Известия вузов. Математика
2008, №9, с. 59–68

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Д.В. ПРОХОРОВ, В.Г. ГОРДИЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ В ЛОКАЛЬНОЙ ГИПОТЕЗЕ ХАЖИНСКОГО–ТАММИ

Аннотация. Гипотеза Хажинского–Тамми предполагает, что симметризованная функция Пика является экстремальной в задаче об оценке n-го тейлоровского коэффициента в классе голоморфных однолистных функций, близких к тождественной. В статье найдено точное значение M_4 такое, что симметризованная функция Пика является локально экстремальной в задаче об оценке четвертого тейлоровского коэффициента в классе голоморфных нормированных однолистных функций, модуль которых ограничен числом M_4.

Ключевые слова: гипотеза Хажинского–Тамми, однолистная функция, ограниченная функция, экстремальная задача, функция Пика.

УДК: 517.546

Abstract. According to the Charzynski–Tammi conjecture, the symmetrized Pick function is extremal in the problem on the estimate for the n-th Taylor coefficient in the class of holomorphic univalent functions close to the identical one. In this paper we find the exact value of M_4 such that the symmetrized Pick function is locally extremal in the problem on the estimate for the 4th Taylor coefficient in the class of holomorphic normed univalent functions, whose module is bounded by M_4.

Keywords: Charzynski–Tammi conjecture, univalent function, bounded function, extremal problem, Pick function.

1. Введение

Обозначим через S класс всех голоморфных однолистных в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, а через $S(M)$, $M > 1$, — подкласс, состоящий из всех ограниченных функций $f \in S$, удовлетворяющих ограничению $|f(z)| < M$, $z \in U$.

Гипотеза Бибербаха о справедливости неравенства $|a_n| \leq n$, $n \geq 2$, для $f \in S$ со знаком равенства только для вращений функции Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \tag{1}$$

доказана де Бранжем [1], [2]. Функция Кебе (1) отображает единичный круг U на комплексную плоскость с разрезом по лучу на отрицательном направлении вещественной оси с вершиной в точке $w = -1/4$.

Поступила 14.07.2006

Работа первого автора частично поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 07-01-00120 и грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ, НШ-1295.2003.1.

Еще до доказательства де Бранжа предпринимались удачные попытки оценки начальных коэффициентов в классе S. Что касается оценок в классах $S(M)$, то они были менее успешными. Так, Пик [3] доказал, что

$$\max_{f\in S(M)}|a_2| = 2-\frac{2}{M}, \quad M>1. \tag{2}$$

Максимум в (2) достигается только для вращений функций Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(M)z^n. \tag{3}$$

Функции Пика (3) отображают U на круг радиуса M с центром в начале координат, разрезанный вдоль отрезка на отрицательном направлении вещественной оси.

Точная оценка третьего коэффициента в классах $S(M)$ также известна для всех $M>1$. В частности, [4]

$$\max_{f\in S(M)}|a_3| = 1-\frac{1}{M^2}, \quad M\le e, \tag{4}$$

со знаком равенства только для вращений функции Пика $P_{M2} = [P_{M^2}(z^2)]^{1/2}$.

К настоящему времени точные оценки четвертого коэффициента в классах $S(M)$ найдены не для всех $M>1$, однако для M, близких к единице, функции $P_{M3}(z) = [P_{M^3}(z^3)]^{1/3}$ остаются экстремальными в этой задаче. Именно, Шиффер и Тамми [5] доказали, что

$$\max_{f\in S(M)}|a_4| = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{M^3}\right), \quad M\le\frac{34}{19}, \tag{5}$$

со знаком равенства для вращений функции P_{M3}. Такие результаты вдохновили Хажинского и Тамми сформулировать гипотезу о том, что для каждого $n\ge 2$ существует $M_n>1$ такое, что для всех $M\in(1,M_n)$ и всех функций $f\in S(M)$ справедливы неравенства

$$|a_n| \le \frac{2}{n-1}\left(1-\frac{1}{M^{n-1}}\right) \tag{6}$$

со знаком равенства для вращений функции $P_{Mn}(z) = [P_{M^n}(z^n)]^{1/n}$. Гипотеза Хажинского–Тамми была доказана Северским [6], [7] и Шиффером и Тамми [8]. Из результата Шиффера и Тамми [5] следует, что $M_4 = 34/19$.

Доказательство гипотезы Хажинского–Тамми тем более решает локальную проблему, которую можно сформулировать как существование чисел $M_n^*>M_n$, $n\ge 2$, таких, что для всех $M\in(1,M_n^*)$ и всех функций $f\in S(M)$ неравенства (6) справедливы в некоторой окрестности функции P_{Mn}.

В данной статье мы предлагаем алгоритм нахождения значений M_n^*. Задача сводится к определению локального максимума функции многих переменных в заданной точке. Поскольку количество переменных быстро растет с увеличением числа n, мы ограничимся случаем $n=4$, где удается выписать целевую функцию и все ее частные производные до второго порядка. Поэтому значение M_4^* дается как корень некоторого уравнения. Целевая функция и ее частные производные служат решениями задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, их значения аналитически не выписываются, но могут быть вычислены приближенно. Основной результат содержится в теореме, в которой найдено число M_4^*.

Теорема. *Число* $M_4^*\ge 34/19$ *определяется условием, что для всех* $M\in(1,M_4^*)$ *матрицы* (33) *удовлетворяют условиям* (34), *где элементы матриц* (33) *являются значением в точке* $t=1-1/M$ *решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений*

(22)–(24), (29)–(32), *правые части которых определяются посредством формул* (25), (26), (28).

Обратим внимание, что значение M_4^* локального максимума в гипотезе Хажинского–Тамми, найденное в теореме, превышает значение $M_4 = 34/19$ глобального максимума в этой гипотезе, найденное Шиффером и Тамми [5].

2. Предварительные сведения и формализация экстремальной задачи

Функция

$$P_{M3}(z) = z + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{M^3}\right) z^4 + \cdots, \quad z \in U,$$

доставляет граничную точку $A_M = (0, 0, 2/3(1 - 1/M^3))$ множеству

$$V_4(M) = (a_2, a_3, \Re a_4 : f \in S(M)), \quad M > 1.$$

Граница $\partial V_4(M)$ множества $V_4(M)$ доставляется функциями $f \in S(M)$, которые отображают круг U на круг радиуса M с не более, чем тремя кусочно аналитическими разрезами. Обозначим через $\partial V_4^3(M)$ часть граничной поверхности $\partial V_4(M)$, доставляемую функциями $f \in S(M)$, которые отображают круг U на круг радиуса M ровно с тремя кусочно аналитическими разрезами. Поскольку функция P_{M3} отображает единичный круг U на круг радиуса M с тремя прямолинейными разрезами, то точка A_M является внутренней точкой множества $\partial V_4^3(M)$. Известно [9], что все функции $f \in S(M)$, доставляющие точки граничной поверхности $\partial V_4(M)$, можно представить в виде

$$f(z) = Mw(z, \log M), \tag{7}$$

где

$$w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \cdots) \tag{8}$$

является интегралом обобщенного дифференциального уравнения Левнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \frac{e^{iu_k} + w}{e^{iu_k} - w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad 0 \le t < \infty, \tag{9}$$

с непрерывными функциями $u_k = u_k(t)$, $k = 1, 2, 3$, и постоянными числами $\lambda_k \ge 0$, $k = 1, 2, 3$, $\sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 1$.

Кроме того, управляющие функции u_k удовлетворяют необходимым условиям оптимальности скользящего режима в экстремальной задаче о достижимости граничной поверхности $\partial V_4^3(M)$. Опишем эти условия подробнее. Пусть $a_k(t)$, $k \ge 2$, определяются разложением (8). Совершим замену переменной $t \to 1 - e^{-t}$, и обозначим $a_k(t) = x_{2k-3}(t) + ix_{2k-2}(t)$, $k = 2, 3, 4$. Подставляя (8) в (9) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, после произведенной замены переменной получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\dot{x}_1(t) = -2 \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \cos u_k, \quad x_1(0) = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = 2 \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \sin u_k, \quad x_2(0) = 0,$$

$$\dot{x}_3(t) = -2 \sum_{k=1}^{3} \lambda_k [2(x_1 \cos u_k + x_2 \sin u_k) - (t-1)\cos 2u_k], \quad x_3(0) = 0, \tag{10}$$

$$\dot{x}_4(t) = 2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[2(x_1\sin u_k - x_2\cos u_k) - (t-1)\sin 2u_k], \quad x_4(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_5(t) = -2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[(2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u_k + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u_k -\\ - 3(t-1)(x_1\cos 2u_k + x_2\sin 2u_k) + (t-1)^2\cos 3u_k], \quad x_5(0) = 0.\end{aligned}$$

Экстремальная задача Хажинского–Тамми о максимуме $\Re a_4$ в классе $S(M)$ для M, близких к единице, формализуется теперь как

$$x_5(1 - 1/M) \to \max \tag{11}$$

для решений системы (10). Запишем функцию Гамильтона этой экстремальной задачи

$$\begin{aligned}H(t, x, \Psi, u, \lambda) = -2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[\cos u_k\Psi_1 - \sin u_k\Psi_2 +\\ + (2(x_1\cos u_k + x_2\sin u_k) - (t-1)\cos 2u_k)\Psi_3 -\\ - (2(x_1\sin u_k - x_2\cos u_k) - (t-1)\sin 2u_k)\Psi_4 +\\ + (2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\cos u_k + 2(x_4 + x_1x_2)\sin u_k -\\ - 3(t-1)(x_1\cos 2u_k + x_2\sin 2u_k) + (t-1)^2\cos 3u_k],\end{aligned} \tag{12}$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1, 2, 3$, $\sum_{k=1}^{3}\lambda_k = 1$, $x = (x_1, \ldots, x_5)^T$ удовлетворяет системе (10), а $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_5)^T$, $\Psi_5 = 1$, удовлетворяет сопряженной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}_1 &= 2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[2\cos u_k\Psi_3 - 2\sin u_k\Psi_4 + 2x_1\cos u_k + 2x_2\sin u_k - 3(t-1)\cos 2u_k],\\ \dot{\Psi}_2 &= 2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[2\sin u_k\Psi_3 + 2\cos u_k\Psi_4 + 2x_1\sin u_k - 2x_2\cos u_k - 3(t-1)\sin 2u_k],\\ \dot{\Psi}_3 &= 4\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\cos u_k,\\ \dot{\Psi}_4 &= 4\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\sin u_k\end{aligned} \tag{13}$$

и условиям трансверсальности

$$\Psi_j(1 - 1/M) = 0, \quad j = 1, \ldots, 4. \tag{14}$$

Оптимальная управляющая функция $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$, соответствующая экстремальной функции $f^* \in S(M)$ в (11), удовлетворяет принципу максимума Понтрягина ([10], с. 78–79)

$$\max_{u,\lambda} H(t, x^*, \Psi^*, u, \lambda) = H(t, x^*, \Psi^*, u^*, \lambda^*), \quad 0 \leq t \leq 1 - 1/M, \tag{15}$$

где (x^*, Ψ^*) является решением систем (10) и (13) с $u = u^*$, $\lambda = \lambda^*$ в их правых частях. Следовательно, при положительных значениях λ_1, λ_2, λ_3 каждая из координат u_1^*, u_2^*, u_3^*

является корнем уравнения

$$H_{u_k}(t, x, \Psi, u, \lambda^k) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \tag{16}$$

где $x = x^*$, $\Psi = \Psi^*$, а λ^k– это один из векторов $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ или $(0, 0, 1)$. Наличие трех различных на $[0, 2\pi)$ значений u_1^*, u_2^*, u_3^* координат оптимального управления u^* характеризует оптимальный скользящий режим.

Функции P_{M3}, локально экстремальной в задаче (11) для $1 < M \leq M_4^*$, соответствуют координаты $u_1^0 = \pi/3$, $u_2^0 = \pi$, $u_3^0 = 5\pi/3$ оптимального управления u^0 и значения параметров $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = 1/3$. Условия трансверсальности (14) приводят к начальным условиям $\Psi_k(0) = 0$, $k = 1, \ldots, 4$. Проварьируем эти начальные данные, положив $\Psi_1(0) = \alpha_1$, $\Psi_2(0) = \alpha_2$, $\Psi_3(0) = \beta_1$, $\Psi_4(0) = \beta_2$. Сохранение скользящего режима в момент $t = 0$ для варьированных значений $\Psi(0)$ означает равенство между собой коэффициентов при λ_1, λ_2, λ_3 функции Гамильтона (12) при $t = 0$ в точке $u^* = u^*(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$. Получим

$$H(0, x(0), \Psi(0), u^*, \lambda) = 2 + \lambda_1(-\alpha_1 + \sqrt{3}\alpha_2 + \beta_1 + \sqrt{3}\beta_2) + \\ + \lambda_2(2\alpha_1 - 2\beta_1) + \lambda_3(-\alpha_1 - \sqrt{3}\alpha_2 + \beta_1 - \sqrt{3}\beta_2) + r_1\|(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)\|,$$

где $r_1 \to 0$ при $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \to 0$. Приравнивая здесь коэффициенты при λ_1, λ_2, λ_3, получаем соотношения между координатами $\Psi(0)$

$$\beta_1 = \alpha_1 + r_2\|(\alpha_1, \alpha_2)\|, \quad \beta_2 = -\alpha_2 + r_3\|(\alpha_1, \alpha_2)\|,$$

где $r_2, r_3 \to 0$ при $\alpha_1, \alpha_2 \to 0$.

Таким образом, вариация начальных данных $\Psi(0)$ в экстремальной задаче (10)–(15), сохраняющая скользящий режим, имеет вид

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \to 0. \tag{17}$$

Для решения локальной экстремальной задачи (11) в окрестности функции P_{M3} следует подвергнуть сравнению все те функции $f \in S(M)$, которые доставляют точки части $\partial V_4^3(M)$ из окрестности точки A_M. Все такие функции представимы по (7) интегралами (8) дифференциального уравнения Левнера (9) с непрерывным управлением u, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина (15), начальными данными $(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0))$ в (13) из окрестности точки $(0, 0, 0, 0)$, сохраняющими согласно (17) скользящий оптимальный режим, и параметрами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ из окрестности точки $\lambda^0 = (1/3, 1/3, 1/3)$. Следовательно, задача нахождения точной границы в локальной проблеме Хажинского-Тамми (11) сводится к следующему.

Задача. *Пусть*

$$F^M : (\Psi(0), \lambda) \to x_5(1 - 1/M)$$

является функцией, которая всякому начальному данному $\Psi(0)$ *и параметру* λ *в экстремальной задаче* (10)–(15) *со скользящим оптимальным режимом сопоставляет значение* $x_5(1 - 1/M)$. *Положим*

$$(\Psi_1(0), \Psi_2(0), \Psi_3(0), \Psi_4(0)) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, -\alpha_2) + o((\alpha_1, \alpha_2)), \quad (\alpha_1, \alpha_2) \to 0, \tag{18}$$

$$\lambda = (1/3 + \alpha_3, 1/3 + \alpha_4, 1/3 - \alpha_3 - \alpha_4), \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \tag{19}$$

согласно чему $F^M = F^M(\alpha)$. *Требуется найти значение* $M_4^* \geq 34/19$ *такое, что для всех* $M \in (1, M_4^*)$ *функция* $F^M(\alpha)$ *достигает локального максимума в точке* $\alpha = 0$.

3. Дифференциальные уравнения экстремальной задачи

Система дифференциальных уравнений (10) при $u = u^0$ и $\lambda = \lambda^0$ имеет решение $x^0(t) = 0$. Аналогично система дифференциальных уравнений (13) с теми же $u = u^0$ и $\lambda = \lambda^0$ и с нулевыми начальными условиями в точке $t = 0$ имеет решение $\Psi^0(t) = 0$.

Так как $H_{u_k u_k}(t, x^0, \Psi^0, u^0, \lambda^k) \neq 0$, то уравнения (16) однозначно определяют аналитические неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$, в окрестности точки (x^0, Ψ^0) $u_k(t, x^0, \Psi^0) = u_k^0$, $k = 1, 2, 3$. Если в правые части систем (10) и (13) подставить $u = u(t, x, \Psi) = (u_1(t, x, \Psi), u_2(t, x, \Psi), u_3(t, x, \Psi))$, то их решение (x, Ψ) аналитически зависит от начальных данных и параметра λ. Таким образом, (x, Ψ) в задаче имеет производные по α до второго порядка. Следовательно, тем же свойством обладает и управление $u = u(t, x(\alpha), \Psi(\alpha)) = u(\alpha)$. Поэтому функция $F^M(\alpha)$ имеет производные до второго порядка и для исследования ее на локальный максимум применимы классические средства дифференциального исчисления.

Начнем с вычисления частных производных первого порядка функции $F^M(\alpha)$,

$$F^M_{\alpha_j} = (x_5)_j(1 - 1/M), \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Дифференцирование последнего уравнения системы (10), в котором $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ приводит к формулам

$$\begin{aligned}\frac{d(x_5)_j}{dt} &= -2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[((2x_3)_j + 2x_1(x_1)_j - 2x_2(x_2)_j)\cos u_k - \\ &- (2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\sin u_k(u_k)_j + 2((x_4)_j + (x_1)_j x_2 + x_1(x_2)_j)\sin u_k + \\ &+ 2(x_4 + x_1x_2)\cos u_k(u_k)_j - 3(t-1)((x_1)_j\cos 2u_k - 2x_1\sin 2u_k(u_k)_j + \\ &+ (x_2)_j\sin 2u_k + 2x_2\cos 2u_k(u_k)_j) - 3(t-1)^2\sin 3u_k(u_k)_j],\end{aligned} \tag{20}$$

$$(x_5)_j(0) = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}\frac{d(x_5)_j}{dt} &= -2\sum_{k=1}^{3}\lambda_k[((2x_3)_j + 2x_1(x_1)_j - 2x_2(x_2)_j)\cos u_k - \\ &- (2x_3 + x_1^2 - x_2^2)\sin u_k(u_k)_j + 2((x_4)_j + (x_1)_j x_2 + x_1(x_2)_j)\sin u_k + \\ &+ 2(x_4 + x_1x_2)\cos u_k(u_k)_j - 3(t-1)((x_1)_j\cos 2u_k - 2x_1\sin 2u_k(u_k)_j + \\ &+ (x_2)_j\sin 2u_k + 2x_2\cos 2u_k(u_k)_j) - 3(t-1)^2\sin 3u_k(u_k)_j] - \\ &- 2((2x_3 + x_1^2 - x_2^2)(\cos u_{j-2} - \cos u_3) + 2(x_4 + x_1x_2)(\sin u_{j-2} - \sin u_3)) + \\ &+ 6(t-1)(x_1(\cos 2u_{j-2} - \cos 2u_3) + x_2(\sin 2u_{j-2} - \sin 2u_3)) - \\ &- 2(t-1)^2(\cos 3u_{j-2} - \cos 3u_3), \quad (x_5)_j(0) = 0, \quad j = 3, 4.\end{aligned} \tag{21}$$

Из (20), (21) непосредственной подстановкой проверяем, что

$$\left[\frac{d(x_5)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Значит, $(x_5)_j(1 - 1/M)|_{\alpha=0} = F^M_{\alpha_j}(0) = 0$, $j = 1, \ldots, 4$. Следовательно, выполняются необходимые условия локального экстремума функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$.

Теперь вычислим частные производные второго порядка функции $F^M(\alpha)$ в точке $\alpha = 0$. С этой целью продифференцируем уравнения (20), (21) в точке $\alpha = 0$ и найдем

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d(x_5)_{j\,l}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3}[2((x_3)_j \sin u_k^0 (u_k)_l + (x_3)_l \sin u_k^0 (u_k)_j)- \\
&- 2((x_4)_j \cos u_k^0 (u_k)_l + (x_4)_l \cos u_k^0 (u_k)_j)- \\
&- 6(t-1)((x_1)_j \sin 2u_k^0 (u_k)_l + (x_1)_l \sin 2u_k^0 (u_k)_j- \\
&- (x_2)_j \cos 2u_k^0 (u_k)_l - (x_2)_l \cos 2u_k^0 (u_k)_j) - 9(t-1)^2 (u_k)_j (u_k)_l], \\
&\qquad (x_5)_{j\,l}(0) = 0, \quad j,l = 1,2,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d(x_5)_{j\,l}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3}[2((x_3)_j \sin u_k^0 (u_k)_l + (x_3)_l \sin u_k^0 (u_k)_j)- \\
&- 2((x_4)_j \cos u_k^0 (u_k)_l + (x_4)_l \cos u_k^0 (u_k)_j)- \\
&- 6(t-1)((x_1)_j \sin 2u_k^0 (u_k)_l + (x_1)_l \sin 2u_k^0 (u_k)_j- \\
&- (x_2)_j \cos 2u_k^0 (u_k)_l - (x_2)_l \cos 2u_k^0 (u_k)_j) - 9(t-1)^2 (u_k)_j (u_k)_l]- \\
&- 4(x_3)_j(\cos u_{l-2}^0 - \cos u_3^0) - 4(x_4)_j(\sin u_{l-2}^0 - \sin u_3^0)+ \\
&+ 6(t-1)((x_1)_j(\cos 2u_{l-2}^0 - \cos 2u_3^0) + (x_2)_j(\sin 2u_{l-2}^0 - \sin 2u_3^0)), \\
&\qquad (x_5)_{j\,l}(0) = 0, \quad j = 1,2, \quad l = 3,4,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d(x_5)_{j\,l}}{dt}\right]_{\alpha=0} &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3}[2((x_3)_j \sin u_k^0 (u_k)_l + (x_3)_l \sin u_k^0 (u_k)_j- \\
&- (x_4)_j \cos u_k^0 (u_k)_l - (x_4)_l \cos u_k^0 (u_k)_j)- \\
&- 6(t-1)((x_1)_j \sin 2u_k^0 (u_k)_l + (x_1)_l \sin 2u_k^0 (u_k)_j- \\
&- (x_2)_j \cos 2u_k^0 (u_k)_l - (x_2)_l \cos 2u_k^0 (u_k)_j) - 9(t-1)^2 (u_k)_j (u_k)_l]- \\
&- 4((x_3)_l(\cos u_{j-2}^0 - \cos u_3^0) + (x_4)_l(\sin u_{j-2}^0 - \sin u_3^0))+ \\
&+ (x_3)_j(\cos u_{l-2}^0 - \cos u_3^0) + (x_4)_j(\sin u_{l-2}^0 - \sin u_3^0)+ \\
&+ 6(t-1)((x_1)_l(\cos 2u_{j-2}^0 - \cos 2u_3^0) + (x_2)_l(\sin 2u_{j-2}^0 - \sin 2u_3^0)+ \\
&+ (x_1)_j(\cos 2u_{l-2}^0 - \cos 2u_3^0) + (x_2)_j(\sin 2u_{l-2}^0 - \sin 2u_3^0)), \\
&\qquad (x_5)_{j\,l}(0) = 0, \quad j,l = 3,4.
\end{aligned} \tag{24}$$

Все частные производные по координатам вектора α в правых частях формул (22)–(24) вычисляются в точке $\alpha = 0$.

Тождество (16) с произвольными (x, Ψ) из окрестности точки (x^0, Ψ^0) определяет неявные функции $u_k = u_k(t, x, \Psi)$, $k = 1,2,3$. Для вычисления частных производных управлений u_k продифференцируем это тождество по α и получим

$$H_{u_k x}(x)_j + H_{u_k \Psi}(\Psi)_j + H_{u_k u_k}(u_k)_j = 0, \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,\ldots,4,$$

откуда находим выражения для частных производных

$$(u_k)_j = -\frac{H_{u_k x}(x)_j + H_{u_k \Psi}(\Psi)_j}{H_{u_k u_k}}, \quad k = 1,2,3, \quad j = 1,\ldots,4. \tag{25}$$

Из (12) при $\alpha = 0$ непосредственно находим

$$
\begin{aligned}
&H_{u_k u_k} = -18(t-1)^2, \\
&H_{u_k x_1} = -12(t-1)\sin 2u_k^0, \quad H_{u_k x_2} = 12(t-1)\cos 2u_k^0, \\
&H_{u_k x_3} = 4\sin u_k^0, \qquad\qquad H_{u_k x_4} = -4\cos u_k^0, \\
&H_{u_k \Psi_1} = 2\sin u_k^0, \qquad\qquad H_{u_k \Psi_2} = 2\cos u_k^0, \\
&H_{u_k \Psi_3} = -4(t-1)\sin 2u_k^0, \quad H_{u_k \Psi_4} = -4(t-1)\cos 2u_k^0, \quad k = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Подставляя (26) в (25), элементарными средствами сможем вычислить все 12 частных производных (25) при $\alpha = 0$ как линейные функции относительно $(x_p)_j$ и $(\Psi_p)_j$, $p = 1,\ldots,4$.

Таким образом, правые части системы 10 различных дифференциальных уравнений (22)–(24) для частных производных второго порядка целевой функции представляют собой полиномы второго порядка относительно 32 частных производных первого порядка $(x_p)_j$, $(\Psi_p)_j$, $j, p = 1,\ldots,4$, вычисленных в точке $\alpha = 0$. В свою очередь, для вычисления частных производных первого порядка функций x и Ψ по координатам вектора α в точке $\alpha = 0$ продифференцируем уравнения систем (10) и (13) по α. Некоторое облегчение вызывается интегрированием двух последних уравнений системы (13) в сравнении с двумя первыми уравнениями системы (10). Именно,

$$\Psi_3(t) = \alpha_1 - 2x_1(t), \quad \Psi_4(t) = -\alpha_2 + 2x_2(t), \tag{27}$$

откуда находим 8 соотношений

$$
\begin{aligned}
&(\Psi_3)_1 = 1 - 2(x_1)_1, \qquad (\Psi_3)_j = -2(x_1)_j, \quad j = 2,3,4, \\
&(\Psi_4)_2 = -1 + 2(x_2)_2, \quad (\Psi_4)_j = 2(x_2)_j, \quad j = 1,3,4.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Запишем дифференциальные уравнения для остальных 24 частных производных. Дифференцируя уравнения систем (10) и (13) по координатам вектора α, найдем

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{d(x_1)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} \sin u_k^0 (u_k)_j, \qquad (x_1)_j(0) = 0, \\
&\left[\frac{d(x_2)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} \cos u_k^0 (u_k)_j, \qquad (x_2)_j(0) = 0, \\
&\left[\frac{d(x_3)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\frac{4}{3}(t-1)\sum_{k=1}^{3} \sin 2u_k^0 (u_k)_j, \quad (x_3)_j(0) = 0, \\
&\left[\frac{d(x_4)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\frac{4}{3}(t-1)\sum_{k=1}^{3} \cos 2u_k^0 (u_k)_j, \quad (x_4)_j(0) = 0, \\
&\qquad j = 1,2,
\end{aligned} \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{d(x_1)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} \sin u_k^0 (u_k)_j - 2(\cos u_{j-2}^0 - \cos u_3^0), \qquad (x_1)_j(0) = 0, \\
&\left[\frac{d(x_2)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{3} \cos u_k^0 (u_k)_j + 2(\sin u_{j-2}^0 - \sin u_3^0), \qquad (x_2)_j(0) = 0, \\
&\left[\frac{d(x_3)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\frac{4}{3}(t-1)\sum_{k=1}^{3} \sin 2u_k^0 (u_k)_j + 2(t-1)(\cos 2u_{j-2}^0 - \cos 2u_3^0), \quad (x_3)_j(0) = 0,
\end{aligned}
$$

$$\left[\frac{d(x_4)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = -\frac{4}{3}(t-1)\sum_{k=1}^{3}\cos 2u_k^0(u_k)_j - 2(t-1)(\sin 2u_{j-2}^0 - \sin 2u_3^0), \quad (x_4)_j(0)=0,$$
$$j=3,4, \tag{30}$$

$$\left[\frac{d(\Psi_1)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = 4(t-1)\sum_{k=1}^{3}\sin 2u_k^0(u_k)_j, \qquad (\Psi_1)_{\alpha_1}(0)=1, \quad (\Psi_1)_{\alpha_2}(0)=0,$$
$$\left[\frac{d(\Psi_2)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = -4(t-1)\sum_{k=1}^{3}\cos 2u_k^0(u_k)_j, \quad (\Psi_2)_{\alpha_1}(0)=0, \quad (\Psi_2)_{\alpha_2}(0)=1,$$
$$j=1,2, \tag{31}$$

$$\left[\frac{d(\Psi_1)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = 4(t-1)\sum_{k=1}^{3}\sin 2u_k^0(u_k)_j - 6(t-1)(\cos 2u_{j-2}^0 - \cos 2u_3^0), \qquad (\Psi_1)_j(0)=0,$$
$$\left[\frac{d(\Psi_2)_j}{dt}\right]_{\alpha=0} = -4(t-1)\sum_{k=1}^{3}\cos 2u_k^0(u_k)_j - 6(t-1)(\sin 2u_{j-2}^0 - \sin 2u_3^0), \quad (\Psi_2)_j(0)=0,$$
$$j=3,4. \tag{32}$$

Дифференциальные уравнения (29)–(32) с функциями $(u_k)_j$ из (25), (26), (28) образуют систему 24 линейных дифференциальных уравнений, распадающуюся на несколько независимых подсистем, каждая из трех уравнений. В частности, подсистемы относительно $(x_1)_j$, $(x_3)_j$, $(\Psi_1)_j$, $j=2,3$ и $(x_2)_1$, $(x_4)_1$, $(\Psi_2)_1$ являются линейными однородными системами с нулевыми начальными условиями. Это приводит к девяти вырожденным нулевым решениям. Остальные независимые подсистемы допускают понижение порядка. Тем не менее мы не будем пытаться отыскать решение подсистем в квадратурах.

4. Доказательство теоремы

Локальная экстремальная задача в теореме сведена к решению задачи, т. е. к отысканию такого значения $M_4^* \geq 34/19$, что для всех $M \in (1, M_4^*)$ функция $F^M(\alpha)$, соответствующая локальной экстремальной задаче (11), достигает локального максимума в точке $\alpha=0$. Как было показано, необходимое условие экстремума

$$(x_5)_j(1-1/M)|_{\alpha=0} = \left[\frac{\partial F^M(\alpha)}{\partial \alpha_j}\right]_{\alpha=0} = 0, \quad j=1,\dots,4,$$

выполняется для всех $M>1$. Поэтому остается лишь проверить достаточное условие экстремума функции F^M, зависящей от четырех координат вектора α, которое заключается в том, что при $\alpha=0$ квадратичная форма, порожденная квадратной матрицей $\Delta=\Delta(M)$ с элементами $(x_5)_{j\,l}(1-1/M)$, $j,l=1,\dots,4$, отрицательно определена.

Для $M>1$ обозначим

$$\Delta_m(M) = \begin{pmatrix} (x_5)_{1\,1}(1-1/M) & \dots & (x_5)_{1\,m}(1-1/M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_5)_{m\,1}(1-1/M) & \dots & (x_5)_{m\,m}(1-1/M) \end{pmatrix}_{\alpha=0},$$
$$m=1,\dots,4. \tag{33}$$

Согласно критерию Сильвестра матрица $\Delta(M)$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда

$$(-1)^m \det \Delta_m(M) > 0, \quad m=1,\dots,4. \tag{34}$$

Элементы матрицы $\Delta_4(M)$ являются значением в точке $t = 1 - 1/M$ решения $(x_5)_{j\,l}(t)$, $(x_p)_j(t)$, $(\Psi_p)_j(t)$, $j, l, p = 1, \ldots, 4$, задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (22)–(24), (29)–(32), в которых частные производные $(u_k)_j$, $k = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 4$, задаются формулами (25), (26), (28).

Численное интегрирование полученных систем дифференциальных уравнений (22)–(24), (29)–(32) с использованием пакета MAPLESOFT Maple 9.5 и проверка критерия Сильвестра (34) приводят к приближенному значению M_4^*, которое с учетом погрешности метода Рунге–Кутта и вычислительной погрешности превышает число 34/19. Это доказывает теорему.

Литература

[1] Branges L. *A proof of the Bieberbach conjecture* // LOMI Preprints E-5-84. – 1984. – P. 1–21.

[2] Branges L. *A proof of the Bieberbach conjecture* // Acta Math. – 1985. – V. 154. – № 1–2. – P. 137–152.

[3] Pick G. *Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet* // S.-B. Kaiserl. Akad. Wiss. Wien. Math.-Naturwiss. Kl. Abt. II a. – 1917. – Bd. 126. – H. 247–263.

[4] Schaeffer A.C., Spencer D.C. *The coefficients of schlicht functions.* II // Duke Math. J. – 1945. – V. 12. – P. 107–125.

[5] Schiffer M., Tammi O. *On the fourth coefficient of bounded univalent functions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 119. – P. 67–78.

[6] Siewierski L. *Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions near the identity* // Bull. Acad. Polon. Sci. – 1968. – V. 16. – P. 575–576.

[7] Siewierski L. *Sharp estimation of the coefficients of bounded univalent functions close to identity* // Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.). – 1971. – V. 86. – P. 1–153.

[8] Schiffer M., Tammi O. *On bounded univalent functions which are close to identity* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. – 1968. – V. 435. – P. 3–26.

[9] Прохоров *Д.В. Множества значений систем функционалов в классах однолистных функций* // Матем. сб. – 1990. – Т. 181. – № 12. – С. 1659–1677.

[10] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимального управления.* – М.: Наука, 1969. – 308 с.

Д.В. Прохоров

профессор, кафедра математического анализа,
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83,

e-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

В.Г. Гордиенко

доцент, кафедра математического анализа,
Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83,

D.V. Prokhorov

Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,

e-mail: ProkhorovDV@info.sgu.ru

V.G. Gordienko

Associate Professor, Chair of Mathematical Analysis,
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,