

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
Направление: 010800.68 – механика и математическое моделирование
Специализация: механика твердого деформируемого тела

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ

Работа завершена:

« ____ » _____ 2015 г. _____ (М.Г. Васильева)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

Кандидат физико-математических наук, доцент

" ____ " _____ 2015 г. _____ (С.А.Кузнецов)

Заведующий кафедрой

доктор физико-математических наук, профессор

" ____ " _____ 2015 г. _____ (Ю.Г.Коноплев)

Казань- 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| 1. Введение..... | 3 |
| 2. Постановка задачи..... | 4 |
| 3. Определение функции влияния..... | 5 |
| 4. Интегральное уравнение условия контакта..... | 8 |
| 5. Представление решения в графиках..... | 9 |
| 6. Описание практической части..... | 17 |
| 7. Заключение..... | 18 |
| 8. Список литературы..... | 19 |

1. Введение

Одним из основных способов приложения нагрузки к деформируемому телу является контакт, что придает задачам контактного взаимодействия важное прикладное значение. Зная, как распределяется давление в области контакта, можно определить участки концентрации напряжений и другие факторы контактной прочности и жесткости.

Особую роль контактные задачи играют в машиностроении, т.к. в механизмах конструктивно предусмотрено сопряжение деталей, но они находят приложение и в других областях прикладной механики.

Отдельным классом задач являются случаи, когда область контакта соизмерима с размерами соприкасающихся тел, т.к. к ним не применяется допущение Герца о малости области контакта. Впервые обобщение задачи Герца на этот случай осуществил И.Я.Штаерман [5], который рассмотрел задачу о внутреннем контакте упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями близких радиусов. Обзор результатов для контактных задач теории упругости для круговых областей содержится в монографии М.И. Теплового «Контактные задачи для областей с круговыми границами» [1].

Обзорная монография «Развитие контактных задач в СССР» под редакцией Л.А. Галина [6] освещает фундаментальные результаты и методы в теории контактных задач до 1975 г., а вышедшая в 2001 г. «Механика контактных взаимодействий» [7] содержит подробный обзор работ выпущенных после этого периода.

В 2001 году в работе О.В. Чумариной [8] были созданы и реализованы алгоритмы решения двумерных контактных задач для мембран произвольной формы (в том числе круговых) взаимодействующих с жесткими телами. В 2004 году вышла книга В.М. Александрова и М.И. Чебакова [9], обобщающая исследования авторов в области задач контактного взаимодействия тел сложной конфигурации, неоднородных тел и задач с усложненными условиями в зоне контакта. В журнале «Вестник машиностроения» в 2011 году выходят статьи «Контактная деформация и сжатие цилиндров» О.И. Косарева [11] и «Об одном методе точного решения контактной задачи Герца для круговых цилиндров с параллельными осями» Ф.Г. Нахатакян [10], где было получено точное решение с использованием модели упругого полупространства на основе теории Герца. В 2014 выходит статья [12], посвященная задаче о внутреннем контакте тел с круговыми границами с учетом большой разности радиусов штампов, радиусов поверхностей покрытий и произвольной глубины внедрения штампа в покрытие.

2. Постановка задачи

В упругой изотропной пластине единичной толщины $S1$ на границе имеется полукруговое отверстие радиуса R , в которое вставлен жесткий диск $S2$ того же радиуса. Диск прижимается к границе отверстия в пластине и вдавливается на величину γ . В результате этого в области контакта возникают контактные напряжения, радиальные σ_r и касательные $\tau_{r\alpha}$. Пластина и диск находятся в состоянии статического равновесия. Задача состоит в определении контактных напряжений.

Введем полярную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с центром полукругового отверстия. Обозначим через φ полярный угол точек границы отверстия. За положительное направление примем направление отсчета против часовой стрелки.

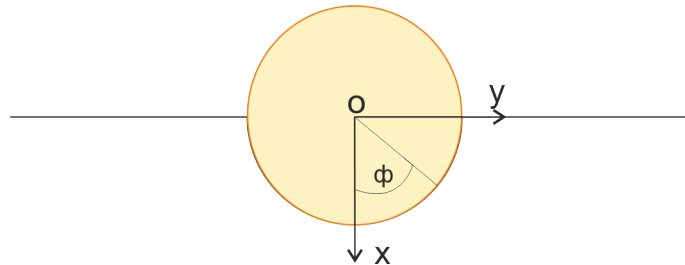


Рис. 1

Предполагаем, что размеры пластины $S1$ достаточно большие по сравнению с размерами отверстия, поэтому пластину можно считать полубесконечной, а напряжения на внешнем контуре нулевыми.

Для вывода уравнения задачи используем условие контакта, которое заключается в том, что перемещения штампа совпадут с перемещениями границы.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+\alpha}^{\frac{\pi}{2}} G(r, R, \varphi, \varphi_0) \sigma(\varphi_0) d\varphi_0 = \gamma \cos(\varphi - \alpha) \quad \text{при } r=R. \quad (1)$$

Здесь $G(r, R, \varphi, \varphi_0)$ — перемещение точек границы под действием единичной нагрузки в направлении φ_0 , $\gamma \cos(\varphi - \alpha)$ с достаточной точностью задают перемещения штампа и границы отверстия, а α угол в направлении которого вдавливается диск.

3. Определение функции влияния

Рассмотрим пластину с полукруговым отверстием, нагруженную сосредоточенной единичной силой N , действующей по нормали к контуру. Пластина нагружена только в срединной плоскости, а напряжения по толщине пластины постоянны. Такая задача известна как плоская задача теории упругости, решение ее сводится к определению функции напряжений.

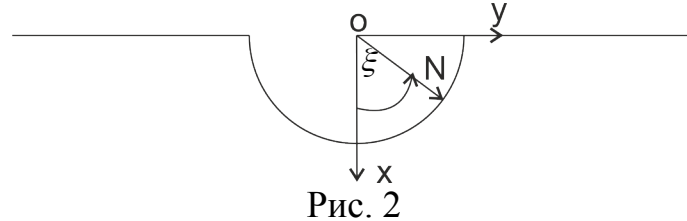


Рис. 2

Поскольку пластина нагружена только на контуре, достаточно общего решения однородного уравнения [2]:

$$\Delta \Delta \Phi = 0 \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения в полярных координатах (r, θ) имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} \Phi = & C_{10} + C_{20} r^2 + C_{30} \ln r + C_{40} r^2 \ln r + (C_{11} r + C_{21} r^3 + C_{31} r^{-1} + C_{41} r \ln r) \cos \vartheta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (C_{1n} r^n + C_{2n} r^{n+2} + C_{3n} r^2 + C_{4n} r^{-n+2}) \cos n \vartheta + (D_{11} r + D_{21} r^3 + D_{31} r^{-1} + D_{41} r \ln r) \sin \vartheta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (D_{1n} r^n + D_{2n} r^{n+2} + D_{3n} r^2 + D_{4n} r^{-n+2}) \sin n \vartheta + E_1 \vartheta + E_2 r^2 \vartheta + E_3 r \vartheta \sin \vartheta + E_4 r \vartheta \cos \vartheta \end{aligned} \quad (3)$$

Напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \vartheta^2}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\vartheta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) \quad (4)$$

Для отверстия $r=R$ граничными условиями являются

$$\sigma_r = \frac{\delta(\theta - \xi)}{R}, \quad \tau_{r\vartheta} = 0 \quad (5)$$

И при $r \rightarrow \infty$ имеем $\sigma_r \rightarrow 0$, $\sigma_\theta \rightarrow 0$, $\tau_{r\vartheta} \rightarrow 0$ (6)

Дельта-функцию представим в виде ряда $\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum \cos 2k(\theta - \xi)$ [4] и после удовлетворения граничным условиям получим:

$$\Phi(r, \theta) = C_{10} + \frac{R \ln r}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^{-2n} R^{2n} ((1+2n)r^2 + (-1+2n)R^2) \cos 2n(\theta - \xi)}{(-1+2n)(1+2n)^2 \pi} \right) \quad (7)$$

Тогда перемещения можно найти, вычислив напряжения и взяв интеграл:

$$u = \int \varepsilon_r dr = \frac{1}{E} \int (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) dr \quad (8)$$

Константа интегрирования определяется из требования равенства нулю на бесконечности. Тогда:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{E \pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2(n(-1+2n)R(1+\nu) + (1+2n)R(1+n-\nu+n\nu))}{(-1+2n)(1+2n)^2} \cos 2n(\theta - \xi) \right) \quad (9)$$

Перемещения границы для единичной нагрузки, приложенной в центре:

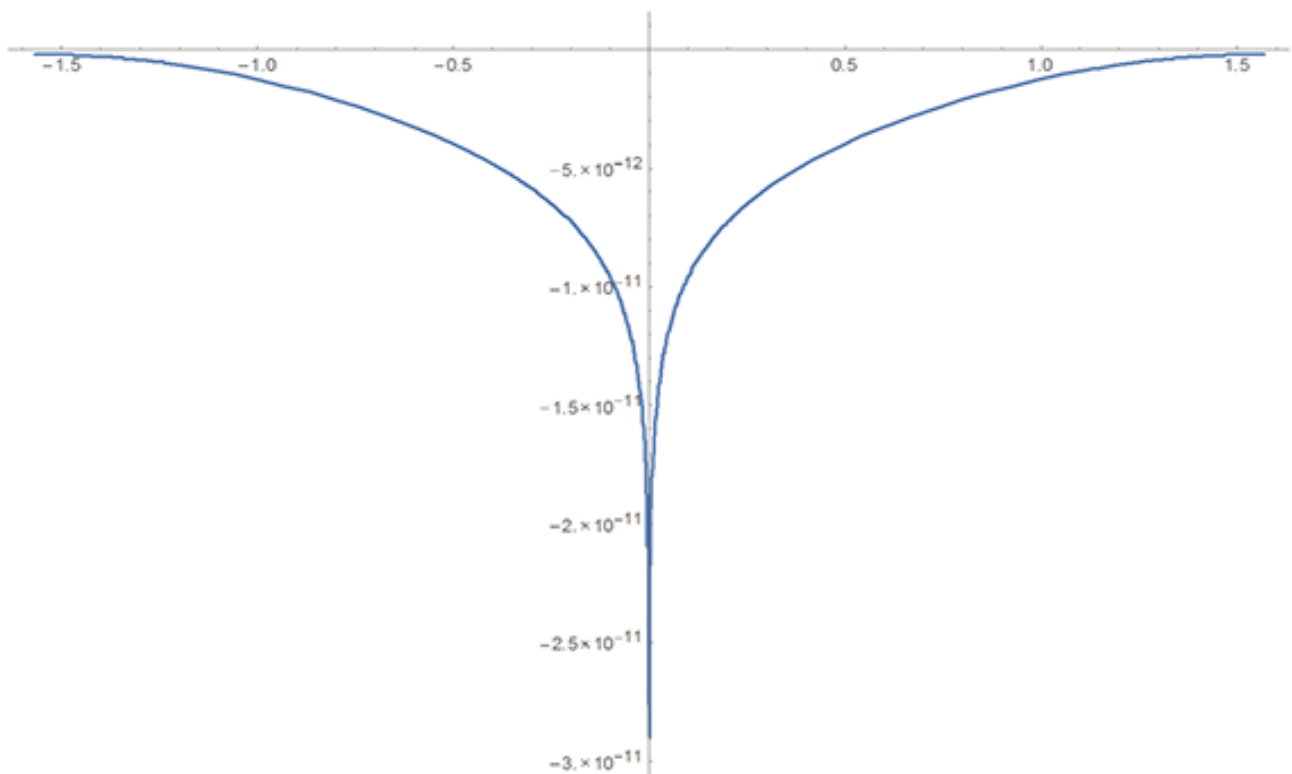


Рис.3

И для единичной нагрузки, смещенной вправо или влево:

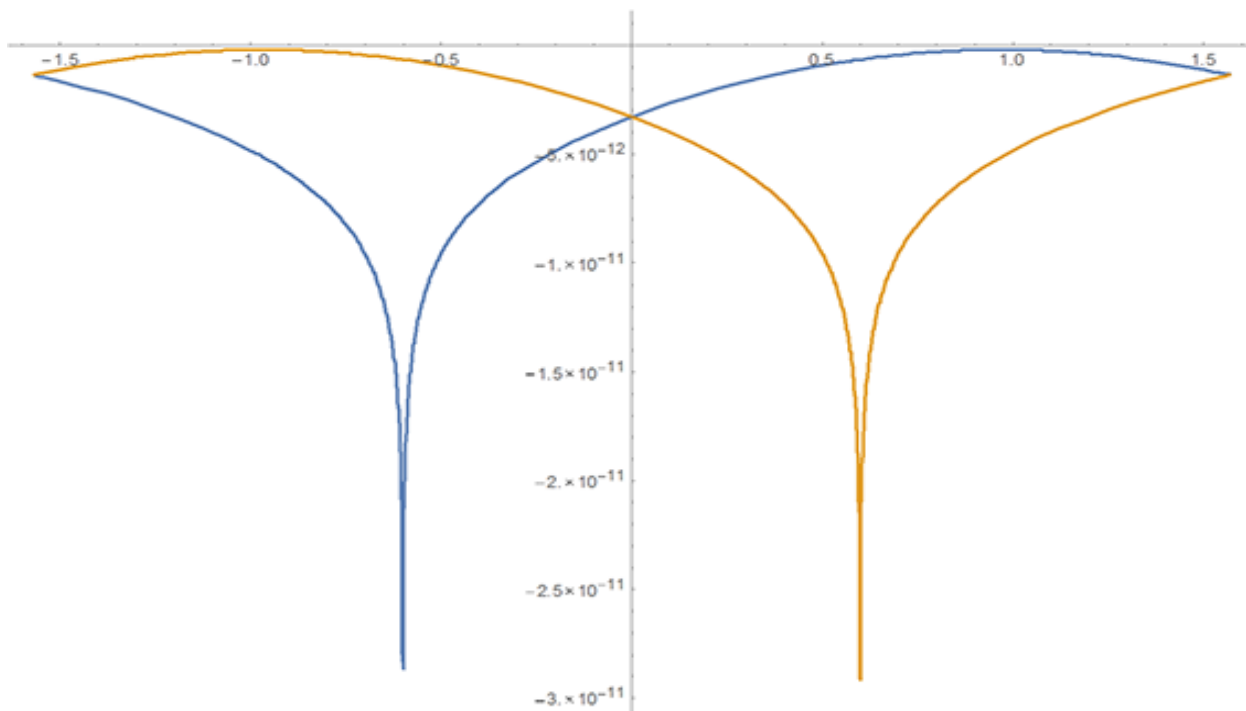


Рис.4

В полярной системе координат эти графики имеют следующий вид:

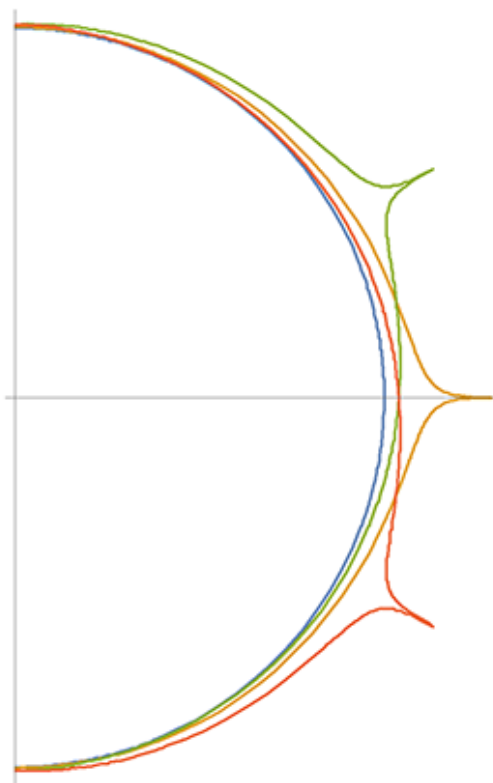


Рис. 5

Отсюда видно, что функция влияния имеет особенность при $\varphi = \xi$: в точке приложения нагрузки она ведет себя как дельта-функция. Этим она напоминает функцию влияния для упругой полуплоскости, которая имеет вид $\ln \frac{1}{|x - \xi|}$.

4. Интегральное уравнение условия контакта

Подставим полученное выражение для перемещений границы в условие контакта (1). В точке $\varphi = \varphi_o$ функция влияния имеет особенность, поэтому интеграл разбивается на три части:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} G(r, R, \varphi, \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o &= \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\varphi_o - \varepsilon} G(r, R, \varphi, \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o \\ &+ \int_{\varphi_o - \varepsilon}^{\varphi_o + \varepsilon} G(r, R, \varphi, \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o + \int_{\varphi_o + \varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} G(r, R, \varphi, \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o \end{aligned} \quad (10)$$

На малом интервале $[\varphi_o - \varepsilon, \varphi_o + \varepsilon]$ функцию $G(r, R, \varphi, \varphi_o)$ можно заменить дельта-функцией, тогда

$$\int_{\varphi_o - \varepsilon}^{\varphi_o + \varepsilon} G(r, R, \varphi, \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o = \frac{R}{E \pi} \int_{\varphi_o - \varepsilon}^{\varphi_o + \varepsilon} \delta(\varphi - \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o = \frac{R}{E \pi} \sigma(\varphi) \quad (11)$$

В остальных точках $G(r, R, \varphi, \varphi_o)$ можно представить в виде конечного ряда

$$\begin{aligned} \frac{R}{E \pi} \sum_{n=1}^N \left(\frac{2(n(-1+2n)(1+\nu) + (1+2n)(1+n-\nu+n\nu))}{(-1+2n)(1+2n)^2} \cos 2n(\varphi - \varphi_o) \right) = \\ = \frac{R}{E \pi} \sum_{n=1}^N u_n(R) \cos 2n(\varphi - \varphi_o) \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, условие контакта запишется в следующем виде:

$$\frac{R}{E \pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^N u_n(R) \cos 2n(\varphi - \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o + \frac{R}{E \pi} \sigma(\varphi) = y \cos(\varphi - \alpha) \quad (13)$$

Т.к.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n(R) \cos 2n(\varphi - \varphi_o) \sigma(\varphi_o) &= \sum_{n=1}^N u_n(R) (\cos 2n\varphi \cos 2n\varphi_o + \sin 2n\varphi \sin 2n\varphi_o) = \\ &= \sum_{i=1}^{2N} u_i(R) A_i(\varphi) B_i(\varphi_o) \end{aligned} \quad (14)$$

То (13) это интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром.

Решение этого уравнения представляется в виде:

$$\sigma(\varphi) = \frac{E\pi y}{R} \cos(\varphi - \alpha) + \sum_{j=1}^N s_j \cos \varphi + d_j \sin \varphi \quad (15)$$

5. Представление решения в графиках

Если диск смещается в вертикальном направлении и $\alpha=0$, то область контакта максимальна, и контактное давление $\sigma(\varphi)$ распределяется следующим образом:

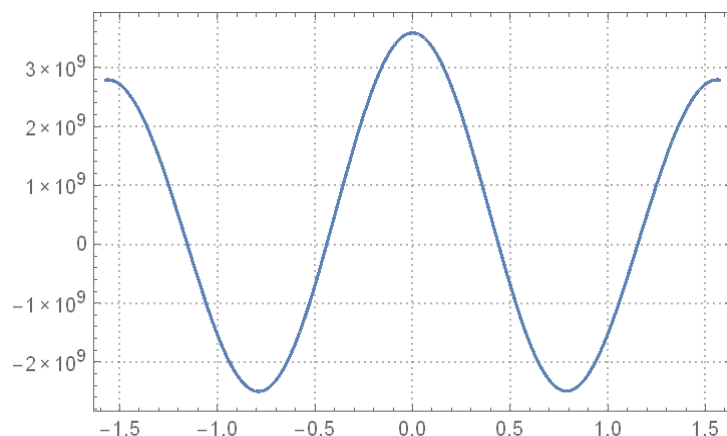


Рис.6

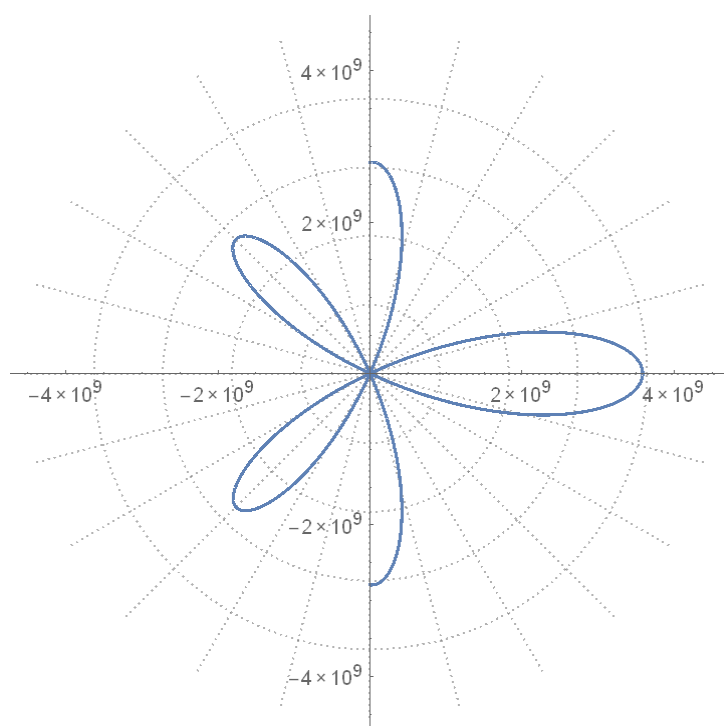


Рис.7

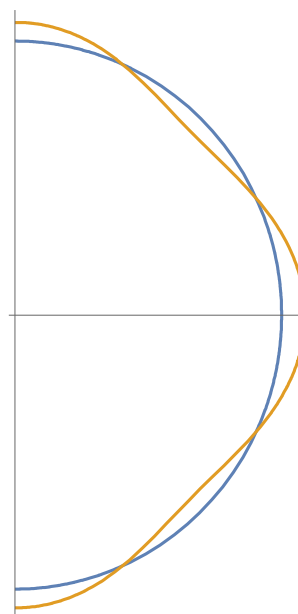


Рис.8

Рис.8 представляет собой эпюру вдоль границы отверстия.

При угле $\alpha = \frac{\pi}{8}$ контактное давление имеет следующий вид:

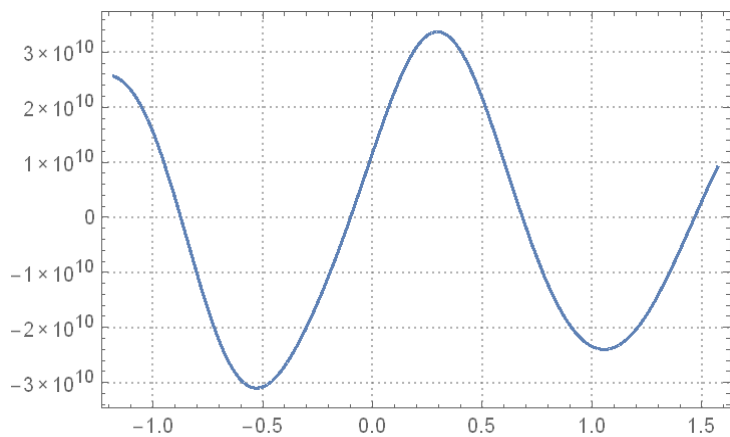


Рис.9

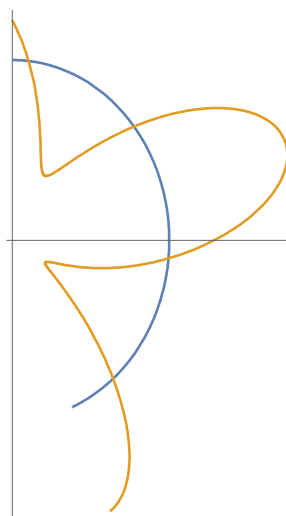


Рис.10

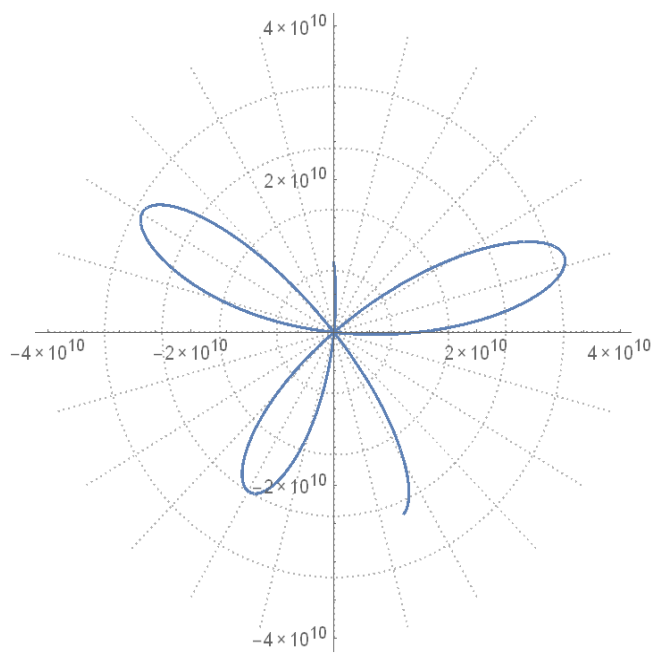


Рис.11

График для $\alpha = \frac{\pi}{6}$

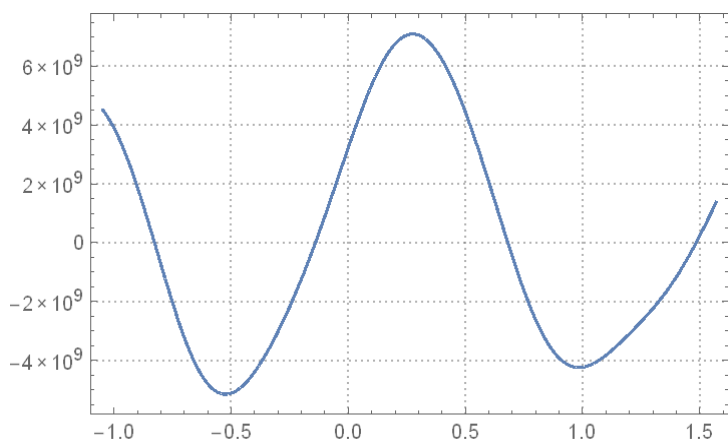


Рис. 12

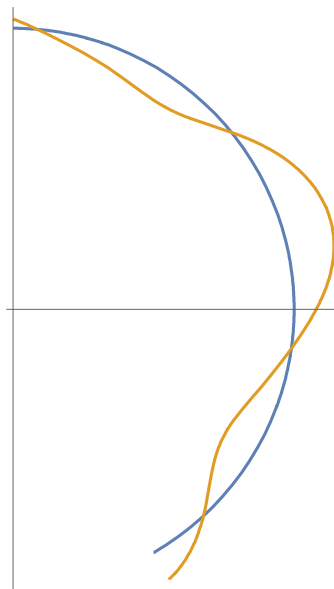


Рис.13

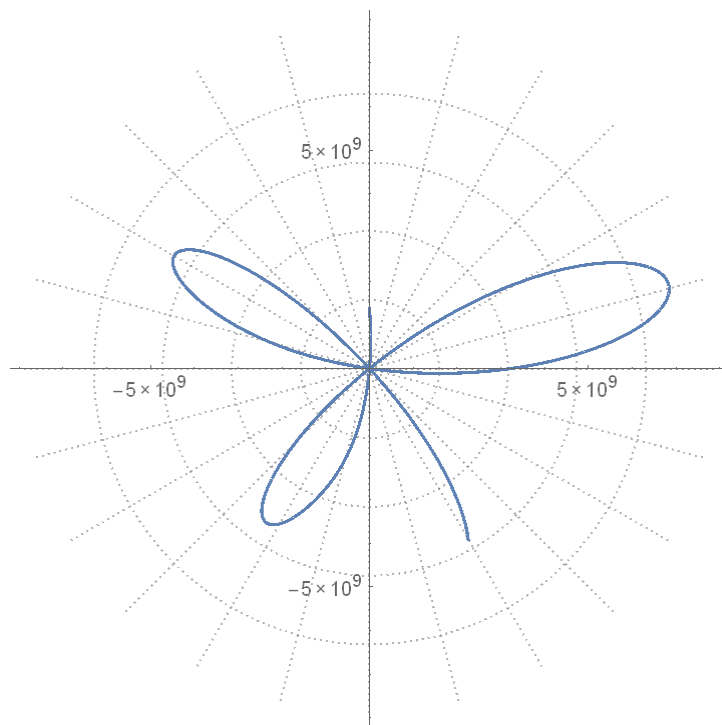


Рис. 14

График для $\alpha = \frac{\pi}{4}$

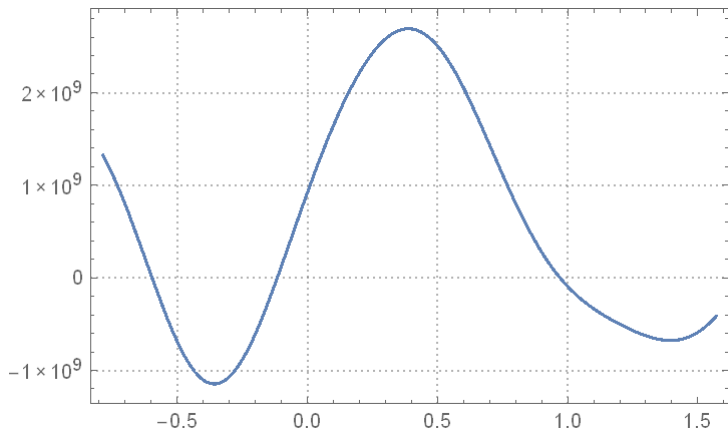


Рис.15

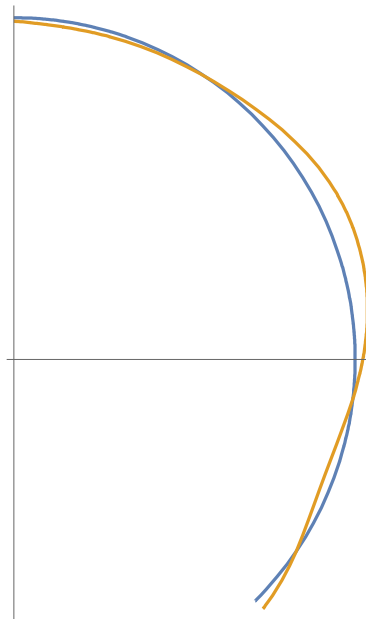


Рис.16

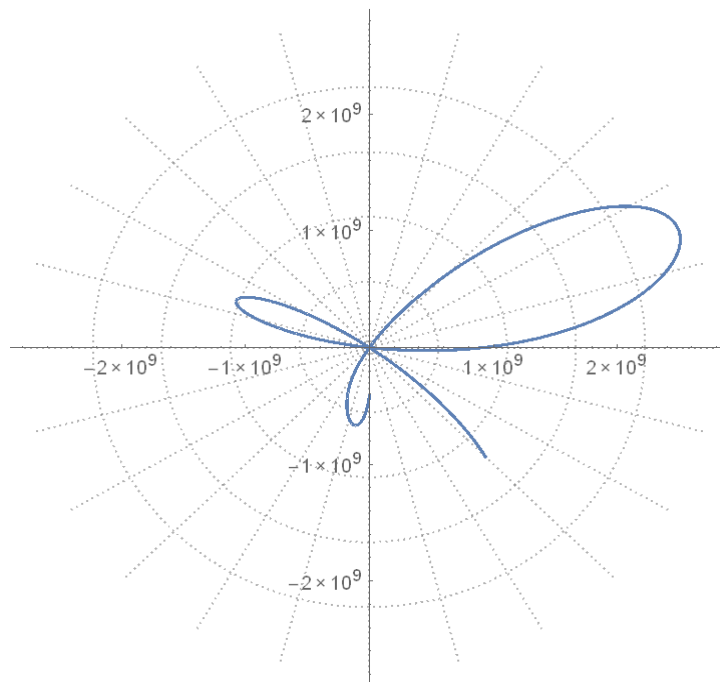


Рис. 17

График для $\alpha = \frac{\pi}{3}$

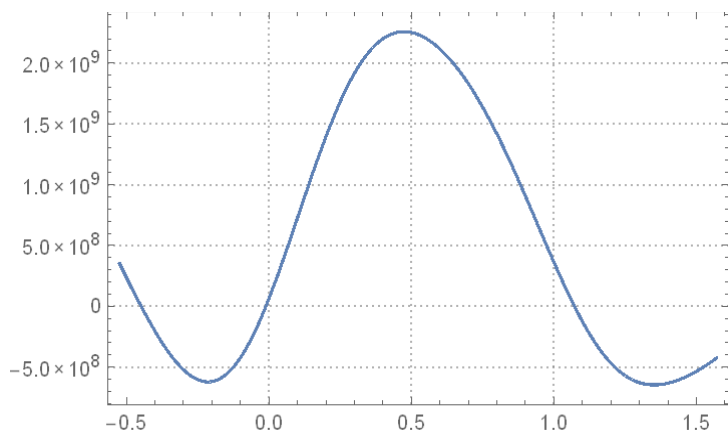


Рис.18

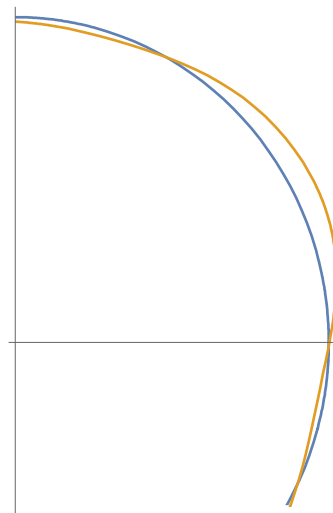


Рис.19

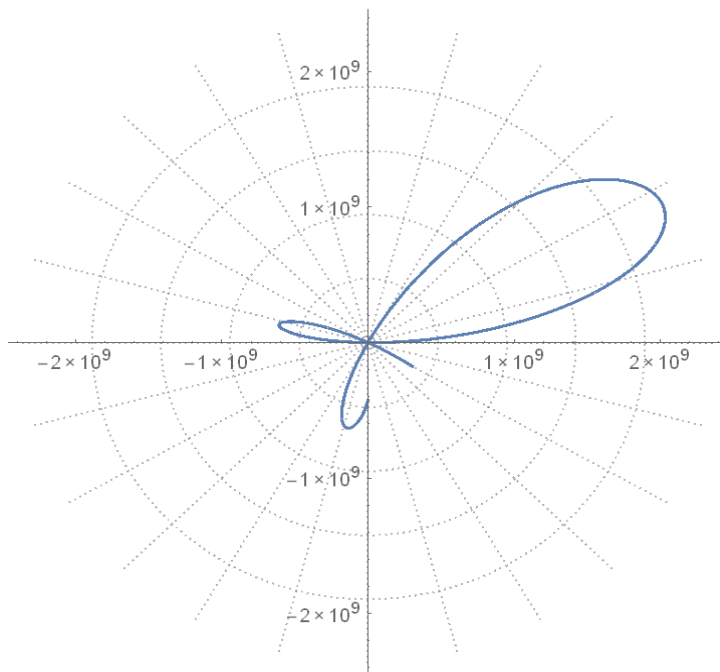


Рис. 20

График для $\alpha = \frac{3\pi}{8}$

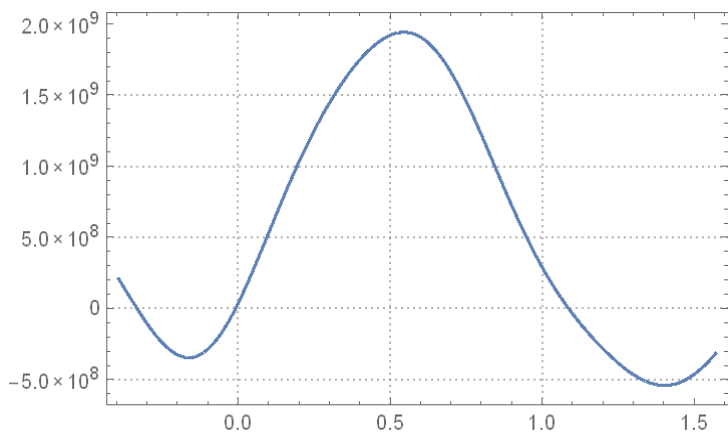


Рис. 21

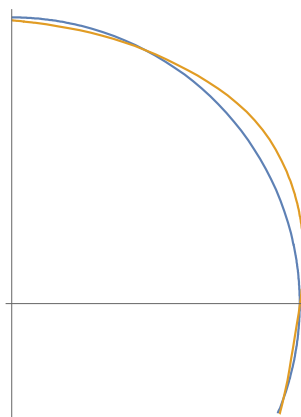


Рис.22

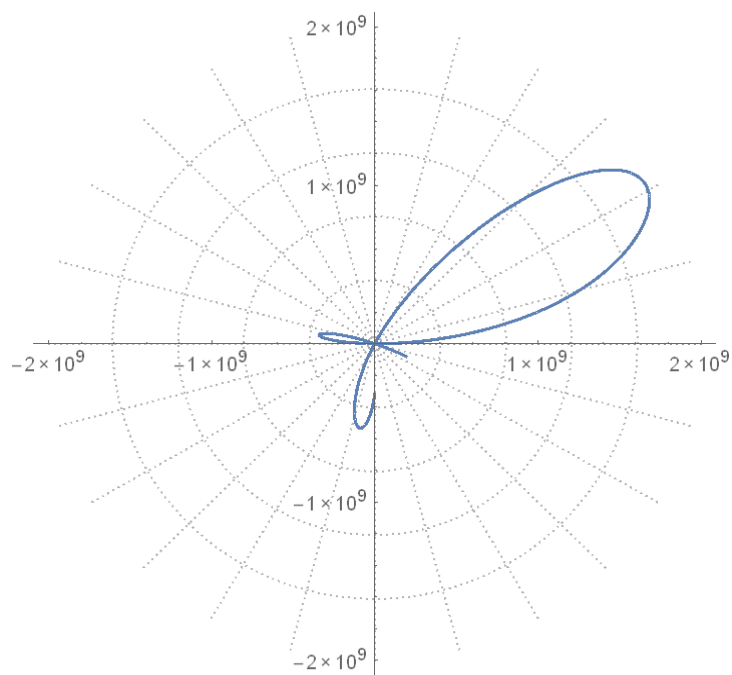


Рис. 23

Если угол α отрицательный, то есть штамп вдавливается в противоположном направлении, то границы интегрирования изменятся, и уравнение (13) примет следующий вид:

$$\frac{R}{E\pi} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \sum_{n=1}^N u_n(R) \cos 2n(\varphi - \varphi_o) \sigma(\varphi_o) d\varphi_o + \frac{R}{E\pi} \sigma(\varphi) = y \cos(\varphi + \alpha) \quad (16)$$

Все графики, построенные для его решения, будут выглядеть аналогично графикам для положительного угла, но симметрично отобразятся вокруг оси $\varphi = 0$.

Например, график, построенный для $\alpha = \frac{-3\pi}{8}$ выглядит так:

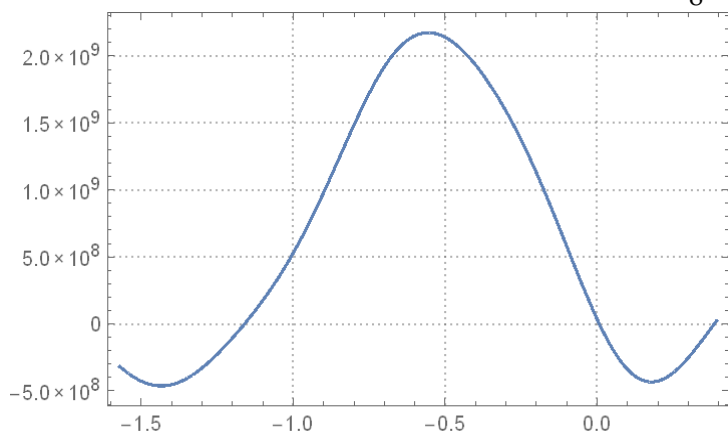


Рис.24

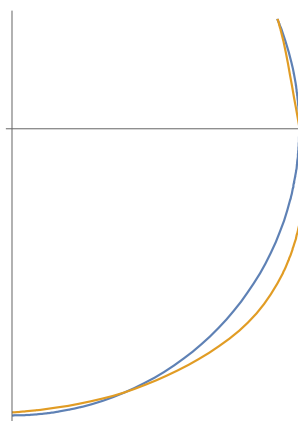


Рис.25

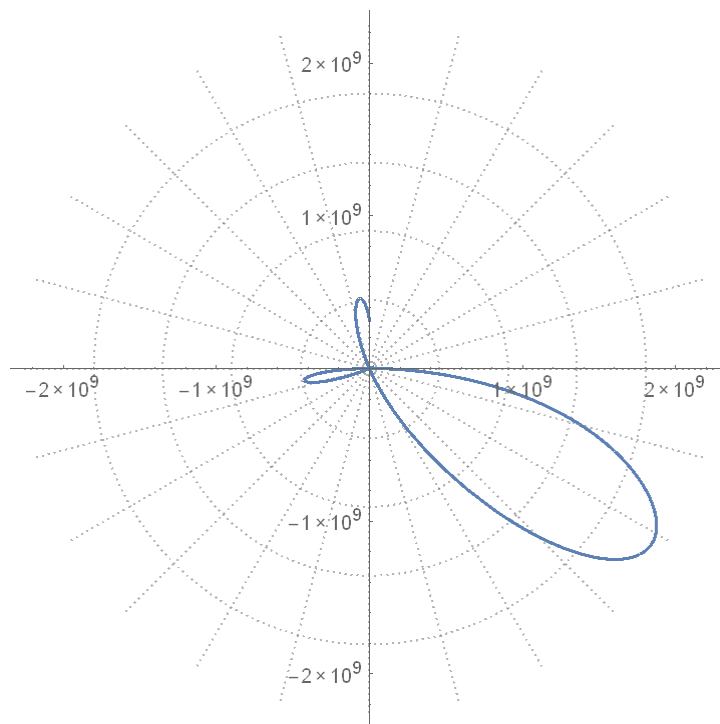


Рис. 26

| Максимальное напряжение при $\frac{y}{R}=0,001$ и $E = 1.23 \cdot 10^{11}$ | | | |
|--|------------------------|------------------------|-------------------------|
| $\alpha=0$ | $\alpha=\frac{\pi}{8}$ | $\alpha=\frac{\pi}{4}$ | $\alpha=\frac{3\pi}{8}$ |
| $3.59 \cdot 10^9$ | $3.37 \cdot 10^{10}$ | $2.63102 \cdot 10^9$ | $2.17 \cdot 10^9$ |

| Максимальное напряжение при угле $\alpha=0$ и $E = 1.23 \cdot 10^{11}$ | | | |
|--|----------------------|---------------------|---------------------|
| $\frac{y}{R}=0,05$ | $\frac{y}{R}=0,01$ | $\frac{y}{R}=0,005$ | $\frac{y}{R}=0,001$ |
| $1.79 \cdot 10^{11}$ | $3.59 \cdot 10^{10}$ | $1.79 \cdot 10^9$ | $3.59 \cdot 10^9$ |

| Максимальное напряжение при угле $\alpha=0$ и $\frac{y}{R}=0,001$ | | | |
|---|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $E = 1.6 \cdot 10^{10}$ | $E = 7.1 \cdot 10^{10}$ | $E = 1.23 \cdot 10^{11}$ | $E = 2.06 \cdot 10^{11}$ |
| $4.77 \cdot 10^9$ | $2.07 \cdot 10^{10}$ | $3.59 \cdot 10^{10}$ | $6.01 \cdot 10^9$ |

| Максимальное напряжение при угле $\alpha=0$, $\frac{y}{R}=0,001$ и $E = 1.23 \cdot 10^{11}$ | | | | |
|--|----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| $N=3$ | $N=5$ | $N=6$ | $N=7$ | $N=10$ |
| $3.5503 \cdot 10^9$ | $3.587 \cdot 10^9$ | $3.59582 \cdot 10^9$ | $3.590 \cdot 10^9$ | $3.59339 \cdot 10^9$ |
| $N=15$ | $N=20$ | $N=25$ | $N=25$ | |
| $3.59239 \cdot 10^9$ | $3.59278 \cdot 10^9$ | $3.59257 \cdot 10^9$ | | |

6. Описание практической части

Для вычислений и построения графиков использовался пакет символьной математики Wolfram Mathematica (WM), который позиционирует себя как наиболее полную систему для современных технических вычислений в мире. Mathematica обладает высокой скоростью и точностью вычислений. В отличие от пакетов MathCAD и MatLab, которые используют преимущественно числовые алгоритмы, она позволяет получить аналитическое решение, когда это возможно.

7. Заключение

В результатах, полученных в данной работе, были выявлены следующие закономерности:

- 1) Если штамп смещается строго вертикально, то максимальные напряжения возникнут в центре, а по обе стороны от него возникнут две симметричные зоны отрыва, которые компенсируются высокими напряжениями на краях. Для более точного решения необходимо решить многоконтактную задачу.
- 2) При изменении угла вдавливания штампа зона максимальных напряжений и зоны отрыва смещаются с запаздыванием. Величина максимальных напряжений до определенного значения α растет, а потом падает. При дальнейшем увеличении угла на свободном краю отверстия происходит отрыв, как это можно наблюдать на графике для $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
- 3) От остальных параметров ($E, \gamma, \frac{1}{R}$) решение зависит линейно.

8. Список литературы:

- 1) Теплый М.И. Контактные задачи для области с круговыми границами
- 2) Лукаевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках - М.: Мир, 1982. - 542 с.
- 3) Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. 2-е изд. - М.: Наука, 1979. - 560с.
- 4) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики
- 5) Штаерман И. Я. Контактная задача по теории упругости - М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. - 270 с.
- 6) Развитие контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.:Наука, 1976. - 493 с.
- 7) Айзекович С.М. и др. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. - М.: Физматлит, 2001. - 672 с.
- 8) Чумарина О.В. Контактные задачи взаимодействия мембраны сложной формы с жестким телом и жидкостью - 2001. - 149 с.
- 9) Александров В.М., Чебаков М.И. Аналитические методы в контактных задачах теории упругости - М.: Физматлит, 2004. - 304 с.
- 10) Нахатакян Ф.Г. Об одном методе точного решения контактной задачи Герца для круговых цилиндров с параллельными осями / Вестник машиностроения. № 3, 2011. - С. 3-6.
- 11) Косарев О.И. Контактная деформация и сжатие цилиндров / Вестник машиностроения. № 2. 2011. - С.27-31.
- 12) Кравчук А.С., Чижик С.А., Мицак Анджей. Моделирование износа защитных покрытий цилиндрических подшипников скольжения, а также шаровых опор и наконечников / APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. №5. 2014.