КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
Кафедра дифференциальных уравнений

И.Р. КАЮМОВ, Д.В. МАКЛАКОВ

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Конспект лекций

Казань – 2015

УДК 517.54
ББК 22.161.5

Принято на заседании кафедры дифференциальных уравнений
Протокол № 2 от 21 октября 2015 года

Рецензенты:
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений КФУ **И.А. Бикчантаев;**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных уравнений КФУ **Ю.В. Обносов**

Каюмов И.Р., Маклаков Д.В.
Мероморфные функции / И.Р. Каюмов, Д.В. Маклаков. – Казань: Казан. ун-т, 2015. – 40 с.

Курс посвящен изучению различных свойств целых и мероморфных функций. Мероморфные функции играют весьма существенную роль в современных исследованиях по комплексному анализу и математической физике. Хорошо известные и популярные гамма функция Эйлера и дзета функция Римана являются мероморфными функциями, поэтому обладают многими свойствами, присущими мероморфным функциям в целом. Это позволяет проводить систематические исследования таких объектов исходя из общей теории мероморфных функций, элементы которой и предлагается изложить на лекциях.

Содержание

1 Особые точки голоморфных функций

Аннотация: В данной теме приводится классификация особых точек однозначного характера аналитических функций.

Ключевые слова: Голоморфные функции, особые точки, полюс, устранимая точка, существенно особая точка.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература:

1) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.

.

Глоссарий по теме 1

Определение 1. *Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции f, если функция f голоморфна в некоторой проколотой окрестности z_0.*

Отметим, что формально любая точка голоморфности функции f является особой.

Итак, пусть z_0 – особая точка функции f. Имеют место три возможности:

1) f ограничена в проколотой окрестности точки z_0;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

3) предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Отметим, что из 1) следует существование конечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Этот факт будет доказан ниже.

В случае 1) особая точка z_0 называется устранимой особой точкой, в случае 2) – полюсом, а в случае 3) – существенно особой точкой.

Определение 2. *Вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \neq \infty$ называется интеграл*

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz,$$

Теорема 1 *Пусть z_0 — устранимая особая точка функции $f(z)$. Тогда существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Кроме того, если положить $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, то доопределенная таким образом функция будет голоморфной в точке z_0.*

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что $z_0 \neq \infty$. Поскольку функция f голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < R$, то она может быть представлена рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

причем для любого $r < R$ имеет место формула

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оценивая c_n:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}}\, |dz| =$$

$$= \frac{M}{2\pi r^n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |d\theta| = \frac{M}{r^n}$$

и устремляя r к нулю, заключаем, что $c_n = 0$ для всех отрицательных n. Последний факт означает, что в разложении Лорана функции f отсутствует главная часть, т.е. по существу функция f разлагается в ряд

Тейлора, сходящийся в проколотой окрестности точки z_0. Для завершения доказательства, доопределяем функцию f в точке z_0: $f(z_0) = c_0$. Теорема 1 доказана.

Пользуясь теоремой 1, нетрудно доказать теорему Ю.В. Сохоцкого:

Теорема 2 *Пусть a — существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Доказательство. Предположим, что существует точка $A \in \overline{\mathbb{C}}$, отделенная от $f(z)$. Если $A = \infty$, то теорема 1 говорит о том, что a – устранимая особая точка. Значит $A \neq \infty$. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A},$$

которая, очевидно, ограничена в проколотой окрестности точки f, и следовательно, по теореме 1, эта функция голоморфна в точке a. Отсюда следует, что a – устранимая особая точка функции f. Данное противоречие и доказывает теорему 2.

Полюсы могут быть охарактеризованы следующей теоремой

Теорема 3 *Точка z_0 является полюсом тогда и только тогда, когда*

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{1}$$

причем $c_{-n} \neq 0$.

Доказательство. Очевидно, что если (1) имеет место, то z_0 – полюс функции f.

Предположим, что z_0 – полюс функции f. Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{f(z)},$$

которая, в силу теоремы 1, голоморфна в некоторой окрестности точки z_0. Пусть n – порядок нуля функции g в точке z_0. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\sum_{j=n}^{\infty} a_j (z-z_0)^j} = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

где $c_{-n} = 1/a_n$.

Теорема 3 доказана.

Число n называется порядком полюса z_0.

Рассмотрим три примера:

Пример 1. $f(z) = \sin z/z$. Ясно, что особая точка $z_0 = 0$ является устранимой.

Пример 2. $f(z) = 1/(z-1)^n$. Точка $z_0 = 1$ суть полюс порядка n.

Пример 3. $f(z) = \exp(z)$. Точка $z_0 = \infty$ является существенно особой. Этот факт – прямое следствие разложения функции

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Интересно отметить, что функция из примера 3 в любой окрестности бесконечно удаленной точки принимает все значения, кроме нуля. Этот факт, в силу известной теоремы Пикара, справедлив и в общем случае: любая голоморфная функция принимает любые значения в окрестности существенно особой точки, кроме, быть может, одного.

Вычеты голоморфных функций

Наиболее важной характеристикой изолированной особой точки голоморфной функции является вычет.

Пусть $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ — изолированная особая точка функции f. Тогда существует некоторая проколотая окрестность этой точки, в которой f голоморфна. Предположим, что окружность $|z-z_0| < r$ лежит в этой окрестности

Определение 2. *Вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \neq \infty$ называется интеграл*

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz,$$

Замечание. Из теоремы Коши непосредственно следует, что определение вычета не зависит от радиуса окружности. Более того, вместо окружности можно рассматривать произвольную кривую, гомотопную окружности и лежащую в области голоморфности функции f.

Вычет на бесконечности определяется аналогично:

$$\mathrm{res}_{\infty} f = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz.$$

Отличие случаев конечной и бесконечной точки связано с тем, что границы окрестностей этих точек ориентированы противоположно друг другу, в силу чего и появляется знак минус, когда $z_0 = \infty$.

В случае когда $z_0 \in \mathbb{C}$, из теоремы Коши следует, что если функция f голоморфна в точке z_0, то вычет равен нулю в ней.

По определению, если в конечной точке z_0 разложение функции f в ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r,$$

то

$$\mathrm{res}_{z_0} f = c_{-1}.$$

В бесконечно удаленной точке вычет будет равен $-c_{-1}$.

Если z_0 – существенно особая точка, то вычет в ней может быть вычислен только при помощи разложения в ряд Лорана, либо с применением теоремы о полной сумме вычетов (см. ниже). Если же z_0 – полюс конечного порядка, то весьма полезной оказывается следующая

Теорема 4 *Предположим, что* $z_0 \in \mathbb{C}$ *– полюс порядка* n. *Тогда*

$$\mathrm{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z)\cdot(z-z_0)^n \right).$$

Доказательство. Разлагая $f(z)$ в ряд Лорана и умножая ее на $(z-z_0)^n$, имеем

$$f(z)(z-z_0)^n = \sum_{k=-n}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+k}, \quad 0 < |z-z_0| < r.$$

Последний ряд является голоморфной функцией в окрестности точки z_0. Чтобы добраться до c_{-1} достаточно продифференцировать его $(n-1)$ раз. Естественно при таком дифференцировании должен появиться множитель $(n-1)!$. Теорема доказана.

Для случая, когда $n = 1$, а функция $f(z)$ представлена в виде $\varphi(z)/\psi(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, имеет место формула:

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Сформулируем теперь основные теоремы теории вычетов.

Теорема 5 *Предположим, что функция* f *голоморфна в области* Ω *за исключением не более, чем счетного числа изолированных особых точек. Предположим также, что кривая* γ *лежит в этой области и не содержит особых точек, а кроме того ограничивает другую односвязную область* D. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = \sum_{z_k} \mathrm{res}_{z_k} f,$$

где суммирование ведется по всем особым точкам $z_k \in D$.

Доказательство легко получается из теоремы Коши путем "вырезания окружностями" особых точек.

Следствием теоремы 5 является "теорема о полной сумме вычетов".

Теорема 6 *Предположим, что функция f голоморфна в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек. Тогда полная сумма вычетов равна нулю, т.е*

$$\sum_{z_k} \operatorname{res}_{z_k} f + \operatorname{res}_\infty f = 0,$$

где суммирование ведется по всем конечным особым точкам.

Доказательство. Пусть R – такое число, что все конечные особые точки лежат в круге $|z| < R$. В силу предыдущей теоремы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\, dz = \sum_{z_k} \operatorname{res}_{z_k} f.$$

Для завершения доказательства отметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\, dz = -\operatorname{res}_\infty f.$$

Пример 1. Пусть $f(z) = 1/(z^n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Особые точки имеют вид $z_k = e^{i2\pi k/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, причем все они являются полюсами первого порядка. Поэтому

$$\operatorname{res}_{z_k} f = \frac{1}{f'(z_k)} = \frac{1}{ne^{i2\pi k(n-1)/n}} = \frac{\overline{z_k}}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Кроме того, ясно

$$\operatorname{res}_\infty f = \begin{cases} -1, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(z) = \cos(z + 1/z)$. Эта функция имеет две существенно особые точки: 0 и ∞. Поскольку $f(z)$ – четная функция, то разложение в ряд Лорана в окрестности нуля не содержит нечетных степеней, а значит $\operatorname{res}_0 f = 0$. По теореме о полной сумме вычетов, $\operatorname{res}_\infty f = 0$.

Контрольные задания по теме 1

1. Описать особые точки следующих функций

$$f(z) = \frac{1}{\cos^2 z};$$

$$f(z) = \frac{\sin(z-2)}{z^2-4};$$

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{sh} z}.$$

2. Доказать теорему Сохоцкого для предельной точки полюсов.
3. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}.$$

Доказать, что множество точек z таких, что не существует конечного предела $\lim_{r\to 1-} f(rz)$ является всюду плотным на окружности $|z| = 1$.

2 Порядок и тип целых функций

Аннотация: В данной теме описываются основные характеристики целых функций на плоскости

Ключевые слова: целые функции, порядок целой функции, тип целой функции.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: Левин Б.Я. Распределение корней целых функций, 1956.

Дополнительная литература: Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.

Глоссарий по теме 2

Определение 1. *Целой функцией называется функция $f(z)$ комплексного переменного z, аналитическая во всей плоскости.*

Определение 2. *Целую функцию f(z) называют функцией конечного порядка, если существует такое положительное конечное число k>0, что неравенство*

$$M\left(r\right) \lesssim \exp\left(r^k\right)$$

выполняется при $r > r_0\left(k\right)$, то есть при всех достаточно больших r.

Точную нижнюю границу таких чисел k называют порядком ρ целой функции $f(z)$, то есть $\rho = \inf k$.

Определение 3. *Пусть целая функция f(z) имеет порядок $\rho > 0$. Целая функция $f(z)$ имеет конечный тип, если при некотором $A > 0$*

$$M(r) \lesssim e^{Ar^{\rho}}.$$

Типом σ целой функции $f(z)$ порядка ρназывают $\inf A$ *(точную нижнюю границу положительных чисел A), для которых выполняется неравенство. Если таких чисел A нет, то функцию называют функцией максимального типа.*

Хорошо известно, что целая функция представляется всюду сходящимся степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1}$$

В силу формулы Коши-Адамара, радиус сходимости ряда (1) выражается через коэффициенты степенного разложения

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = R = \infty.$$

Если бесконечно удаленная точка – устранимая особая точка, то по теореме Лиувилля

$$f(z) \equiv c_0.$$

Если $f(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка $n \geq 1$, тогда $f(z)$ – многочлен степени n.

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n.$$

Если $f(z)$ имеет на бесконечности существенно особую точку, то она представима в виде ряда (1) и называется целой трансцендентной функцией.

Примерами целых трансцендентных функций являются:

1. Показательная функция

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

2. Тригонометрические функции

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

3. Гиперболические функции

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Эти функции являются естественным обобщением многочленов и наиболее близки к многочленам по своим свойствам. Полиномы классифицируются по их степеням, то есть по их росту при $|z| \to \infty$, причем полином равномерно растет по всем направлениям. Скорость возрастания полинома при $|z| \to \infty$ определяется его степенью. С другой стороны число корней многочлена равно его степени. Таким образом, чем больше корней у многочлена, тем больше его рост.

Эта связь между множеством корней многочлена и его ростом обобщается на произвольные целые функции. Большинство классических теорем теории целых функций устанавливают связь между распределением корней целой функции и её асимптотическим поведением при $|z| \to \infty$. Кроме того, целая функция может различно расти по разным направлениям, может убывать по одним направлениям и возрастать по другим направлениям, поэтому асимптотическое поведение целой функции при $|z| \to \infty$ значительно сложнее, чем у многочленов.

Для измерения роста целой функции и плотности множества её корней вводится особая шкала роста. Для характеристики роста целой функции вводится функция

$$M_f(r) = M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

В силу непрерывности функции $|f(z)|$ на окружности $|z| = r$ значения $M(r)$ достигаются в некоторой точке этой окружности. Из принципа максимума модуля следует, что функция $M(r)$ является монотонной, а именно строго возрастающей функцией. Действительно, пусть $0 < r_1 < r_2$ значение $M(r_1)$ достигается в некоторой точке окружности $|z| = r_1$, лежащей внутри окружности $|z| = r_2$, причем оно должно быть строго меньше, чем наибольшее значение в замкнутом круге $|z| \leq r_2$, которое достигается на окружности $|z| = r_2$. Итак, получим

$$M(r_1) < M(r_2), \quad r_1 < r_2.$$

Кроме того, в силу теоремы Лиувилля

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty.$$

Скорость возрастания функции $M(r)$ есть важнейшая характеристика поведения целой функции.

Для целой трансцендентной функции $M(r)$ растет быстрее, чем степень r с любым показателем. Действительно, пусть на некоторой последовательности концентрических окружностей с радиусами $r_k \to \infty$ $M(r)$ растет на быстрее какой-либо степени r

$$M(r_k) \leq A r_k^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Как мы знаем для коэффициентов ряда (1) имеют место неравенства Коши

$$|c_n| \leq \frac{M(r_k)}{r_k^n},$$

откуда вытекает, что

$$|c_n| \le A r_k^{m-n}. \tag{2}$$

Если теперь в (2) устремить $k \to \infty$, то получим, что $c_n = 0$, $n > m$ и, следовательно, $f(z)$ – многочлен степени не выше m.

Поэтому при оценке роста целых трансцендентных функций выбирают функции, растущие быстрее, чем степени. В качестве таких функций выбирают показательные функции вида $\exp\left(r^k\right), \quad k > 0$.

Определение 1.2. Целую функцию f(z) называют функцией конечного порядка, если существует такое положительное конечное число k>0, что неравенство

$$M(r) \lesssim \exp\left(r^k\right) \tag{3}$$

выполняется при $r > r_0(k)$, то есть при всех достаточно больших r.

Точную нижнюю границу таких чисел k называют порядком ρ целой функции $f(z)$, то есть $\rho = \inf k$. Неравенства, которые выполняются для всех достаточно больших значений r, называют асимптотическими неравенствами, их обозначают$\lesssim$. Неравенство (3) читают $M(r)$ *асимптотически меньше* $\exp\left(r^k\right)$.

Из этого определения следует, что если ρ - порядок целой функции $f(z)$, а ε - произвольное целое число, то

$$e^{r^{\rho-\varepsilon}} \lesssim M(r) \lesssim e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \tag{4}$$

причем правое неравенство выполняется асимптотически, а левое для некоторой последовательности $\{r_n\}$ значений r, стремящейся к бесконечности.

Прологарифмируем (4) дважды:

$$r^{\rho-\varepsilon} \lesssim \ln M(r) \lesssim r^{\rho+\varepsilon},$$
$$(\rho-\varepsilon)\ln r \lesssim \ln\ln M(r) \lesssim (\rho+\varepsilon)\ln r,$$

откуда

$$\rho - \varepsilon \lesssim \frac{\ln\ln M\left(r\right)}{\ln r} \lesssim \rho + \varepsilon. \tag{5}$$

Из (4) тогда следует, что

$$\rho = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M\left(r\right)}{\ln r}. \tag{6}$$

Соотношение 6 можно также принять за определение порядка целой функции $f(z)$.

Для сравнения скорости роста целых функций одного порядка вводят понятие типа.

Определение 1.3. Пусть целая функция f(z) имеет порядок $\rho > 0$. Целая функция $f(z)$ имеет конечный тип, если при некотором $A > 0$

$$M\left(r\right) \lesssim e^{Ar^{\rho}}. \tag{7}$$

Типом σ целой функции $f(z)$ порядка ρназывают $\inf A$ (точную нижнюю границу положительных чисел A), для которых выполняется (7). Если таких чисел A нет, то функцию называют функцией максимального типа.

Также, как и выше, можно получить

$$e^{(\sigma-\varepsilon)r^{\rho}} \lesssim M\left(r\right) \lesssim e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}}.$$

Логарифмируя и деля на r^{ρ}, получим

$$\sigma - \varepsilon \lesssim \frac{\ln M\left(r\right)}{r^{\rho}} \lesssim \sigma + \varepsilon,$$

и, следовательно, тип σ целой функции $f(z)$ можно определять равенством

$$\sigma = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln M\left(r\right)}{r^{\rho}}. \tag{8}$$

Определение 1.4. Если при данном $\rho > 0$, $\sigma = \infty$, то функция f(z) называется максимального типа. При $0 < \sigma < \infty$ - нормального или *среднего типа, и при $\sigma = 0$- минимального. В последнем случае верно неравенство*

$$M(r) \lesssim e^{\varepsilon r^{\rho}}.$$

Откуда, в частности получаем, что если $f(z) = e^z$, то $\rho = 1, \quad \sigma = 1$.

Контрольные задания по теме 2

1. Пусть $A > 0$, $\alpha > 0$. Положим

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n z^n)}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера.

Доказать, что

$$\rho = \frac{1}{\alpha}, \quad \sigma = A.$$

Указание. Воспользоваться формулой Стирлинга:

$$\Gamma(m+1) = \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}(1 + O(1/m)), \quad m \to \infty.$$

2. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n/\rho} z^n.$$

Доказать, что f – целая функция порядка ρ, имеющая максимальный тип.

3. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n}\right)^{n/\rho} z^n.$$

Доказать, что f – целая функция порядка ρ, имеющая минимальный тип.

4. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2} z^n.$$

Доказать, что f – целая функция, найти ее порядок и тип.

3 Рациональные и мероморфные функции на плоскости

Аннотация: В данной теме дается определение мероморфной функции, приводится классификация неподвижных точек рациональных отображений.

Ключевые слова: мероморфные функции, рациональные функции, неподвижные точки.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: Милнор Дж. Голоморфная динамика. – Ижевск, 2000, 320 с.

Дополнительная литература: Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969

Глоссарий по теме 3

Определение 1. Отношение двух многочленов называется рациональной функцией.

Определение 2. *Неподвижной точкой голоморфной функции f называется точка z_0, такая, что*

$$f(z_0) = z_0,$$

при этом число

$$\lambda = f'(z_0)$$

называется мультипликатором неподвижной точки.

Неподвижная точка называется притягивающей, если $|\lambda| < 1$, отталкивающей в случае $|\lambda| > 1$, параболической, когда $|\lambda| = 1$.

Определение 3. *Индексом неподвижной точки z_0 называется вычет*

$$I(z_0, f) := \operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{z - f(z)},$$

другими словами

$$I(z_0, f) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - f(z)} dz.$$

Определение 4. *Функция, голоморфная в $\mathbb{C}$ называется мероморфной, если все конечные особые точки изолированы и являются полюсами.*

Имеет место

Лемма 1 *Если $\lambda \neq 1$, то индекс неподвижной точки z_0 может быть вычислен по формуле*

$$I(z_0, f) = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Доказательство. Из условия $\lambda \neq 1$ следует, что z_0 является нулем первого порядка для функции $z - f(z)$. Следовательно z_0 – полюс первого порядка для функции $1/(z - f(z))$. Поэтому

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{z - f(z)} = \frac{1}{1 - f'(z_0)} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Лемма доказана.

Следующая теорема является простым следствием основной теоремы алгебры, доказанной в предыдущем параграфе.

Теорема 1 *Пусть R – рациональная функция, $R \not\equiv z$. Тогда R имеет ровно $n + 1$ неподвижную точку в $\overline{\mathbb{C}}$ с учетом кратности. Здесь $n = \deg R$ – степень рациональной функции R.*

Доказательство. Пусть

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

где p и q – несократимые многочлены. Предположим, что $n = \deg p > \deg q$. В этом случае ∞ является неподвижной точкой R. Остальные n неподвижных точек являются решениями алгебраического уравнения $p(z) = zq(z)$. То, что решений ровно n – следствие основной теоремы алгебры.

Рассмотрим теперь случай $n = \deg q \geq \deg p$. В силу основной теоремы алгебры, уравнение $p(z) = zq(z)$ имеет ровно $n+1$ решение. Отметим, что во втором случае, все неподвижные точки лежат в $\mathbb{C}$. Теорема доказана.

Теперь мы имеем возможность сформулировать и доказать весьма полезную в комплексной динамике теорему о неподвижных точках рациональных функций.

Теорема 2 *Пусть R – рациональная функция, $R \not\equiv z$, $n = \deg R$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n+1} I(z_k, f) = 1, \tag{1}$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ – неподвижные точки R.

Доказательство. Сначала предположим, что ∞ не является неподвижной точкой R, т.е. $R(\infty) \neq \infty$. Но тогда $\mathrm{res}_\infty R = -1$. Применяя теорему о полной сумме вычетов, получаем (1). Если ∞ – неподвижная точка R, то с помощью дробно–линейного отображения ее можно перевести в конечную точку, т.е. избавиться от неподвижной точки в ∞.

Имеет место

Теорема 3 *Пусть f – мероморфная функция. Если существует предел $\lim_{z\to\infty} f(z)$ (не обязательно конечный), то f – рациональная функция.*

Доказательство. Из условия теоремы сразу следует, что число особых точек функции f конечно и все они являются полюсами. Вычтем из функции f все главные части соответствующих рядов Лорана. Полученная функция будет голоморфной функцией в $\overline{\mathbb{C}}$. В силу теоремы Сохоцкого эта функция обязана быть константой. Отсюда заключаем, что функция f является рациональной функцией (ввиду того, что главные части рядов Лорана в полюсах имеют конечное число членов).

Рассмотрим два распространенных примера:

Пример 1. Пусть $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ – гамма функция Эйлера. Ввиду особенности в нуле, интеграл сходится при $\Re z > 0$. Продолжим функцию $\Gamma(z)$ аналитически следующим образом:

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = \int\limits_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int\limits_1^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Очевидно, что все особенности функции Γ вошли в первый интеграл, поскольку областью сходимости второго интеграла является вся плоскость. Разложим функцию e^z под первым интегралом и проинтегрируем почленно:

$$\int\limits_0^1 t^{z-1}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k}{k!}dt = \sum_{k=0}^\infty \int\limits_0^1 t^{z-1}\frac{(-t)^k}{k!}dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(z+k)}.$$

Отсюда видно, что функция гамма–функция Эйлера имеет полюсы с центрами в точках $z_k = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, вычеты в которых равны $(-1)^k/k!$.

Пример 2. ζ – функция Римана изначально определяется в полуплоскости $\Re s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}.$$

Хорошо известно, что эта функция может быть продолжена на всю плоскость. Покажем, например, как осуществить ее продолжение на полуплоскость $\Re s > 0$. Для этого рассмотрим

$$\left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n+1)^s} - \frac{1}{(2n)^s}\right).$$

Последний ряд является голоморфной в области $\Re s > 0$ функцией.

Из этого представления видно, что точка $s = 1$ является полюсом первого порядка ζ – функции. Следует отметить, что других конечных особенностей эта функция не имеет. Найдем вычет ζ функции в точке $s = 1$. Имеем

$$\mathrm{res}_1\zeta = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right)\lim_{s\to 1}\frac{s-1}{(1-2^{1-s})} = 1.$$

Контрольные задания по теме 3

1. Пусть $f(z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k$, причем $a_2 \neq 0$. Доказать, что индекс неподвижной точки 0 равен a_3/a_2^2.

2. Доказать, что неподвижная точка a рационального отображения f с мультипликатором $\lambda \neq 1$ является притягивающей тогда и только тогда, когда ее индекс удовлетворяет неравенству $\Re I(a, f) > 1/2$.

3. Предположим, что рациональное отображение имеет степень $d \geq 2$. Доказать, что такое отображение имеет либо отталкивающую неподвижную точку, либо параболическую неподвижную точку, для которой $\lambda = 1$, либо неподвижные точки обоих типов.

4 Разложение мероморфных функций на простые дроби

Аннотация: В данной теме приводятся теоремы о разложении рациональных функций на простые дроби, а также исследуется вопрос о разложении целых функций в бесконечные произведения.

Ключевые слова: рациональные функции, целые функции, бесконечные произведения.

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература: 1) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.

Дополнительная литература: С.М.Львовский. Лекции по комплексному анализу. 2-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2009. 136 с

Глоссарий по теме 4

Определение. *Число $A \neq 0$ называется бесконечным произведением чисел c_j, если*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} c_j = A.$$

Хорошо известно, что любая рациональная функция может быть представлена как сумма некоторого многочлена и некоторой линейной комбинации простых дробей вида $P_k[(z-a_k)^{-1}]$, где a_k – нули знаменателя рациональной функции, а P_k – некоторый многочлен степени равной порядку нуля знаменателя a_k. Аналогичный результат имеет место и для мероморфных функций.

Имеет место теорема, доказанная Миттаг–Леффлером

Теорема 1 *Для любой последовательности конечных точек* $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *и последовательности функций* g_n *вида*

$$g_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{c_k^n}{(z-a_n)^k},$$

существует мероморфная функция f *с полюсами в точках* a_n *и только в них, такая, что главная часть ряда Лорана в точке* a_n *совпадает с* g_n *для любого натурального* n.

Доказательство. Имеется соблазн сразу построить такую функцию, например, так:

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z).$$

Проблема заключается в том, что ряд φ может быть расходящимся в каждой точке комплексной плоскости. Чтобы обойти эту трудность, из g_n нужно вычесть многочлены, что позволит получить мероморфную функцию с заданными свойствами.

Без ограничения общности, считаем, что $a_n \neq 0$ и что точки a_n занумерованы так, что $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, $n \in \mathbb{N}$.

Через B_n обозначим круг с центром в 0 и радиусом $|a_n|/2$. Ввиду того, что функция g_n голоморфна в круге $|z| < |a_n|$, то в круге B_n функцию g_n можно равномерно приблизить многочленом Тейлора

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{m_n} \frac{g_n^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

Число m_n подберем так, чтобы для всех $z \in B_n$ выполнялось неравенство

$$|g_n(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Положим теперь

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n)$$

и покажем, что ряд f сходится равномерно на любом компакте K. Для этого погрузим заданный компакт K в круг B_n (такой круг найдется в силу условия $a_n \to \infty$). В компакт K попадет лишь конечное число точек a_k, остальные будут лежать вне его. Равномерная сходимость ряда f на K обеспечена условием (1) и теоремой Вейерштрасса об абсолютной сходимости рядов.

Осталось отметить, что по построению главные части рядов Лорана в особых точках a_n совпадают с g_n.

Теорема доказана.

Важным следствием является

Теорема 2 *Любая мероморфная функция f может быть представлена в виде ряда*

$$f = h + \sum_{n=1}^{\infty} (g_n - P_n), \tag{2}$$

сходящегося равномерно на произвольном компакте. Здесь h – целая функция, g_n – главные части рядов Лорана в особых точках f, P_n – некоторые многочлены.

Теорема Миттаг – Леффлера представляет, главным образом, теоретический интерес. На практике часто применяется другая теорема (меньшей общности, но позволяющая контролировать степени многочленов P_n).

Теорема 3 *Пусть дана система окружностей $\gamma_n = \{z : |z| = r_n\}$ с возрастающими к бесконечности радиусами r_n. Если мероморфная функция f на всех γ_n удовлетворяет условию $|f(z)| \le C|z|^m$ для некоторых констант C и m, то в разложении (2) можно считать, P_n и h суть многочлены степени не выше m.*

Пример 1. Разложим рациональную функцию

$$f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$$

на простые дроби. Особыми точками являются точки вещественной оси $a_n = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем все они – полюсы второго порядка. Главные части ряда Лорана в этих точках имеют вид:

$$g_n(z) = \frac{1}{(z - \pi n)^2}.$$

Отметим, что ряд из главных частей

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi n)^2}$$

сходится равномерно на любом компакте комплексной плоскости.

Нетрудно показать, что функция $f(z)$ ограничена на окружностях радиуса $\pi n + \pi/2$. Отсюда следует, что к функции f можно применить теорему 3 с $m = 0$. Следовательно,

$$f(z) = A + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi n)^2},$$

где

$$A = \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi n)^2} \right) = \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} \right) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - \pi n)^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Разложение целых функций в бесконечное произведение.

По аналогии с разложением мероморфных функций на простые дроби, может быть построена теория разложения целых функций на линейные множители.

Имеет место теорема Вейерштрасса:

Теорема 4 *Для любой последовательности конечных точек* $a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ *существует целая функция* f *с нулями в точках* a_k *(и только в них), причем порядок нуля в точках* a_k *равен числу повторений* a_k *в этой последовательности.*

Следствием этого результата является теорема о разложении целой функции в бесконечное произведение.

Теорема 5 *Произвольная целая функция может быть представлена в виде:*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \exp\left[\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right], \qquad (3)$$

где m *– порядок нуля функции* f*, а числа* p_n *подобраны так, чтобы ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n+1}$$

равномерно сходился в любом круге $|z| \le R$*.*

Замечание. Можно считать, что, например, p_n есть целая часть числа $\ln n$.

Для практических приложений весьма полезна теорема, доказанная Адамаром:

Теорема 6 *Предположим, что* f *– целая функция конечного порядка* ρ*. Тогда в ее разложении Вейерштрасса (3) можно положить* $p_n = [\rho]$*, а в качестве* g *взять полином степени не выше* ρ*. Здесь* $[\rho]$ *– целая часть числа* ρ*.*

Пример 2. Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Очевидно, что для нее $\rho = 1$. Отсюда, в силу теоремы 6, следует, что

$$\frac{\sin z}{z} = e^{az+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Устремляя z к нулю и пользуясь первым замечательным пределом, отсюда получаем, что $b = 0$. С другой стороны функции $f(z)$ и бесконечное произведение являются четными, откуда сразу следует, что таковой является и функция $\exp(az)$. А это возможно лишь в в том случае, когда $a = 0$. Таким образом,

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 n^2}\right).$$

Контрольные задания по теме 4

1. Разложить $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ на простые дроби.

Указание. Проинтегрировать разложение для функции

$$\frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1}{z^2}$$

по любому пути, не проходящему через нули $\sin z$.

2. Доказать, что дзета функция Римана в правой полуплоскости $\Re s > 1$ может быть разложена в бесконечное произведение:

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

где произведение берется по всем простым числам p.

Указание. Каждый член в произведении представить как геометрическую прогрессию, а затем раскрыть скобки.

3. Доказать, что дзета функция Римана не имеет нулей в полуплоскости $\Re s > 1$.

4. Доказать, что гамма функция Эйлера может быть разложена в бесконечное произведение:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+1/n)^z}{1+z/n}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots.$$

Указание. Сначала обосновать формулу Эйлера–Гаусса:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} n^z \frac{(n-1)!}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}.$$

5. Доказать формулу дополнения:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

6. Доказать формулу Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n) e^{-z/n},$$

где C – постоянная Эйлера:

$$C = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,5772\ldots$$

5 Характеристика Неванлинны и ее свойства

Аннотация: В данной теме исследуется характеристика Неванлинны мероморфных функций.

Ключевые слова: характеристика Неванлинны, формула Пуассона – Иенсена

Методические рекомендации по изучению темы.

Вначале необходимо изучить лекционный материал с определениями основных понятий. После этого следует ответить на контрольные вопросы. Ответы нужно оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю. При решении задач, представленных в теме, необходимо опираться на изученный лекционный материал. Решение задач необходимо оформить отдельным файлом и отправить на проверку преподавателю.

Источники информации:

Основная литература:

Хейман У.К. Мероморфные функции. М., "Мир" , 1966, 287 с

Дополнительная литература:

Steinmetz, N. Rational iteration: complex analytic dynamical systems, de Gruyter Studies in Mathematics Vol. 16, de Gruyter, Berlin, New York 1993

Глоссарий по теме 5

Определение 1. *Произведением Бляшке называется функция*

$$B(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z}, \tag{1}$$

где λ *– натуральное число,* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– последовательность комплексных чисел из* $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Определение 2. *Характеристическая функция Неванлинны определяется так:*

$$T(R, f) = m(R, f) + N(R, f),$$

где
$$m(R,f)=\int_0^{2\pi}\ln^+|f(Re^{it})|dt,$$
где $\ln^+ a=\ln a$ *при* $a>1$, $\ln^+ a=0$ *при* $a<1$,
$$N(R,f)=\int_0^R \frac{n(t,f)}{t}dt,$$
где $n(t,f)$ *– число полюсов функции* $f(z)$ *в круге* $|z|\le t$.

Для построения мероморфных функций с заданными нулями и полюсами весьма полезными оказываются произведения Бляшке.

Основные свойства произведения Бляшке основаны на том, что функция
$$g_a(z)=\frac{z+a}{1+\overline{a}z}$$
является конформным автоморфизмом круга $\mathbb{D}$. Естественно, что произведение счетного числа такого вида отображений также будет ограниченной аналитической функцией в круге (в том случае, когда соответствующее произведение сходится). Напомним также, что сходимость бесконечного произведения понимается как предел частичных произведений, причем этот предел должен быть отличен от нуля.

Далее будем предполагать, что последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ упорядочена по возрастанию модулей.

Теорема 1 *Бесконечное произведение (1) является аналитической и ограниченной в круге функцией в том и только в том случае, когда*
$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty. \tag{2}$$

Важным примером использования свойств произведения Бляшке является рациональная функция с заданными нулями и полюсами, лежащими в круге:
$$\varphi(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{z-b_k}{1-\overline{b_k}z}\Big/\prod_{k=1}^{m}\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z},$$

где все числа a_k, b_j лежат в круге $|z| < 1$. Функция φ обладает замечательным свойством: $|\varphi(z)|$ при $|z| = 1$.

Нам еще понадобится формула Пуассона – Иенсена.

Теорема 2 *Пусть функция f является мероморфной. Обозначим через $a_1, a_2, \cdots, a_m$ нули функции f, а через $b_1, b_2, \cdots, b_m$ – полюсы функции f, лежащие в круге $|z| < R$. Тогда, если нуль не особая точка f, то*

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})| \frac{(R^2 - r^2)dt}{R^2 - Rr\cos(\theta - t) + r^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \ln\left|\frac{R(z - a_k)}{R^2 - \overline{a_k}z}\right| - \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{R(z - b_k)}{R^2 - \overline{b_k}z}\right|, \quad z = re^{i\theta}.$$

Доказательство нетрудно получить из формулы Пуассона. Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$. Положим

$$g(z) = f(z)\prod_{k=1}^{n} \frac{z - b_k}{1 - \overline{b_k}z} / \prod_{k=1}^{m} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}$$

и заметим, что в силу свойств произведения Бляшке $|f(z)| = |g(z)| = 1$ на окружности $|z| = R$

В силу того, что функция $\ln|g(z)|$ гармонична в круге $|z| \leq 1$, по формуле Пуассона

$$\ln|g(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{it})| \frac{(R^2 - r^2)dt}{R^2 - Rr\cos(\theta - t) + r^2},$$

откуда вытекает, что

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{it})| \frac{(R^2 - r^2)dt}{R^2 - Rr\cos(\theta - t) + r^2} +$$

$$\ln\left|\prod_{k=1}^{n} \frac{z - b_k}{1 - \overline{b_k}z} / \prod_{k=1}^{m} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z}\right|.$$

Теорема доказана.

Величина $m(R,f)$ является усредненной величиной $\ln|f|$ на тех дугах окружности, где значение функции $|f|$ велико.

Первая основная теорема Неванлинны может быть сформулирована так:

Теорема 3 *Пусть a – произвольное комплексное число. Тогда*

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R,f) - \ln|f(0)-a| + \varepsilon(a,R),$$

причем имеет место оценка

$$|\varepsilon(a,R)| \leq \ln^+ a + \ln 2.$$

Доказательство. По определению,

$$m\left(R, \frac{1}{f-a}\right) + N\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T\left(R, \frac{1}{f-a}\right)$$

Из формулы Пуассона – Иенсена следует, что

$$T\left(R, \frac{1}{f-a}\right) = T(R, f-a) - \ln|f(0)-a|.$$

Осталось показать, что

$$|T(R,f-a) - T(R,f)| \leq \ln^+|a| + \ln 2. \tag{3}$$

Ввиду того, что структура полюсов функций f и $f-a$ одинакова, $N(R,f) = N(R,f-a)$. Поэтому, для доказательства (3) нужно обосновать неравенство

$$|m(R,f-a) - m(R,f)| \leq \ln^+|a| + \ln 2,$$

которое легко вытекает из следующего неравенства:

$$\ln^+|u+v| \leq \ln^+|u| + \ln^+|v| + \ln 2, \quad u,v \in \mathbb{C}.$$

Последнее неравенство нетрудно доказывается путем последовательного разбора случаев: $|u| \leq (\geq) 1, |v| \leq (\geq) 1$.

Имеет место

Теорема 4 *Характеристика Неванлинны $T(r,f)$ является выпуклой функцией от $\ln r$.*

Контрольные задания по теме 5

Предположим, что p и q – натуральные числа и

$$f(z) = \frac{z^p + a_1 \cdots + a_p}{z^q + b_1 \cdots + b_q}.$$

1. Доказать, что если $p > q$, то

$$T(r,f) = p \ln r + O(1), \quad r \to +\infty.$$

2. Доказать, что если $p < q$, то

$$T(r,f) = q \ln r + O(1), \quad r \to +\infty.$$

3. Пусть $f(z) = e^z$. Найти $T(r,f)$.

4. Предположим, что $f = e^P$, где $P(z) = az^p + a_{p-1}z^{p-1} + \cdots + a_0$. Показать, что

$$T(r,f) \sim \frac{|a|}{\pi} r^p \quad \text{при } r \to +\infty.$$

5. Предположим, что $f = \exp(e^z)$. Показать, что

$$T(r,f) \sim \frac{\exp(r)}{\sqrt{2\pi^3 r}} \quad \text{при } r \to +\infty.$$

6. Пусть a, b, c, d – комплексные числа такие, что $ad - bc \neq 0$. Положим

$$g(z) = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}.$$

Доказать, что если $f(0) \neq \infty$ и $g(0) \neq \infty$, то

$$T(r,f) = T(g,f) + O(1) \quad \text{при } r \to +\infty.$$

7. Предположим, что функция f голоморфна в круге $|z| \leq r$. Тогда имеют место неравенства:

$$T(r,f) \leq \ln^+ M(r,f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R,f), \quad r < R.$$

6 Информационные источники

Основная литература:

1) Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969, 576 с.

2) С.М.Львовский. Лекции по комплексному анализу. 2-е изд., стереотип. М.: МЦНМО, 2009. 136 с

3) Хейман У.К. Мероморфные функции. М., "Мир" , 1966, 287 с

4) Милнор Дж. Голоморфная динамика. – Ижевск, 2000, 320 с.

5) Левин Б.Я. Распределение корней целых функций, 1956.

Дополнительная литература:

Steinmetz, N. Rational iteration: complex analytic dynamical systems, de Gruyter Studies in Mathematics Vol. 16, de Gruyter, Berlin, New York 1993

7 Глоссарий

Особая точка. Точка z_0 называется изолированной особой точкой функции f, если функция f голоморфна в некоторой проколотой окрестности z_0.

Отметим, что формально любая точка голоморфности функции f является особой.

Итак, пусть z_0 – особая точка функции f. Имеют место три возможности:

1) f ограничена в проколотой окрестности точки z_0;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

3) предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Отметим, что из 1) следует существование конечного предела $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Этот факт будет доказан ниже.

В случае 1) особая точка z_0 называется устранимой особой точкой, в случае 2) – полюсом, а в случае 3) – существенно особой точкой.

Вычет. Вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \neq \infty$ называется интеграл

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz,$$

Целая функция. Целой функцией называется функция $f(z)$ комплексного переменного z, аналитическая во всей плоскости.

Порядок целой функции. Целую функцию f(z) называют функцией конечного порядка, если существует такое положительное конечное число k>0, что неравенство

$$M(r) \lesssim \exp\left(r^k\right)$$

выполняется при $r > r_0(k)$, то есть при всех достаточно больших r.

Точную нижнюю границу таких чисел k называют порядком ρ целой функции $f(z)$, то есть $\rho = \inf k$.

Тип целой функции. Пусть целая функция f(z) имеет порядок $\rho > 0$. Целая функция $f(z)$ имеет конечный тип, если при некотором $A > 0$

$$M(r) \lesssim e^{Ar^\rho}.$$

Типом σ целой функции $f(z)$ порядка ρназывают $\inf A$ (точную нижнюю границу положительных чисел A), для которых выполняется неравенство. Если таких чисел A нет, то функцию называют функцией максимального типа.

Рациональная функция. Отношение двух многочленов называется рациональной функцией.

Неподвижная точка. Неподвижной точкой голоморфной функции f называется точка z_0, такая, что

$$f(z_0) = z_0,$$

при этом число

$$\lambda = f'(z_0)$$

называется мультипликатором неподвижной точки.

Неподвижная точка называется притягивающей, если $|\lambda| < 1$, отталкивающей в случае $|\lambda| > 1$, параболической, когда $|\lambda| = 1$.

Индекс неподвижной точки. Индексом неподвижной точки z_0 называется вычет

$$I(z_0, f) := \operatorname{res}_{z_0} \frac{1}{z - f(z)},$$

другими словами

$$I(z_0, f) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{1}{z - f(z)} dz.$$

Мероморфная функция. Функция, голоморфная в $\mathbb{C}$ называется мероморфной, если все конечные особые точки изолированы и являются полюсами.

Бесконечное произведение. Число $A \neq 0$ называется бесконечным произведением чисел c_j, если

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} c_j = A.$$

Произведение Бляшке. Произведением Бляшке называется функция

$$B(z) = z^\lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|z_k|}{z_k} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z},$$

где λ – натуральное число, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел из $\mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Характеристическая функция Неванлинны определяется так:

$$T(R, f) = m(R, f) + N(R, f),$$

где

$$m(R, f) = \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(Re^{it})| dt,$$

где $\ln^+ a = \ln a$ при $a > 1$, $\ln^+ a = 0$ при $a < 1$,

$$N(R, f) = \int_0^R \frac{n(t, f)}{t} dt,$$

где $n(t, f)$ – число полюсов функции $f(z)$ в круге $|z| \le t$.

8 Вопросы к экзамену

Билет №1. Классификация особых точек аналитических функций.

Билет №2. Теорема Коши о вычетах. Теорема о полной сумме вычетов.

Билет №3. Целые функции. Порядок и тип.

Билет №4. Теорема Вейерштрасса о существовании целых функций с заданными нулями.

Билет №5. Связь между ростом целой функции и распределением ее нулей. Теоремы Адамара.

Билет №6. Примеры мероморфных функций. Гамма функция Эйлера и дзета функция Римана.

Билет №7. Теорема о представлении функции, имеющей конечное число полюсов.

Билет №8. Разложение мероморфной функции на простые дроби. Теорема Миттаг-Леффлера о разложении мероморфных функций.

Билет №9. Теорема о разложение мероморфной функции специального типа на простые дроби. .

Билет №10. Представление мероморфных функций с помощью канонических произведений.

Билет №11. Формула Пуассона - Иенсена и ее следствия.

Билет №12. Характеристическая функция и дефект мероморфной функции.

Билет №13. Основная теорема Неванлинны о характеристической функции.

Билет №14. Формулировка и приложения второй теоремы Неванлинны.

Билет №15. Разложение дзета функции Римана в бесконечное произведение.

последняя страница

Конспект лекций

Каюмов Ильгиз Рифатович, **Маклаков** Дмитрий Владимирович

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Дизайн обложки
М.А. Ахметов

Подписано в печать 14.09.2013.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. .
Тираж экз. Заказ

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28