^2)y^{(0)}(x)dx = 1 + (\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}), \\ y^{(2)}(x) &= 1 + \int\limits_0^x (x - x^2)y^{(1)}(x)dx = 1 + \int\limits_0^{x?} (x - x^2)[1 + (\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3})]dx = \\ &= 1 + (\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3})^2, \\ y^{(3)}(x) &= 1 + (\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3})^2 + \tfrac{1}{3!}(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3})^3, \\ y^{(m)}(x) &= 1 + (\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3})^2 + \tfrac{1}{3!}(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3})^3 + \\ &+ \ldots + \tfrac{1}{m!}(\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{3})^m. \end{aligned} \tag{6}$$

Как легко видеть

$$y^{(m)}(x) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^m}{m!}, \text{ где } t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

т. е. m-й отрезок ряда Маклорена точного решения $y^*(x) = e^t$ по степеням $t = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Отсюда можно получить оценку $|y^*(x) - y^{(m)}(x)| \le \left|\frac{e^\xi t^{m+1}}{(m+1)!}\right| \le \frac{e}{(m+1)!} \max\limits_{0 \le x \le 1} \left|\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|^{m+1}$.

Аналогичную оценку можно получить из условия сжатости оператора

$$Ay = 1 + \int\limits_0^x (x - x^2)y(x)dx$$

и оценки в принципе сжатых отображений, на чем мы не останавливаемся.

б) Метод степенных рядов — основан на разложении решения (1)-(2) в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$. Естественно предполагается, что правая часть (а следовательно $y(x)$) — достаточно гладкая функция. Имеем

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(f, x) \qquad (7)$$

Из (1) при условии (2) получаем

$$\begin{aligned}
&y'(x_0) = f(x_0, y_0),\\
&y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0),\\
&y'''(x_0) = f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}f(x_0, y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)f^2(x_0, y_0) +\\
&\qquad\qquad f'_y(x_0, y_0)[f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)],\\
&\ldots\\
&y^{(n)}(x) = g(f, f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}, \ldots, f^{(n)}_{y^n}).
\end{aligned}$$

Тогда при условии малости $r_n(f, x)$ за приближенное решение задачи (1)-(2) принимается

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!}. \qquad (8)$$

Этот метод тоже редко применяется на практике, поскольку при достаточно большом n он слишко громоздок, а кроме того при достаточном удалении x от x_0 остаток $r_n(f, x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ может не стремиться к нулю.

Пример 2.

Методом степенных рядов найти $y_n(x)$ (8) для задачи Коши:

$$\begin{aligned}
&y' = (x - x^2)y(x), \qquad x \in [0, 1]\\
&y(0) = 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y(0) = 1,\\
&y'(0) = 0,\\
&y''(x)|_{x=0} = [-2y + 2(1 - 2x)y' + (x - x^2)y'']|_{x=0} = 0.
\end{aligned}$$

Остальные производные найдем по формуле Лейбница:

$$\begin{aligned}
y^{(k+1)}(x)|_{x_0} &= \left[\sum_{i=0}^{k} c_k^i (x - x^2)^{(i)} y^{(k-i)}\right]\Bigg|_{x_0} =\\
&= \left[c_k^0(x - x^2)y^{(k)} + c_k^1(1 - 2x)y^{(k-1)} + c_k^2(-2)y^{(k-2)}\right]\Big|_{x=0}.
\end{aligned}$$

где c_k^i — число сочетаний из k по i.

Численные методы.

в) Метод Рунге-Кутты.

Метод Рунге-Кутты — одношаговый метод, состоящий в последовательном вычислении искомой функции задачи (1)-(2) в точках $x_0, x_0+h, x_0+2h, \dots, x_0+kh, \dots$, где h — некоторый выбранный шаг, по некоторой расчетной формуле.

Рассмотрим детальнее получение расчетной формулы метода Рунге-Кутты для задачи (1)-(2). Проинтегрируем обе части уравнения (1) в пределах от x_0 до x_0+h, получим

$$y(x_0+h) - y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))dx.$$

В последнем сделаем замену $x = x_0 + h\alpha$

$$y(x_0+h) - y(x_0) = h\int\limits_0^1 f(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h))d\alpha \tag{9}$$

Таким образом, задача вычисления $y(x_0+h)$ сводится к вычислению интеграла в правой части (9). Для вычисления этого интеграла применим квадратурную формулу с узлами α_i и коэффициентами $p_{ri}, i = \overline{1,r}$,

$$h\int\limits_0^1 f(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h))d\alpha \approx h\sum_{i=1}^{r} p_{ri} f(x_0+\alpha_i h, y(x_0+\alpha_i h))d\alpha$$

Как видно, в правой части нам необходимо вычисление искомой функции $y(x_0+\alpha_i h)$, для её вычисления используем формулу, аналогичную (9)

$$y(x_0+\alpha_i h) - y(x_0) = h\int\limits_0^{\alpha_i} f(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h))d\alpha,$$

а для вычисления последнего интеграла применим квадратурную формулу с узлами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$ и коэффициентами $\beta_{ij}, j = \overline{1, i-1}$, получим

$$y(x_0+\alpha_i h) \approx y(x_0) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} h f(x_0+\alpha_j h, y(x_0+\alpha_j h)) \tag{10}$$

Последовательно вычисленные с помощью квадратурных формул вида (10) приближенные величины $y(x_0+\alpha_j h)$ обозначим через η_j, получим следующую расчетную формулу

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \sum_{i=1}^{r} p_{ri} K_i(h) \tag{11}$$

где $K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i)$.

$$\xi_i = x_0 + \alpha_i h, \text{ при этом требуем, что } \alpha_1 = 0$$
$$\eta_i = y_0 + \beta_{i1}K_1(h) + \beta_{i2}K_2(h) + \ldots + \beta_{ii-1}K_{i-1}(h)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&K_1(h) = hf(x_0, y_0),\\
&K_2(h) = hf(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + \beta_{21} K_1(h)),\\
&K_3(h) = hf(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + \beta_{31} K_1(h) + \beta_{32} K_2(h))
\end{aligned}$$

и т. д. , т. е. $K_i(h)$ — определяются последовательно, а, следовательно, определяется правая часть (11).

Формула (11) с учетом ξ_i, η_i определяет расчетную формулу метода Рунге-Кутты. Чтобы воспользоваться этой формулой нам необходимо найти параметры этой формулы

$$\begin{cases}
p_{r1} \quad p_{r2} \quad p_{r3} \quad \dots \qquad p_{rr}\\
\alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_r \quad (\alpha_1 = 0)\\
\beta_{21}\\
\beta_{31} \quad \beta_{32}\\
\dots\\
\beta_{r1} \quad \beta_{r2} \qquad \dots \quad \beta_{rr-1}
\end{cases} \tag{12}$$

Для определения этих параметров определим функцию погрешности расчетной формулы (11), положив

$$\varphi_r(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - \sum_{i=1}^{r} p_{ri} K_i(h). \tag{13}$$

Очевидно, $\varphi_r(0) = 0$.

Для нахождения параметров (12) потребуем, чтобы

$$\varphi_r^{(j)}(0) = 0, j = \overline{1, s} \tag{14}$$

где s — максимально возможное. Условие (14) позволяет определить (вообще говоря, неоднозначно) параметры (12), тогда при этих параметрах функция погрешности (13) имеет разложение по степенм h

$$\varphi_r(h) = \frac{\varphi_r^{(s+1)}(\xi) h^{s+1}}{(s+1)!} \, (0 < \xi < h) \tag{15}$$

Предполагая $\varphi_r^{(s+1)}(\xi)$ ограниченной, получаем расчетную формулу (11), погрешность которой $O(h^{s+1})$. Вычислив значение $y(x_0 + h)$, примем в (11) точку $x_0 + h$ за x_0, вычислим $y(x_0 + 2h)$ и т. д.

Рассмотрим несколько частных случаев.

I. $r = 1$.

$$\begin{aligned}
&y(x_0 + h) = y(x_0) + p_{11} K_1(h),\\
&K_1(h) = hf(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Найдем p_{11}.

$$\varphi_1(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - p_{11}hf(x_0,y_0)$$
$$\varphi_1(0) = 0 \text{ по определению } \varphi_1(h)$$
$$\varphi_1'(0) = y'(x_0) - p_{11}f(x_0,y_0) = (1-p_{11})y'(x_0) = 0$$

Так как x_0 и $y(x)$ произвольно, то $1 - p_{11} = 0$. Таким образом получаем следующую расчетную формулу:

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0,y_0) \tag{16}$$

Очевидно, мы не можем потребовать, чтобы $\varphi_1''(0)$ ранялось нулю. Поэтому погрешность формулы (16) имеет $O(h^2)$. Расчетная формула (16) называется формулой метода Эйлера: $y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i,y_i)$, где $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,2,3,\ldots$.

II. $r = 2$.

$$y(x_0+h) = y(x_0) + p_{21}K_1(h) + p_{22}K_2(h),$$
$$K_1(h) = hf(x_0,y_0),$$
$$K_2(h) = hf(x_0+\alpha_2 h, y_0 + \beta_{21}hf(x_0,y_0)).$$

$$\varphi_2(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - p_{21}hf(x_0,y_0) - p_{22}hf(x_0+\alpha_2 h, y_0+\beta_{21}hf(x_0,y_0)),$$
$$\varphi_2'(0) = y'(x_0) - p_{21}f(x_0,y_0) - p_{22}f(x_0+\alpha h, y_0+\ldots)|_{h=0} - hp_{22}f_h'(x_0+\alpha h, y_0\ldots)|_{h=0},$$
$$(1-p_{21}-p_{22})y'(x_0) = 0,$$
$$\varphi_2''(0) = y''(x_0) - 2p_{22}f_h'(x_0+\alpha_2, y_0+\beta_{21}hf(x_0,y_0))|_{h=0} =$$
$$f_x'(x_0,y_0) + f_y'(x_0,y_0)f(x_0,y_0) - 2p_{22}\alpha_2 f_x'(x_0,y_0) - 2p_{22}\beta_{21}f_y'(x_0,y_0)f(x_0,y_0) =$$
$$(1-2p_{22}\alpha_2)f_x'(x_0,y_0) + (1-2p_22\beta_{21})f_y'(x_0,y_0)f(x_0,y_0) = 0.$$

Отсюда, в силу произвольности x_0 и $f(x,y)$, получаем

$$2\alpha_2 p_{22} = 1, 2\beta_2 p_{22} = 1.$$

Можно убедиться, что мы не можем потребовать, чтобы $\varphi'''(0)$ равнялась нулю. Тогда для определения параметров $p_{21}, p_{22}, \alpha_2, \beta_{21}$ получаем систему:

$$\begin{cases} p_{21} + p_{22} = 1, \\ 2\alpha_2 p_{21} = 1, \\ 2\beta_{21}p_{22} = 1, \end{cases}$$

где один параметр можно выбрать произвольно, например, $p_{22} = 1$. Тогда $p_{21} = 0, \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$. Получаем расчетную формулу

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i,y_i))), i = \overline{0, n-1} \tag{17}$$

погрешность которой $O(h^3)$.

Расчетные формулы Рунге-Кутты более высокой точности приведены в [1],(ч. II, стр. 28-32).

Замечание. Погрешность, устанавливаемая формулой (15), называется локальной, т. е. это погрешность, допускаемая на каждом шаге. Погрешность, допускаемая на всем отрезке во всех точках $\{x_i\}_0^n \subset [a, b]$, называется погрешностью метода. Как показано в [1](ч. II, стр. 42-53), погрешность метода Рунге-Кутты на порядок ниже погрешности расчетной формулы. Так погрешность метода в случае применения формулы (17) имеет $O(h^2)$.

Пример 3. В задаче Коши

$$\begin{cases} y' = (x - x^2)y(x), \qquad x \in [0, 1] \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

вычислить значения $y(x_i)$, $x_i = 0,1i$, $i = \overline{1,4}$, используя расчетные формулы (16) и (17).

г) Методы Адамса.

Методы Адамса относятся с методам, в которых вычисление искомой функции в точке x_{m+1} зависит от значения этой функции в предыдущих точках, например, $x_{m-k}, x_{m-k+1}, \ldots, x_{m-1}, x_m$. Такие методы называются многошаговыми. Пусть каким-либо одношаговым методом в точках $x_{m-k}, x_{m-k+1}, \ldots, x_m$ вычислены сооcтветственно значения $y_{m-k}, y_{m-k+1}, \ldots, y_m$, а, следовательно можно считать известными $f_{m-k}, f_{m-k+1}, \ldots, f_m$, где $y_i = y(x_i)$, $f_i = f(x_i, y_i)$, $f(x, y)$ — функция правой части уравнеия (1).

Для вычисления y_{m+1} проинтегрируем обе части уравнения (1) от x_m до x_{m+1}, получим

$$y_{m+1} - y_m = \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x)dx = h \int\limits_0^1 f(x_m + \alpha h, y(x_m + \alpha h))d\alpha \tag{18}$$

где $\alpha = \frac{x - x_m}{h}$. Очевидно, что узлы x_{m-i} в новых переменных имеют вид $\alpha_i = -i$, $i = \overline{0, k}$.

Для вычисления интеграла в (18) применим интерполяционную квадратурную формулу по узлам: $\alpha_i = -i$, $i = \overline{0, k}$ и значениями $f_{m-i} = f(x_m - ih, y(x_m - ih))$. Имеем

$$h \int\limits_0^1 f(x_m + \alpha h, y(x_m + \alpha h))d\alpha \approx h \sum_{i=0}^{k} f_{m-i}\beta_{m-i},$$

где

$$\beta_{m-i} = \frac{(-1)^i}{i!(k-i)!} \int\limits_0^1 \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k)}{\alpha+i} d\alpha. \tag{19}$$

Тогда из (18) получаем расчетную формулу экстраполяционного метода Адамса

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=0}^{k} f_{m-i}\beta_{m-i} \tag{20}$$

где β_{m-i} определены (19).

Название "экстраполяционный"обусловлено тем, что интегрируя $f(x, y(x))$ на промежутке x_m до x_{m+1}, мы "экстраполировали"эту функцию , положив её равной $L_k(f, x)$, где узлы x_{m-i}, $i = \overline{0, k}$ взяты из промежутка $[x_{m-k}, x_m]$.

Для получения более точных расчетных формул при вычислении интеграла в (18) с помощью интерполяционной квадратурной формулы к числу узлов интерполирования $f(x, y(x))$ относят и узел x_{m+1}, в котором вычисляется y_{m+1}, т. е. $\alpha_i = -i$, $i = \overline{-1, k}$.

В этом случае получается расчетная формула

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=-1}^{k} f_{m-i}\gamma_{m-i} \tag{21}$$

где γ_{m-i} — интеграл от фундаментального интерполяционного полинома $l_i(\alpha)$ по узлам $\alpha_i = -i$, $i = \overline{-1, k}$. Формула (21) называется расчетной формулой <u>интерполяционного</u> метода Адамса.

Заметим, что параметры β_{m-i} в (20) и γ_{m-i} в (21) от m не зависят, а поэтому расчетные формулы (20) и (21) являются стационарными, т. е. не зависящими от номера шага m.

Отметим принципиальное отличие формул (20) и (21). Запишем (21) в виде

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=0}^{k} f_{m-i}\gamma_{m-i} + hf(x_{m+1}, y_{m+1})\gamma_{m+1}.$$

Как видно из этой записи неизвестная y_{m+1} входит и в правую часть. Поэтому интерполяционный метод (21) в отличие от экстраполяционного (20) является неявным и y_{m+1} находится из (21) каким-либо итерационным методом.

При получении формул (20) и (21) для вычисления интеграла в (18) использован интерполяционный полином в форме Лагранжа. Если точность полученных формул оказалась недостаточной, то нужно добавить к узлам интерполирования ещё один узел x_{m-k-1}, а поэтому придется пересчитывать β_{m-i} и γ_{m-i}. Поэтому на практике интерполяционный полином берется в форме Ньютона для интерполирования в начале таблицы [1]. В этом случае расчетная формула экстраполяционного метода Адамса принимает вид

$$y_{m+1} = y_m + hf_n + \frac{h}{2}\Delta^{(1)} f_{n-1} + \frac{5h}{12}\Delta^{(2)} f_{n-2} + c_k h \Delta^{(k)} f_{n-k} \tag{22}$$

где $c_k = \frac{1}{k!}\int\limits_0^1 \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)d\alpha$, $\Delta^{(k)} f_l$ — конечные разности k-го порядка.

Однако следует отметить, что при использовании формулы (22) на практике при k достаточно больших, происходит накопление арифметической погрешности при счете конечный разностей.

Рассмотрим теперь погрешность расчетных формул (20) (что то же, что и (22)) и (21). Обозначим, для краткости

$$z(\alpha) = f(x_m + \alpha h, y(x_m + \alpha h)).$$

При получении расчетной формулы (20) была использована интерполяционная квадратурная формула

$$\int_0^1 z(\alpha) d\alpha \approx \int_0^1 L_k(z, \alpha) d\alpha, \tag{23}$$

где $L_k(z, \alpha)$ интерполяционный полином Лагранжа функции $z(\alpha)$ по равноотстоящим узлам $\alpha_i = -i$, $i = \overline{0, k}$.

Тогда погрешность расчетной формулы (20) есть не что иное, как погрешность квадратурной формулы (23), умноженной на h. Имеем при условии $x(\alpha) \in C^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} r_k(z) = \int_0^1 \left[z(\alpha) - L_k(z, \alpha)\right] d\alpha = \int_0^1 \tfrac{z_\alpha^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+k) d\alpha \\ = \tfrac{z_\alpha^{(k+1)}(\eta)}{(k+1)!} \int_0^1 \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k) d\alpha, \end{aligned}$$

где последнее равенство получено с использованием теоремы о среднем.

Осталось заметить, что $z_\alpha^{(k+1)}(\eta) = h^{k+1} f_x^{(k+1)}(\xi)$, так как слева производная по h, а справа полная производная по x, а с учетом $y' = f(x, y(x))$, погрешность расчетной формулы экстраполяционного метода Адамса, обозначим её R_k, может быть записана

$$R_k = \frac{C_1 h^{k+2}}{(k+1)!} y^{(k+2)}(\xi) \tag{24}$$

где $C_1 = \int_0^1 \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k) d\alpha$.

Аналогичные рассуждения в случае интерполяционного метода Адамса дают его погрешность, обозначим её R_{k+1},

$$R_{k+1} = \frac{C_2 h^{k+3}}{(k+2)!} y^{(k+3)}(\eta) \tag{25}$$

где $C_2 = \int_0^1 (\alpha - 1)\alpha(\alpha+1)\dots(alpha + k) d\alpha$.

Как видно из формул (24) и (25) погрешность расчетной формулы интерполяционного метода, при условии ограниченности соответствующих производных, на порядок выше, чем у экстраполяционного.

Дадим другой способ получения погрешностей расчетных формул методов Адамса, позволяющий выделить главный член погрешности. Ограничимся лишь случаем экстраполяционного метода Адамса.

Пусть для вычисления интеграла в формуле (18) использована квадратурная формула с узлами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ и коэффициентами $A_0, A_1, \ldots, A_k$. Тогда из (18) получается расчетная формула

$$y_{m+1} = y_m + h \sum_{i=0}^{k} A_i f(x_m + \alpha_i h, y(x_m + \alpha_i h)). \tag{26}$$

Рассмотрим функцию погрешности этой формулы

$$\psi(h) = y(x_m + h) - y(x_m) - h \sum_{i=0}^{k} A_i f(x_m + \alpha_i h, y(x_m + \alpha_i h)).$$

Пусть теперь узлы $\{\alpha_i\}_0^k$ и коэффициенты $\{A_i\}_0^k$ таковы, что выбранная квадратурная формула точна для любого многочлена степени n от α, что равносильно, она точна для $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$.

Тогда узлы и коэффициенты должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + \ldots + A_k = \int\limits_0^1 d\alpha = 1 \\ A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 + \ldots + A_k\alpha_k = \int\limits_0^1 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \\ \ldots \\ A_0\alpha_0^n + A_1\alpha_1^n + \ldots + A_k\alpha_k^n = \frac{1}{n+1}, \text{ где } n \leq 2k+1 \end{cases} \tag{28}$$

Очевидно $\psi(0) = 0$.

$$\begin{aligned} &\psi'(0) = y'(x_m) - \sum_{i=0}^{k} A_i f(x_m, y_m) = y'(x_m)(1 - \sum_{i=0}^{k} A_i) \\ &\psi''(0) = y''(x_m) - 2\sum_{i=0}^{k} \alpha_i A_i f'_x(x_m, y_m) = y''(x_m)(1 - 2\sum_{i=0}^{k} A_i\alpha_i) \\ &\ldots \\ &\psi^{(n+1)}(0) = y^{(n+1)}(x_m)(1 - (n+1)\sum_{i=0}^{k} A_i\alpha_i^n) \end{aligned}$$

Из последних равенств следует, условия (28) эквивалентны тому, что $\psi(h)$, определенная (27), удовлетворяет условию $\psi^{(j)}(0) = 0$, $j = \overline{1, n+1}$, это означает, что её разложение по степеням h имеет вид

$$\psi(h) = \frac{\psi^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} h^{n+2} = \frac{\psi^{(n+2)}(0)}{(n+2)!} h^{n+2} + o(h^3).$$

Тогда (24) с выделением главного члена погрешности примет вид

$$\begin{aligned} R_k = \tfrac{y^{(k+2)}(x_m)h^{k+2}}{(k+2)!} \left(1 - (k+2)\sum_{i=0}^{k} A_i(-i)^{k+1}\right) + o(h^{k+3}) = \\ = y^{(k+2)}(x_m)h^{k+2}\left[\tfrac{1}{(k+2)!} - \tfrac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k} A_i(-i)^{k+1}\right] + o(h^{k+3}) \end{aligned}$$

где $A_i = \beta_{m-i}$ в (19).

Пример 4. Получить расчетные формулы экстраполяционного и интерполяционного двушаговых методов Адамса и найти $y(x_i)$, $x_i = 0,1i$, $i = 2,3$ в задаче Коши:

$$y' = (x - x^2)y(x), \qquad x \in [0,1]$$
$$y(0) = 1.$$

Значение $y(x_1)$ найти с помощью (17).

д) Постороение вычилительных схем на основе принципа последовательного уточнения результата.

Как и в методе Рунге-Кутты будем исходить из равенства (см. (9))

$$y(x_0 + h) - y(x_0) = h \int\limits_0^1 f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h))d\alpha.$$

Для вычисления последнего интеграла применим квадратурную формулу

$$\int\limits_0^1 z(\alpha)d\alpha \approx \sum_{i=0}^{n} A_i z(\alpha_i).$$

Потребуем, чтобы узлы и коэффициенты последней удовлетворяли системе (28), где $n \leq 2k+1$. Тогда получаем расчетную формулу

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \sum_{i=0}^{k} A_i f(x_0 + \alpha_i h, y(x_0 + \alpha_i h)) \tag{29}$$

Погрешность её, как показано выше, имеет порядок h^{n+2}. Как и в методе Рунге-Кутты использование (29) упирается в вычисление $y(x_0 + \alpha_i h)$. Будем вычислять $y(x_0 + \alpha_i h)$ аналогично вычислению $y(x_0 + h)$ в (29). Заменив h на $\alpha_i h$ в (9), получаем

$$y(x_0 + \alpha_i h) - y(x_0) = \alpha_i h \int\limits_0^1 f(x_0 + \alpha_i \beta h, y(x_0 + \alpha_i \beta h))d\beta \tag{30}$$

где $\frac{x - x_0}{\alpha_i h} = \beta$.

Предполагая $f(x,y)$ достаточно гладкой, из-за наличия в (29) перед суммой h, $y(x_0 + \alpha_i h)$ можно вычислить с погрешностью $O(h^{n+1})$. А это означает интеграл в (30) можно вычислить по квадратурной формуле с узлами β_j и коэффициентами B_j, удовлетворяющими системе (28) с отброшенным последним равенством, при этом число узлов можно уменьшить. Заметим, что в случае $n = 2k+1$ система (28) имеет единственное решение, которое определяет квадратурную формулу Гаусса. При $n < 2k+1$, система (28) разрешима неоднозначно. Пусть β_j, B_j — некоторое решение системы (28). Используя в (30) эту квадратурную формулу для вычисления интеграла получим формулу для вычисления

$$y(x_0+\alpha_i h) \approx y(x_0) + \alpha_i h \sum_{j=0}^{k} \beta_j f(x_0+\alpha_i B_j h, y(x_0+\alpha_i B_j h)).$$

Аналогичным образом вычисляем $y(x_0+\alpha_i\beta_j h)$ и далее каждый раз понижая точности вычисления $x_0+\alpha_i\beta_j\dots\mu_p h$, уменьшая в то же время количество узлов в системе вида (28), придем к простейшей квадратурной формуле

$$y(x_0+\alpha_i\beta_j\dots\gamma_l h) \approx y(x_0) + \alpha_i\beta_j\dots\gamma_l h f(x_0,y_0)$$

имеющий порядок $O(h^2)$ (см. выше метод Эйлера).

Рассматривая описанный процесс в обратном порядке, получаем, что вычисляя значения $y(\alpha_i\beta_j\dots\mu_p)$, т. е. в промежуточных узлах, с некоторой точностью, мы можем путем последовательного уточнения результата получить $y(x_0+h)$ с любой нужной точностью.

Проиллюстрируем изложенную схему на простейших частных случаях.

1. Пусть $n=0$. Тогда система (28) состоит из одного уранения

$$\sum_{i=0}^{k} A_i = 1$$

Параметры k и α_i в этом случае имеют произвольные значения. Положим $k=0$, тогда $A_0=1$. Выбрав $\alpha_0=0$, получим расчетную формулу метода Эйлера

$$y(x_0+h) = y(x_0) + hf(x_0,y_0) \tag{31}$$

В дальнейшем для записи расчетных формул используем обозначение $g_{i+\delta}^{[k]}$ — это значение функции $g(x_i+\delta h)$ вычисляемое по формуле имеющей порядок $O(h^k)$.

Тогда (31) можно записать

$$y_{i+1}^{[2]} = y_i^{[2]} + hf_i^{[2]}$$

При $\alpha_0=1$ получим простейший неявный метод

$$y_{i+1}^{[2]} = y_i^{[2]} + hf_{i+1}^{[2]}$$

2. Пусть $n=1$. Система (28) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} A_i = 1 \\ \sum\limits_{i=0}^{k} A_i\alpha_i = \frac{1}{2}, \text{ где } n \le 2k+1 \end{cases}$$

Положив $k = 0$, получим $A_0 = 1, \alpha_0 = \frac{1}{2}$, что приводит к следующей вычислительной схеме

$$\begin{cases} y_{i+1}^{[3]} = y_i^{[3]} + hf_{i+\frac{1}{2}}^{[2]} \\ f_{i+\frac{1}{2}}^{[2]} = y_i^{[3]} + \frac{h}{2} f_i^{[3]} \end{cases}$$

3. Пусть $n = 2$. Система (28) примет вид

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} A_i = 1 \\ \sum\limits_{i=0}^{k} A_i \alpha_i = \frac{1}{2} \\ \sum\limits_{i=0}^{k} A_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3} \qquad n \le 2k+1,\, k \ge 1 \end{cases}$$

Положив $k = 1$, получим, что $\{\alpha_i, A_i\}_0^1$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_0\alpha_0 + A_1\alpha_1 = \frac{1}{2} \\ A_0\alpha_0^2 + A_1\alpha_1^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Один параметр можно выбрать произвольно. Выбрав $\alpha_0 = 0$, получаем решение последней системы $A_1 = \frac{1}{4}$, $A_0 = \frac{3}{4}$, $\alpha_1 = \frac{2}{3}$.

Получаем следующую расчетную схему

$$\begin{array}{l} y_{i+1}^{[4]} = y_i^{[4]} + \frac{3h}{4} f_i^{[4]} + \frac{h}{4} f_{i+\frac{2}{3}}^{[3]} \\ y_{i+\frac{2}{3}}^{[3]} = y_i^{[4]} + \frac{2}{3} h f_{i+\frac{1}{3}}^{[2]} \\ y_{i+\frac{1}{3}}^{[2]} = y_i^{[4]} + \frac{h}{3} f_i^{[4]} \end{array}$$

Пример 5. Используя расчетные схемы при $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ вычислить значения $y(0,1)$ в задаче Коши

$$\begin{cases} y' = (x - x^2)y(x), \qquad x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

§2. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений.

Мы рассмотрели методы решения задачи Коши (1)-(2). Эти методы могут быть перенесены на случай задачи Коши для систем дифференциальных уранений. Кратко остановимся лишь на методах Рунге-Кутты и Адамса для систем дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пусть требуется найти $y(x)$ и $z(x)$, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) = g(x, y(x), z(x)) \qquad x_0 \le x \le X \end{cases} \tag{32}$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ z(x_0) &= z_0 \end{aligned} \tag{33}$$

Как и в случае одного уранения имеем

$$\begin{aligned} y(x_0+h) - y(x_0) &= h\int\limits_0^1 f(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h), z(x_0+\alpha h))d\alpha \\ z(x_0+h) - z(x_0) &= h\int\limits_0^1 g(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h), z(x_0+\alpha h))d\alpha \end{aligned}$$

Применяя к интегралам квадратурные формулы, получим

$$\begin{aligned} y(x_0+h) - y(x_0) &= h\sum_{i=1}^r p_{ri} f(x_0+\alpha_i h, y(x_0+\alpha_i h), z(x_0+\alpha_i h)) \\ z(x_0+h) - z(x_0) &= h\sum_{i=1}^r \overline{p_{ri}} g(x_0+\overline{\alpha_i} h, y(x_0+\overline{\alpha_i} h), z(x_0+\overline{\alpha_i} h)) \end{aligned}$$

Заметим, что число узлов может быть в этих квадратурных формулах, вообще говоря, различно, но требование, чтобы приближенные значения $y(x)$ и $z(x)$ в узлах должны иметь одинаковый порядок точности приводит к необходимости, чтобы число r в обеих квадратурных формулах было одинаково.

Повторяя рассуждения при выводе расчетных формул метода Рунге-Кутты в случае одного уравнения, получим следующую вычислительную схему

$$y(x_0+h) = y(x_0) + \sum_{i=1}^r p_{ri} K_i(h) \tag{34}$$

$$z(x_0+h) = z(x_0) + \sum_{i=1}^r \overline{p_{ri}}\,\overline{L_i(h)} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} &K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i, \theta_i) \\ &L_i(h) = hg(\xi_i, \eta_i, \theta_i) \\ &\xi_i = x_0 + \alpha_i h \qquad \alpha_1 = 0 \\ &\eta_i = y_0 + \beta_{i1}K_1(h) + \beta_{i2}K_2(h) + \ldots + \beta_{ii-1}K_{i-1}(h) \\ &\theta_i = z_0 + \gamma_{i1}L_1(h) + \gamma_{i2}L_2(h) + \ldots + \gamma_{ii-1}L_{i-1}(h) \\ &\overline{K_i(h)} = hf(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i}, \overline{\theta_i}) \\ &\overline{L_i(h)} = hg(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i}, \overline{\theta_i}) \\ &\overline{\xi_i} = x_0 + \overline{\alpha_i} h \qquad \overline{\alpha_1} = 0 \\ &\overline{\eta_i} = y_0 + \overline{\beta_{i1}}\,\overline{K_1(h)} + \overline{\beta_{i2}}\,\overline{K_2(h)} + \ldots + \overline{\beta_{ii-1}}\,\overline{K_{i-1}(h)} \\ &\overline{\theta_i} = z_0 + \overline{\gamma_{i1}}\,\overline{L_1(h)} + \overline{\gamma_{i2}}\,\overline{L_2(h)} + \ldots + \overline{\gamma_{ii-1}}\,\overline{L_{i-1}(h)} \end{aligned}$$

Для вычисления параметров $p_{ri}, \overline{p_{ri}}, \alpha_i, \overline{\alpha_i}, \beta_{ij}, \overline{\beta_{ij}}, \gamma_{ij}, \overline{\gamma_{ij}}$, составим функции погрешности расчетных формул (34) и (35)

$$\varphi(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - \sum_{i=1}^{r} p_{ri} K_i(h)$$
$$\psi(h) = z(x_0+h) - z(x_0) - \sum_{i=1}^{r} \overline{p_{ri}}\,\overline{L_i(h)}$$

и потребуем, чтобы

$$\begin{cases} \varphi^{(j)}(0) = 0 \\ \psi^{(j)}(0) = 0 \qquad j = \overline{0, s} \end{cases} \tag{36}$$

до как можно большего s.

Тогда погрешность расчетных формул (34) и (35) найденных из условий (36) имеет порядок $O(h^{s+1})$ (при условии, что $\varphi^{(s+1)}(\xi)$ и $\psi^{(s+1)}(\eta)$ ограничены на $[x_0, X]$).

Проиллюстрируем это на примере получения расчетной схемы при $r = 2$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \varphi(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - p_{21} h f(x_0, y_0) - p_{22} h f(x_0 + \alpha_2 h, y(x_0)+ \\ +\beta_{21} h f(x_0, y_0, z_0), z(x_0) + \gamma_{21} h g(x_0, y_0, z_0)) \\ \varphi'(0) = y'(x_0+h)|_{h=0} - p_{21} f(x_0, y_0, z_0) - p_{22} f(x_0, \alpha_2 h, \ldots)|_{h=0} - \\ -p_{22} h f'_h(x_0+\alpha_2 h, \ldots)|_{h=0} = (1 - p_{21} - p_{22}) f(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{aligned}$$

Отсюда $p_{21} + p_{22} = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi''(0) = y''(x_0+h)|_{h=0} - 2p_{22} f'_h(x_0+\alpha_2 h, \ldots)|_{h=0} - p_{22} h f''_{hh}(x_0+\alpha_2 h, \ldots)|_{h=0} = \\ = f'_x(x_0, y_0, z_0) + f'_y(x_0, y_0, z_0) f(x_0, y_0, z_0) + f'_z(x_0, y_0, z_0) g(x_0, y_0, z_0) - \\ -2p_{22}[\alpha_2 f'_x(x_0, y_0, z_0) + \beta_{21} f'_y(x_0, y_0, z_0) f(x_0, y_0, z_0) + \\ +\gamma_{21} f'_z(x_0, y_0, z_0) g(x_0, y_0, z_0)] = \\ = f'_x(1 - 2p_{22}\alpha_2) + f'_y f (1 - 2p_{22}\beta_{21}) + f'_z g (1 - 2p_{22}\gamma_{21}) = 0 \end{aligned}$$

Для определения параметров получаем систему

$$\begin{cases} p_{21} + p_{22} = 1 \\ 2\alpha_2 p_{22} = 1 \\ 2\beta_{21} p_{22} = 1 \\ 2\gamma_{21} p_{22} = 1 \end{cases} \tag{37}$$

Можно убедиться, что $\varphi'''(0) \neq 0$ и других условий на коэффициенты p_{21}, p_{22}, α_2, β_{21}, γ_{21} нет. Тогда выбирая, например, $p_{22} = 1$ получим $\alpha_2 = \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}$.

Для функции $\psi(h)$ получим аналогичную систему для $\overline{p_{21}}$, $\overline{p_{22}}$, $\overline{\alpha_2}$, $\overline{\beta_{21}}$, $\overline{\gamma_{21}}$. Положим, например, $\overline{p_{22}} = \frac{1}{2}$, получим $\overline{\alpha_2} = \overline{\beta_{21}} = \overline{\gamma_{21}} = 1$. Подставляя найденные параметры в (34) и (35), получим расчетную схему

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i, z_i), z_i + \frac{h}{2} g(x_i, y_i, z_i)) \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i, z_i) + \frac{h}{2} f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i, z_i), z_i + h g(x_i, y_i, z_i)) \end{cases}$$

Погрешность расчетной схемы $O(h^3)$.

Перенесение методов Адамса на случай систем также не представляет большой сложности.

Пусть каким-либо одношаговым методом, например, методом Рунге-Кутты, найдены значения решения задачи Коши (32)-(33) в узлах x_{m-j}, $j=\overline{0,k}$, т. е. определены все значения, представленые следующей таблицей:

$$\begin{array}{ccccc} x_{m-k} & \cdots & x_{m-2} & x_{m-1} & x_m \\ y_{m-k} & \cdots & y_{m-2} & y_{m-1} & y_m \\ z_{m-k} & \cdots & z_{m-2} & z_{m-1} & z_m \\ f_{m-k} & \cdots & f_{m-2} & f_{m-1} & f_m \\ g_{m-k} & \cdots & g_{m-2} & g_{m-1} & g_m \end{array} \tag{38}$$

где $t_k = t(x_k)$, требуется найти y_{m+1}, z_{m+1}. Интегрируя обе части (32)

$$y_{m+1} = y_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x), z(x))dx$$
$$z_{m+1} = z_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} g(x, y(x), z(x))dx$$

и применяя для вычисления интегралов справа интерполяционную квадратурную формулу по узлам x_{m-j}, $j=\overline{0,k}$, получим

$$y_{m+1} \approx y_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} L_k(f,x)dx = y_m + \sum_{j=0}^{m} f_{m-j} \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} l_{m-j}(x)dx$$
$$z_{m+1} \approx z_m + \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} L_k(g,x)dx = z_m + \sum_{j=0}^{m} g_{m-j} \int\limits_{x_m}^{x_{m+1}} l_{m-j}(x)dx$$

Отсюда получается расчетная схема экстраполяционного метода Адамса

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \sum\limits_{j=0}^{k} f_{m-j}\beta_{m-j} \\ z_{m+1} = z_m + \sum\limits_{j=0}^{k} g_{m-j}\beta_{m-j} \end{cases} \tag{39}$$

где β_{m-j} — интеграл от соответствующего фундаментального интерполяционного полинома, и после замены в этом интеграле $x = x_m + \alpha h$, как нетрудно видеть, получается β_{m-j} в виде (19), умноженное на h.

Аналогично получается вычислительная схема интерполяционного метода Адамса.

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \sum\limits_{j=-1}^{k} f_{m-j}\widetilde{\beta_{m-j}} \\ z_{m+1} = z_m + \sum\limits_{j=-1}^{k} g_{m-j}\widetilde{\beta_{m-j}} \end{cases} \tag{40}$$

где $\widetilde{\widetilde{\beta_{m-j}}}$ — соответствующий интеграл от фундаментального интерполяционного полинома по узлам x_{m-j}, $j = \overline{-1,k}$.

Отличие схем (39) и (40) как по реализации, так и по точности те же, что и в случае одного уравнения (1)-(2).

Пример 6. Получить расчетные схемы задачи (32)-(34) экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса для $k = 1$.

§3. Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков.

В случае задачи Коши для дифференциальных уравнений высших порядков можно воспользоваться сведением этой задачи к задаче для систем дифференциальных уравнений 1-го порядка. Однако, это сведение невыгодно, так как без него можно получить более экономичные расчетные схемы. Рассмотрим это на примере задачи Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка.

$$\begin{cases} y'' = f(x, y(x), y'(x)) \qquad x_0 \le x \le X \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \tag{41}$$

Для получения расчетной схемы метода Рунге-Кутты проинтегрируем обе части уравнения (41) от x_0 до $x_0 + h$

$$y'(x_0 + h) - y'(x_0) = h \int\limits_0^1 f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h))d\alpha \tag{42}$$

Введем параметр β, по которому можно проинтегрировать (42) еще раз. Аналогично получению (42) имеем

$$y'(x_0 + \beta h) - y'(x_0) = h \int\limits_0^\beta f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h))d\alpha$$

Умножим обе части последнего равенства на $hd\beta$ и проинтегрируем по β от 0 до 1. Получим

$$y(x_0 + h) - y(x_0) - hy'(x_0) = h^2 \int\limits_0^1 d\beta \int\limits_0^\beta f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h))d\alpha$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования, получаем

$$y(x_0 + h) - y(x_0) - hy'(x_0) = h^2 \int\limits_0^1 (1 - \alpha) f(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h))d\alpha \tag{43}$$

Экономичность расчетной схемы, получаемой без сведения (41) к системе, состоит в том, что при вычислении интеграла в (43) за счет множителя h^2 мы можем применить более "грубую"квадратурную формулу, чем при вычислении интеграла в (42). Рассмотрим сначала метод Рунге-Кутты.

Далее рассуждаем как при получении расчетных формул метода Рунге-Кутты.

Применим к интегралу в (42) квадратурную флормулу

$$h\int_0^1 f(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h), y'(x_0+\alpha h))d\alpha \approx h\sum_{i=1}^{r} p_{ri} f(x_0+\alpha_i h, y(x_0+\alpha_i h), y'(x_0+\alpha_i h))$$

Для вычисления $y'(x_0+\alpha_i h)$ как и раньше используем представление (см. (10))

$$\begin{aligned} y'(x_0+\alpha_i h) - y'(x_0) = h\int_0^{\alpha_i} f(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h), y'(x_0+\alpha h))d\alpha \approx \\ \approx h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} h f(x_0+\alpha_j h, y(x_0+\alpha_j h), y'(x_0+\alpha_j h)) \end{aligned} \tag{44}$$

Аналогично

$$y(x_0+\alpha_i h) - y(x_0) = h\int_0^{\alpha_i} y'(x_0+\alpha h)d\alpha \approx h\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{ij} y'(x_0+\alpha_j h) \tag{45}$$

где, как и в (10), интегралы в (44)-(45) заменены квадратурными суммами по узлам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$. Обозначая как и прежде $\eta_j \approx y(x_0+\alpha_j h)$, а $\theta_j \approx y'(x_0+\alpha_j h)$, получим следующую вычислительную схему:

$$\begin{aligned} &y'(x_0+h) = y'(x_0) + \sum_{i=1}^{r} p_{ri} K_i(h) \\ &y(x_0+h) - y(x_0) - hy'(x_0) = \sum_{i=1}^{r-1} q_{r-1\, i} L_i(h) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} &K_i(h) = hf(\xi_i, \eta_i, \theta_i) \\ &\xi_i = x_0 + \alpha_i h \qquad \alpha_1 = 0 \\ &\eta_i = y_0 + h\gamma_{i1}\theta_1 + h\gamma_{i2}\theta_2 + \ldots + h\gamma_{ii-1}\theta_{i-1} \\ &\theta_i = y'_0 + \beta_{i1}K_1(h) + \beta_{i2}K_2(h) + \ldots + \beta_{ii-1}K_i(h) \\ &L_i(h) = h^2 f(\mu_i, \nu_i, \delta_i) \\ &\mu_i = x_0 + \beta_i h \qquad \beta_1 = 0 \\ &\nu_i = y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{\gamma_{ij}}\widetilde{\theta_j} \\ &\delta_i = y'_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \widetilde{\beta_{ij}} L_j(h) \end{aligned}$$

Для нахождения параметров, как и выше составим функцию погрешности и потребуем, чтобы $\varphi(h) = y'(x_0+h) - y'(x_0) - \sum\limits_{i=1}^{r} p_{ri}K_i(h)$ и $\psi(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - hy'(x_0) - \sum\limits_{i=1}^{r-1} q_{r-1,i}L_i(h)$ имели производные при $h = 0$ до как можно более высокого порядка s. Тогда локальная погрешность построенной вычислительной схемы равна $O(h^{s+1})$. Заметим, что условие $\psi'(0) = 0$ всегда выполнено.

В качестве иллюстрации получим вычислительную схему при $r = 2$.

$$
\begin{aligned}
& y'(x_0+h) = y'(x_0) + p_{21}hf(x_0,y_0,y_0') + p_{22}hf(x_0+\alpha_2 h, y_0+\beta_{21}hy_0', y_0'+ \\
& \qquad\qquad +\gamma_{21}hf(x_0,y_0,y_0'))) \\
& \varphi'(h)|_{h=0} = y''(x_0+h)|_{h=0} - p_{21}f(x_0,y_0,y_0') - p_{22}f(x_0+\alpha_2 h,\ldots)|_{h=0} - \\
& \qquad\qquad -p_{22}hf_h'(x_0+\alpha_2 h,\ldots)|_{h=0} = 0 \\
& p_{21}+p_{22} = 1 \\
& \varphi''(h) = y'''(x_0+h)|_{h=0} - 2p_{22}f_h'(x_0+\alpha_2 h,\ldots)|_{h=0} - p_{22}hf_{hh}''(x_0+\alpha_2 h,\ldots) = \\
& \qquad\qquad f_x' + f_y'y_0' + f_{y'}f - 2p_{22}(\alpha_2 f_x' + f_y'\beta_{21} + f_{y'}'f\gamma_{21}) = \\
& \qquad\qquad\qquad (\text{аргументы } x_0, y_0, y_0' \text{ опущены}) \\
& \qquad\qquad = f_x'(1-2p_{22}\alpha_2) + f_y'y_0'(1-2p_{22}\beta_{21}) + f_y'f(1-2p_{22}\gamma_{21}) = 0
\end{aligned}
$$

Для определения параметров получаем систему

$$
\begin{cases}
p_{21}+p_{22} = 1 \\
2\alpha_2 p_{22} = 1 \\
2\beta_{21}p_{22} = 1 \\
2\gamma_{21}p_{22} = 1
\end{cases}
$$

Положим $p_{22} = 1$, тогда $\alpha_2 = \beta_{21} = \gamma_{21} = \frac{1}{2}$. Для определения параметров счета $y(x_0+h)$ рассмотрим

$$
\begin{aligned}
& \psi(h) = y(x_0+h) - y(x_0) - y(x_0)h - q_{11}h^2 f(x_0,y_0,y_0') \\
& \psi''(0) = (1-q_{11})y''(x_0)
\end{aligned}
$$

Получаем расчетную схему с локальной погрешностью $O(h^3)$:

$$
\begin{cases}
y'(x_i+h) = y'(x_i) + hf(x_i+\frac{h}{2}, y_i+\frac{h}{2}y_i', y_i'+\frac{h}{2}f(x_i,y_i,y_i')) \\
y(x_i) = y(x_i) + hy'(x_i) + h^2 f(x_i,y_i,y_i')
\end{cases}
$$

Построение вычислительных схем решения задачи (41) в методах Адамса не представляет большого труда, поэтому здесь ограничимся лишь общими соображениями.

Пусть каким-либо одношаговым методом (например, методом Рунге-Кутты) вычислены значения в узлах x_{m-j}, $j = \overline{0,k}$ (а при замене $x = x_m + \alpha h$ — в узлах $\alpha_j = -j$, $j = \overline{0,k}$) значения $y_{m-j}, y_{m-j}', f_{m-j}$, $j = \overline{0,k}$. Тогда интегралы в (42) и (43) с заменой x_0 на x_m вычислим с помощью интерполяционной квадратурной формулы в (42) по узлам $\alpha_i = -i$, $i = \overline{0,k}$, а в (43) по узлам $\alpha_i = -i$, $i = \overline{0,k-1}$. Тогда из (42) и (43) получим расчетные формулы экстраполяционого метода Адамса с локальной погрешностью $O(h^{k+2})$.

Пример 7. Для задачи (41) получить расчетные формулы $O(h^4)$ экстраполяционного и интерполяционного методов Адамса.

Литература

[1] Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы., т. 1,2. -М:Наука 1976, 1977

[2] Вержбицкий В. М. Численные методы. -М:Высш. шк., 2001

[3] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы -М:Наука, 2004

[4] Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений т. 2 М:Наука 1962