Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, №10, с. 41–52 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Л.С. ПУЛЬКИНА, А.Е. САВЕНКОВА

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. В статье изучается вопрос о разрешимости краевой задачи для гиперболического уравнения с нелокальным интегральным условием по переменной времени. Получены достаточные условия однозначной разрешимости поставленной задачи. Для доказательства существования решения применен метод сведения нелокального условия первого рода к условию второго рода, что позволило в свою очередь свести поставленную нелокальную задачу к операторному уравнению. Показано, что разрешимость операторного уравнения влечет за собой и однозначную разрешимость нелокальной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальные условия, обобщенное решение.

УДК: 517.956

Введение

В статье рассмотрена задача с нелокальным по времени интегральным условием для гиперболического уравнения. Значительная часть публикаций, начиная с работы Дж.Р. Кэннона [1], посвященных задачам с интегральными условиями, содержит исследования нелокальных по пространственным переменным задач для параболических и гиперболических уравнений. Задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений рассмотрены в статьях [2]–[5], а также в работах из библиографии в них. Некоторые задачи с нелокальными по времени условиями рассмотрены в работах [6]–[8].

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных активно изучаются, разрабатываются методы исследования их разрешимости. Для обоснования разрешимости задач с нелокальным по времени условием оказался эффективным метод вспомогательных задач, который и применен в этой статье.

Задачи с нелокальными по времени условиями тесно связаны с обратными задачами, условие переопределения в которых является интегральным [9]–[11]. Например, в [11] условие переопределения имеет вид

$$\int_0^T \omega(\tau)u(x,\tau)d\tau = \chi(x).$$

Заданные таким образом условия можно рассматривать как модель действия некоего прибора, регистрирующего физические поля [12].

Одним из этапов исследования разрешимости обратной задачи часто является решение прямой задачи, при этом не исключено, что прямая задача может оказаться нелокальной.

Поступили первый вариант 07.10.2014, окончательный вариант 28.10.2015

Эти рассуждения привели к постановке задачи с нелокальным по времени условием для гиперболического уравнения.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, T — конечное число. Обозначим через $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ боковую поверхность цилиндра $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Для уравнения

$$Lu \equiv u_{tt} - \Delta u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

поставим следующую задачу.

Задача 1. Найти в цилиндре Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,t)\big|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

$$\int_0^T k(t)u(x,t)dt = h(x). \tag{4}$$

Условие (4) является нелокальным условием первого рода, что обычно приводит к серьезным проблемам при обосновании разрешимости задачи. Поясним некоторые термины, которые используются в статье. Нелокальные интегральные условия принято различать в зависимости от их структуры. Если соотношение, представляющее собой интегральное условие, содержит в качестве внеинтегрального слагаемого след искомого решения или его производных на границе области, то его называют условием второго рода, а если внеинтегральное слагаемое указанного вида отсутствует, то такое соотношение называют интегральным условием первого рода. Исследования нелокальных задач, в том числе с интегральными условиями, показали, что большинство методов, разработанных для обоснования разрешимости классических начально-краевых задач, нельзя применить для той же цели в случае нелокальных задач. Наглядный пример — статья Н.И. Ионкина [13]. Однако в процессе разработки теории нелокальных задач было замечено, что некоторые приемы исследования начально-краевых задач можно успешно приспособить и для задач с нелокальными условиями второго рода, тогда как для задач с условиями первого рода этого сделать нельзя. В [4] предложен эффективный метод преодоления возникающих трудностей для задач с пространственно нелокальными условиями первого рода. Идею этого метода, состоящего в сведении условия первого рода к условию второго рода, применим к исследованию разрешимости задачи с нелокальным по времени условием.

1. Основной результат

Пусть выполнены условия

I. $k \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T)$, $k(T) = k'(T) = 0$, $k(0) \neq 0$,

II. $h \in C(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, $h(x)\Big|_{\partial\Omega} = 0$,

III. $c \in C^1(\overline{Q}_T)$, $f \in C(\overline{Q}_T) \cap C^1(Q_T)$,

IV. $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\psi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Не ограничивая общности, будем считать $k(0) = 1$, что позволит несколько упростить формулы. Введем обозначения:

$$K(x,t) = k''(t) + c(x,t)k(t), \quad k_0 = \max_{\overline{\Omega}} \int_0^T K^2(x,t)dt,$$

$$c_0 = \max_{\overline{Q}_T} |c(x,t)|, \quad c_1 = c_0(1+T^2) + T.$$

Заметим, что существование чисел c_0, k_0, а стало быть и c_1, обеспечено условиями I–III.

Под решением задачи 1 будем понимать функцию $u \in W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в Q_T и условиям (2)–(4) в смысле равенства функций в L_2.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I–IV*, а также справедливо неравенство* $k_0(e^{c_1 T}-1) < c_1$*, то существует единственное решение задачи* 1.

Доказательство теоремы проведем по следующей схеме.

1. Покажем эквивалентность нелокального условия первого рода (4) и условия второго рода специального вида.

2. Покажем разрешимость в пространстве $W_2^1(Q_T)$ задачи с полученным нелокальным условием второго рода (задача 2).

3. Покажем, что решение задачи 2 принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$ и является решением задачи 1.

Приступим к реализации этой схемы.

1. **Лемма.** *Если выполняются условия* I–III*, то задача* (1)–(4) *эквивалентна задаче отыскания решения уравнения* (1)*, удовлетворяющего условиям* (2), (3) *и нелокальному условию второго рода*

$$u_t(x,0) - \int_0^T K(x,t)u(x,t)dt = g(x), \tag{5}$$

где $g(x) = k'(0)\varphi(x) - \int\limits_0^T k(t)f(x,t)dt - \Delta h(x)$.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1)—(4). Проинтегрируем (1), умножив его предварительно на $k(t)$, по t от 0 до T. Учитывая, что в силу условия I $k(T) = k'(T) = 0$, $k(0) \neq 0$, получим

$$-k(0)u_t(x,0) + k'(0)u(x,0) + \int_0^T (k''(t) + c(x,t)k(t))u(x,t)dt = \int_0^T k(t)f(x,t)dt + \Delta h(x),$$

откуда и следует (5), если учесть введенные обозначения.

Пусть теперь $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3), (5). Проинтегрируем (1), умноженное на $k(t)$, а затем применим условие (5), что приведет к равенству

$$\Delta\left(\int_0^T k(t)u(x,t)dt - h(x)\right) = 0,$$

которое представляет собой уравнение Лапласа. Учитывая условия согласования и граничные условия (2), получим

$$\left(\int_0^T k(t)u(x,t)dt - h(x)\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

и приходим к задаче Дирихле для уравнения Лапласа, в силу единственности решения которой выполняется условие (4). □

Лемма позволила разработать метод обоснования разрешимости поставленной нелокальной задачи с условием первого рода в пространстве Соболева. Следуя этому методу, сначала доказываем разрешимость задачи с нелокальным условием второго рода для уравнения (1), а затем показываем, что решение этой задачи является решением поставленной задачи с нелокальным условием первого рода.

2. Теперь сосредоточим внимание на разрешимости задачи с нелокальным условием второго рода.

Задача 2. Найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) и (5).

Введем понятие обобщенного решения задачи 2. Для этого выведем тождество, следуя известной для начально-краевых задач процедуре ([14], с. 210):

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \nabla u \nabla v + cuv) dx\, dt + \int_\Omega v(x,0) \int_0^T K(x,t) u(x,t) dt\, dx =$$
$$= \int_\Omega v(x,0) g(x) dx + \int_0^T \int_\Omega f v\, dx\, dt. \quad (6)$$

Заметим, что нелокальное условие (5) удалось включить в тождество, на котором базируется определение обобщенного решения, что не удается сделать в случае условия первого рода.

Определение 1. Обобщенным решением задачи 2 будем называть функцию $u \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и тождеству (6) для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q_T)$. Здесь, как обычно, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q_T) = \{v : v \in W_2^1(Q_T),\, v(x,T) = 0\}$.

Сейчас перейдем к доказательству разрешимости задачи 2, отметив, что можем попрежнему считать выполненными условия I–IV, хотя для однозначной разрешимости этой задачи в $W_2^1(Q_T)$ их можно ослабить.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия*

$$c \in C(\overline{Q}_T), \quad f \in L_2(Q_T), \quad \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad g \in L_2(\Omega);$$
$$K \in C(\overline{Q}_T), \quad k_0 < \frac{c_1}{e^{c_1 T} - 1}.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение $u \in W_2^1(Q_T)$ задачи 2.

Доказательство. Единственность обобщенного решения докажем от противного. Предположим, что существуют два различных решения u_1, u_2 задачи 2. Тогда их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \nabla u \nabla v + cuv) dx\, dt + \int_\Omega v(x,0) \int_0^T K(x,t) u(x,t) dt\, dx = 0. \quad (7)$$

Выберем в (7) функцию $v(x,t)$ следующим образом:

$$v(x,t) = \int_\tau^t u(x,\eta) d\eta, \quad 0 \le t \le \tau, \quad v(x,t) = 0, \ \tau \le t \le T,$$

и проделаем некоторые преобразования в (7), интегрируя по частям, которые приведут к равенству

$$\int_\Omega [u^2(x,\tau) + |\nabla v(x,0)|^2] dx = 2 \int_\Omega v(x,0) \int_0^T K u\, dt\, dx + 2 \int_0^\tau \int_\Omega c v v_t\, dx\, dt. \quad (8)$$

Оценим правую часть равенства (8). Для оценки первого слагаемого правой части применим неравенство Коши и представление функции $v(x,t)$, из которого вытекает неравенство

$$v^2(x,t) \le \tau \int_0^\tau u^2 dt, \quad t \in [0,T].$$

Получим

$$2\left|\int_\Omega v(x,0)\int_0^T Ku\,dt\,dx\right| \le \tau\int_0^\tau\int_\Omega u^2dx\,dt + k_0\int_0^T\int_\Omega u^2dx\,dt.$$

В силу неравенства Коши и полученной выше оценки $v^2(x,t)$

$$2\left|\int_0^\tau\int_\Omega cvv_t\,dx\,dt\right| \le c_0\int_0^\tau\int_\Omega (u^2+v^2)dx\,dt \le c_0(1+\tau^2)\int_0^\tau\int_\Omega u^2dx\,dt.$$

Тогда

$$\int_\Omega [u^2(x,\tau)+|\nabla v(x,0)|^2]dx \le c_1\int_0^\tau\int_\Omega u^2dx\,dt + k_0\int_0^T\int_\Omega u^2dx\,dt.$$

Применив к последнему неравенству лемму Гронуолла, получим

$$\int_\Omega u^2(x,\tau)dx \le k_0e^{c_1\tau}\int_0^T\int_\Omega u^2dx\,dt.$$

Полученное неравенство проинтегрируем по τ от 0 до T, что приведет к неравенству

$$\int_0^T\int_\Omega u^2(x,t)dx\,dt \le \frac{k_0(e^{c_1T}-1)}{c_1}\int_0^T\int_\Omega u^2dx\,dt.$$

Так как в силу условия теоремы $\frac{k_0(e^{c_1T}-1)}{c_1} < 1$, то

$$\int_0^T\int_\Omega u^2(x,t)dx\,dt \le 0,$$

откуда сразу следует единственность решения.

Для обоснования разрешимости задачи 2 воспользуемся методом вспомогательных задач, который заключается в следующем: будем временно считать заданным второе из начальных условий $u_t(x,0)=\psi(x)$. Тогда можем воспользоваться известными результатами о разрешимости получившейся начально-краевой задачи, а затем применить к решению этой вспомогательной задачи нелокальное условие (5), что приведет к операторному уравнению относительно неизвестной функции $\psi(x)$. Если это уравнение разрешимо в подходящем пространстве, то решение вспомогательной задачи, в условиях которой $\psi(x)$ есть решение операторного уравнения, и будет решением задачи 2. □

Задача 2а. В области Q_T найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) и

$$u_t(x,0)=\psi(x). \tag{9}$$

Введем понятие обобщенного решения вспомогательной задачи 2а. Пусть $v\in \widehat{W}_2^1(Q_T)$. Следуя уже упомянутой процедуре ([14], с. 210), получим тождество

$$\int_0^T\int_\Omega(-u_tv_t+\nabla u\nabla v+cuv)dx\,dt = \int_\Omega \psi(x)v(x,0)dx + \int_0^T\int_\Omega fv\,dx\,dt. \tag{10}$$

Определение 2. Обобщенным решением вспомогательной задачи 2а будем называть функцию $u\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0)=\varphi(x)$ и тождеству (10) для любой $v\in\widehat{W}_2^1(Q_T)$.

Эта задача однозначно разрешима в $W_2^1(Q_T)$ как частный случай рассмотренной в [14], и для ее решения справедливо неравенство ([14], с. 215)

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)} \le C(T)(\|f(x,t)\|_{L_2(Q_T)} + \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\psi\|_{L_2(\Omega)}). \tag{11}$$

Теперь выясним, существует ли такая функция $\psi(x) \in L_2(\Omega)$, что решение вспомогательной задачи 2а будет удовлетворять условию (5). Применим к решению $u(x,t)$ задачи 2а интегральное условие (5). Это приведет к операторному уравнению

$$\psi(x) + A\psi = g(x), \tag{12}$$

где оператор $A\psi = \int\limits_0^T K(x,t)u(x,t)dt$. В силу условий теоремы $K \in C(\overline{Q}_T)$, а решение вспомогательной задачи $u \in W_2^1(Q_T)$. Тогда

$$\|A\psi\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left(\int_0^T K(x,t)u(x,t)dt \right)^2 dx \leq k_0 \|u\|^2_{L_2(Q_T)} \leq \text{const},$$

а это означает, что оператор A действует из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Покажем, что при выполнении условий теоремы оператор A сжимающий.

Используя представление оператора A, получим цепочку равенств:

$$\rho(A\psi_1, A\psi_2) = \|A\psi_1 - A\psi_2\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \left(\int_0^T K(x,t)u_1(x,t)dt - \right.\right.$$
$$\left.\left. \int_0^T K(x,t)u_2(x,t)dt \right)^2 dx \right)^{1/2} = \left(\int_\Omega \left(\int_0^T K(x,t)u(x,t)dt \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь введены следующие обозначения: $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ суть обобщенные решения задачи 2а с начальными данными $u_1(x,0) = \varphi(x)$, $u_{1t}(x,0) = \psi_1(x)$, $u_2(x,0) = \varphi(x)$, $u_{2t}(x,0) = \psi_2(x)$ и нулевыми граничными условиями, $\psi(x) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$. Тогда $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ будет обобщенным решением задачи 2а в таком частном случае: найти решение уравнения

$$u_{tt} - \Delta u + cu = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{S_T} = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x). \tag{13}$$

Для решения этой задачи, определяемого как и в общем случае задачи 2 с помощью тождества

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \nabla u \nabla v + cuv)dx\,dt = \int_\Omega \psi(x)v(x,0)dx, \tag{14}$$

справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)} \leq C(T)(\|\psi\|_{L_2(\Omega)}). \tag{15}$$

Уточним постоянную $C(T)$, входящую в правую часть этого неравенства. Для этого приведем здесь кратко его вывод. Приближеное решение задачи 2а ищем в виде $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$, где $w_k(x)$ — фундаментальная система в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $(w_k, w_l) = \delta_k^l$, из соотношений

$$\int_\Omega (u_{tt}^m w_l + \nabla u^m \nabla w_l + cu^m w_l)dx = 0, \tag{16}$$

которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных $c_k(t)$:

$$c_l''(t) + \sum_{k=1}^m c_k(t) \int_\Omega (\nabla w_k \nabla w_l + cw_k w_l)dx = 0. \tag{17}$$

Добавив к (17) начальные условия

$$c_k(0) = 0, \quad c'_k(0) = (\psi, w_k), \tag{18}$$

приходим к задаче Коши. В силу условий теоремы эта задача однозначно разрешима и $c''_k \in L_1(0,T)$.

Умножив (16) на $c'_l(t)$, просуммируем полученное равенство от 1 до m, а затем проинтегрируем по t от 0 до $\tau \in [0,T]$. Это приведет к равенству

$$\int_0^\tau \int_\Omega (u^m_{tt} u^m_t + \nabla u^m \nabla u^m_t + c u^m u^m_t) dx dt = 0,$$

которое после интегрирования по частям в левой его части примет вид

$$\int_\Omega [(u^m_t(x,\tau))^2 + |\nabla u^m(x,\tau)|^2] dx = \int_\Omega (u^m_t(x,0))^2 dx - 2\int_0^\tau \int_\Omega c u^m u^m_t dx\, dt.$$

Ко второму слагаемому правой части последнего равенства применим неравенство Коши, а затем добавим к полученной оценке неравенство

$$\int_\Omega (u^m(x,\tau))^2 dx \le \tau \int_0^\tau \int_\Omega (u^m_t)^2 dx\, dt,$$

которое вытекает из представления

$$u^m(x,\tau) = \int_0^\tau u^m_t(x,t) dt,$$

и придем к неравенству

$$\int_\Omega [(u^m(x,\tau))^2 + (u^m_t(x,\tau))^2 + |\nabla u^m(x,\tau)|^2] dx \le \int_\Omega (u^m_t(x,0))^2 dx + \\ + (c_0 + \tau) \int_0^\tau \int_\Omega [(u^m)^2 + (u^m_t)^2] dx\, dt.$$

Заметим, что $c_0 + \tau \le c_1$, и учтем это неравенство в дальнейших оценках. Применив лемму Гронуолла, получим

$$\int_\Omega [(u^m(x,\tau))^2 + (u^m_t(x,\tau))^2] dx \le e^{c_1\tau} \int_\Omega (u^m_t(x,0))^2 dx,$$

откуда после интегрирования следует

$$\int_0^\tau \int_\Omega [(u^m(x,t))^2 + (u^m_t(x,t))^2] dx\, dt \le e^{c_1\tau} \int_\Omega (u^m_t(x,0))^2 dx.$$

Тогда

$$\int_\Omega |\nabla u^m|^2 dx \le e^{c_1\tau} \int_\Omega (u^m_t(x,0))^2 dx.$$

Интегрируя это неравенство по τ, получим

$$\|u^m\|^2_{W^1_2(Q_\tau)} \le \frac{e^{c_1 T} - 1}{c_1} \|u^m_t(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \quad \forall \tau \in [0,T],$$

и, следовательно,

$$\|u^m\|^2_{W^1_2(Q_T)} \le \frac{e^{c_1 T} - 1}{c_1} \|u^m_t(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{19}$$

Так как $u_t^m(x,0) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k'(0)w_k(x)$, а $c_k'(0) = (\psi, w_k) = \psi_k$, то

$$\|u_t^m(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{m} \psi_k^2 \leq \|\psi\|^2_{L_2(\Omega)},$$

и, следовательно, правая часть (19) мажорируется постоянной, не зависящей от m. Благодаря этому, из последовательности $\{u^m\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо в $W_2^1(Q_T)$ и равномерно по $t \in [0,T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к элементу $u \in W_2^1(Q_T)$. Этот предельный элемент является искомым решением, если для него выполняется тождество (14). Это делается стандартным образом ([14], с. 215): каждое из соотношений (16) умножается на функцию $d_l \in W_2^1(0,T)$, $d(T) = 0$, суммируется по l от 1 до m, интегрируется по t от 0 до T. Затем в тождестве, полученном после интегрирования по частям первого члена, переходим к пределу при $m \to \infty$ и, учитывая плотность совокупности функций вида $\sum\limits_{l=1}^{m} d_l(t)w_l(x)$ в пространстве $\widehat{W}_2^1(Q_T)$, приходим к тождеству (14). Начальное условие $u(x,0) = 0$ будет выполнено в силу отмеченной выше сходимости $u^m(x,t)$ к $u(x,t)$ в $L_2(\Omega)$ и того, что $u^m(x,0) \to 0$ в $L_2(\Omega)$.

Таким образом, решение задачи 2а с условиями (13) существует, удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{W_2^1(Q_T)} \leq \sqrt{\frac{e^{c_1T}-1}{c_1}}\|\psi\|_{L_2(\Omega)} \tag{20}$$

и единственно, что легко следует из полученной оценки (20).

Возвращаясь к оценке нормы оператора A, получим, учитывая оценку решения вспомогательной задачи с условиями (13):

$$\|A\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{k_0\frac{(e^{c_1T}-1)}{c_1}}\|\psi\|_{L_2(\Omega)},$$

что означает в силу условия теоремы сжимаемость оператора A. Это свойство оператора обеспечивает существование единственного решения операторного уравнения (12) и, значит, разрешимость задачи 2.

Действительно, пусть $\widetilde{\psi}$ — решение уравнения (12), а $\widetilde{u}$ — решение задачи 2а с условием $\widetilde{u}_t(x,0) = \widetilde{\psi}(x)$. Тогда $\widetilde{u}$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega (-\widetilde{u}_t v_t + \nabla\widetilde{u}\nabla v + c\widetilde{u}v)dx\,dt = \int_\Omega \widetilde{\psi}v dx + \int_0^T \int_\Omega fv\,dx\,dt.$$

Так как $\widetilde{\psi}$ — решение уравнения (12), то $\widetilde{\psi} = -\int\limits_0^T K\widetilde{u}dt + g(x)$. Подставив это выражение в тождество, получим

$$\int_0^T \int_\Omega (-\widetilde{u}_t v_t + \nabla\widetilde{u}\nabla v + c\widetilde{u}v)dx\,dt + \int_\Omega v(x,0)\int_0^T K\widetilde{u}\,dt\,dx =$$
$$= -\int_\Omega g(x)v(x,0)dx + \int_0^T \int_\Omega fv\,dx\,dt.$$

Это есть тождество, определяющее обобщенное решение задачи 2, и в силу единственности решения $\widetilde{u} = u$ является решением задачи 2.

3. Вернемся теперь к задаче 1. Пусть выполняются условия I–IV. Тогда правая часть операторного уравнения (12) $g \in C^1(\Omega)$. Так как решение вспомогательной задачи $u \in W_2^1(Q_T)$, то нетрудно показать, что $\psi(x)$, решение операторного уравнения (12), имеет обобщенную производную, принадлежащую $L_2(\Omega)$. Действительно, пусть $\phi \in \dot{C}^\infty(\Omega)$, $\psi(x)$ — решение (12). Тогда справедливо

$$\int_\Omega \psi\phi_{x_i}dx = \int_\Omega [g(x) - \int_0^T Ku\,dt]\phi_{x_i}dx = -\int_\Omega [g_{x_i}(x) - \int_0^T (Ku)_{x_i}dt]\phi(x)dx, \quad i = 1, \dots, n,$$

что означает существование обобщенной производной. Принадлежность ее пространству $W_2^1(\Omega)$ следует из оценки (20) и условий теоремы 2.

Заметим, что границу области Ω считаем гладкой. Тогда решение задачи 2а принадлежит пространству $W_2^2(Q_T)$ ([14], с. 216). Такое решение удовлетворяет уравнению (1) для почти всех $(x,t) \in Q_T$ и тождество (10) может быть записано в форме

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u + cu)v\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega fv\,dx\,dt. \tag{21}$$

Проведенные выше рассуждения позволяют утверждать, что и решение задачи 2 принадлежит этому пространству. Тогда тождество (6) можно записать в форме

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u + cu)v\,dx\,dt + \int_\Omega v(x,0)[u_t(x,0)dx + \int_0^T K(x,t)u(x,t)dt]dx =$$
$$= \int_0^T \int_\Omega fv\,dx\,dt + \int_\Omega g(x)v(x,0)dx. \tag{22}$$

Так как $u(x,t)$ — обобщенное решение уравнения (1) из $W_2^2(Q_T)$, то для любой $v \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u + cu)v\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega fv\,dx\,dt,$$

и поэтому

$$\int_\Omega v(x,0)[u_t(x,0) + \int_0^T K(x,t)u(x,t)dt - g(x)]dx = 0. \tag{23}$$

Подставим в (23) представление функций $K(x,t)$ и $g(x)$:

$$\int_\Omega v(x,0)[u_t(x,0) - \int_0^T (k''(t) + c(x,t)k(t))u(x,t)dt -$$
$$- k'(0)\varphi(x) + \int_0^T k(t)f(x,t)dt + \Delta h(x)]dx = 0 \tag{24}$$

и сделаем некоторые преобразования, учитывая условия на $k(t)$:

$$\int_0^T k''(t)u(x,t)dt = \int_0^T ku_{tt}dt + u_t(x,0) - k'(0)\varphi(x).$$

Подставим в (23)

$$\int_\Omega \left[\int_0^T k(t)(u_{tt} + cu - f)dt + \Delta h\right]dx = 0.$$

Так как $u(x,t)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^T \int_\Omega [u_{tt} - \Delta u + cu - f]v\,dx\,dt = 0$$

для любой $v \in W_2^1(Q_T)$ как решение вспомогательной задачи 2а, то

$$\int_\Omega \int_0^T k(t)(u_{tt} + cu - f)dt\,dx = \int_\Omega \int_0^T k(t)\Delta u\,dt\,dx.$$

Получаем равенство

$$\int_\Omega v(x,0)\Delta[\int_0^T k(t)udt - h]dx = 0,$$

откуда в силу произвольности $v(x,t)$ следует $\Delta\Big[\int\limits_0^T k(t)udt - h\Big] = 0$. Из граничного условия и условий согласования

$$\Big(\int_0^T k(t)u(x,t)dt - h(x)\Big)\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

имеем в силу единственности решения задачи Дирихле

$$\int_0^T k(t)u(x,t)dt = h(x),$$

что означает выполнение условия (4). Таким образом, решение задачи 2, принадлежащее $W_2^2(Q_T)$, есть решение задачи 1. Осталось убедиться в его единственности.

Пусть $u(x,t)$ — решение однородной задачи 1. Тогда для нее выполняется тождество

$$\int_0^T \int_\Omega (u_{tt} - \Delta u + cu)vdxdt = 0, \quad v \in \widehat{W}_2^1(Q_T), \tag{25}$$

а также

$$\int_0^T k(t)u(x,t)dt = 0, \quad u(x,t)\big|_{S_T} = 0.$$

Интегрируя в (25) по частям, получим

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \nabla u \nabla v + cuv)dx\,dt = \int_\Omega u_t(x,0)v(x,0)dx. \tag{26}$$

В силу предположений относительно $u(x,t)$ справедливы равенства

$$\Delta \int_0^T k(t)u(x,t)dt = \int_0^T k(t)\Delta u(x,t)dt = \int_0^T k(t)[u_{tt} + cu]dx = 0.$$

Интегрируя по частям последнее из них, получим равенство $k(0)u_t(x,0) = \int\limits_0^T [k'' + ck]u\,dx$, которое, учитывая введенные обозначения, подставим в (26)

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t v_t + \nabla u \nabla v + cuv)dxdt = \int_\Omega v(x,0)[k'' + ck]u\,dx.$$

Полученное тождество определяет решение однородной задачи 2, и в силу теоремы 2 $u(x,t) = 0$, что означает единственность решения задачи 1. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Достаточное условие разрешимости задачи 1 $k_0 < \frac{c_1}{e^{c_1 T}-1}$ представляет собой соотношение между входными данными $k(t)$, $c(x,t)$, T и позволяет ими манипулировать в зависимости от установленных приоритетов.

Если $c(x,t) = 0$, то $c_1 = T$ и условие разрешимости принимает вид $k_0(e^{T^2} - 1) < T$.

Замечание 2. Нарушение хотя бы одного из условий $k(T) = 0$, $k'(T) = 0$, $k(0) \neq 0$ может привести к неединственности решения. Подтвердим это двумя примерами.

1. Однородная задача

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{\pi^2(l^2 - T^2)}{T^2 l^2} u = 0, \quad (x,t) \in (0,l) \times (0,T),$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad \int_0^T \cos \frac{\pi t}{T} u \, dt = 0$$

имеет нетривиальное решение $u(x,t) = \sin \frac{\pi t}{T} \sin \frac{\pi x}{l}$. Нарушено условие $k(T) = 0$.

2. Если в качестве ядра взять функцию $k(t) = \sin \frac{2\pi t}{T}$ с нарушением условий $k(0) \neq 0$, $k'(T) = 0$, то, как и в первом примере, существует нетривиальное решение однородной задачи $u(x,t) = \sin \frac{\pi t}{T} \sin \frac{\pi x}{l}$.

Литература

[1] Cannon J.R. *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., № 21, 155–160 (1963).

[2] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. *Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды*, Матем. моделир. **12** (1), 94–103 (2000).

[3] Кожанов А.И.,Пулькина Л.С. *О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений*, Дифференц. уравнения, **42** (9), 1166–1179 (2006).

[4] Пулькина Л.С. *Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями* 1 *рода с ядрами, зависящими от времени*, Изв. вузов. Матем., № 10, 32–44 (2012).

[5] Пулькина Л.С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений* ("Самарский университет", Самара 2012).

[6] Кузь А.М., Пташник Б.И. *Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна–Гордона у классі функцій, майже периодичних за просторовими змінними*, Прикл. проблеми мех. і мат., Вип. 8, 41–53 (2010).

[7] Абдрахманов А.М., Кожанов А.И. *Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка*, Изв. вузов. Матем., № 5, 3–12 (2007).

[8] Лукина Г.А. *Краевые задачи с интегральными граничными условиями по времени для уравнений третьего порядка*, Матем. заметки ЯГУ **17** (2), 75–97 (2010).

[9] Прилепко А.И., Костин А.Б. *О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением*, Матем. сб. **183** (4), 49–68 (1992).

[10] Cannon J.R., Lin Y. *An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation* J. Math. Anal. Appl. **145** (2), 470–484 (1990).

[11] Камынин В.Л. *Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения*, Матем. заметки **94** (2), 207–217 (2013).

[12] Денисов А.М. *Введение в теорию обратных задач* (Изд-во Московск. ун-та, М., 1994).

[13] Ионкин Н.И. *Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием*, Дифференц. уравнения **13** (2), 294–304 (1977).

[14] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики* (Наука, М., 1973).

Л.С. Пулькина

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, ул. Московское шоссе, д. 34, г. Самара, 443086, Россия,

e-mail: louise@samdiff.ru

А.Е. Савенкова

Самарский технический государственный университет, ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия,

e-mail: alesya.savenkova@mail.ru

L.S. Pul'kina and A.E. Savenkova

A problem with a nonlocal with respect to time condition for multidimensional hyperbolic equations

Abstract. We study the boundary-value problem for hyperbolic equation with nonlocal with respect to time-variable condition in integral form. We obtain sufficient conditions for the unique solvability of the nonlocal problem. The proof is based on possibility to reduce a nonlocal condition of the first kind to the second kind one. This allows to reduce the nonlocal problem to an operator equation. We show that unique solvability of the operator equation implies the existence of a unique solution to the posed problem.

Keywords: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, generalized solution.

L.S. Pul'kina

Samara National Research University named after academician S.P. Korolyov,
34 Moskovskoe Highway, Samara, 443086 Russia,

`e-mail:` louise@samdiff.ru

A.E. Savenkova

Samara Technical State University,
244 Molodogvardeiskaya str., Samara, 443100 Russia,

`e-mail:` alesya.savenkova@mail.ru