МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И.
ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Специальность: 010100 — математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(бакалаврская работа)

# ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, ДОПУСКАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ АБЕЛЯ

**Работа завершена:**
Студент 05–104 группы математического отделения
____________ 2015 г. ____________ (В.В. Елисеева)

**Работа допущена к защите:**
Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент
____________ 2015 г. ____________ (В.В. Шурыгин)
Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
____________ 2015 г. ____________ (А.М. Елизаров)

Казань — 2015

# 1 Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений возник как научное направление в работах Софуса Ли. Первоначальная основная задача группового анализа — вопрос о разрешимости в квадратурах дифференциальных уравнений — была практически решена самим Ли, но не нашла широкого применения. Интерес к групповому анализу возродил Л.В.Овсянников, показав, что описание свойств дифференциальных уравнений при помощи допускаемых групп обнаруживает свою силу не только в вопросах о полной разрешимости, но и при построении отдельных классов точных решений и качественном исследовании дифференциальных уравнений механики и математической физики. Групповой анализ является действенным инструментом при решении вышеперечисленных задач.

Уравнением Абеля называется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, кубическое по зависимой переменной. Нахождению различных классов этих уравнений, интегрируемых в квадратурах, посвящен ряд работ, например, [1, 2, 3, 8]. Целью настоящей дипломной работы является построение классов уравнений Абеля, допускающих группы преобразований с оператором заданного вида. Каждое такое уравнение может быть проинтегрировано в квадратурах.

## 2 Однопараметрические группы преобразований

Будем рассматривать однопараметрическое семейство $\{T_a\}$ преобразований пространства $\mathbb{R}^n$

$$\overline{x} = f(x, a), \tag{1}$$

где $a$ — вещественный параметр, изменяющийся в некотором интервале $\Delta \subset \mathbb{R}$. Будем также предполагать, что $T_0 = \mathrm{id}$ (тождественное преобразование) и что $T_a \neq \mathrm{id}$ для всех остальных $a \in \Delta$. Кроме того, будем считать, что семейство $\{T_a\}$ вместе с каждым преобразованием содержит обратное к нему, причем ${T_a}^{-1} = T_{-a}$. Наконец, будем предполагать, что композиция любых двух преобразований $T_a$ и $T_b$ снова принадлежит рассматриваемому семейству, причем

$$T_b \circ T_a = T_{a+b}.$$

**Определение.** Такое семейство преобразований называется *однопараметрической группой преобразований.*

Разложим функцию $f(x, a)$ в ряд Тейлора по параметру $a$ в окрестности точки $a = 0$. Поскольку $T_0 = id$, имеем $f(x, 0) = x$. Обозначим $X(x) = \frac{\partial f(x,a)}{\partial a}|_{a=0}$. Тогда

$$\overline{x} = x + X(x) \cdot a + o(a).$$

**Определение.** Дифференциальное уравнение первого порядка с начальным условием

$$\frac{df}{dt} = X(f), \qquad f|_{a=0} = x \tag{2}$$

называется *уравнением Ли.*

**Определение.** Векторное поле $X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ называется *инфинитезимальным оператором* (или просто *оператором*) группы преобразований (1).

**Определение.** Функция $J(x)$ называется *инвариантом* группы преобразований (1), если для всех допустимых значений $x$ и $a$ выполняется

$$J(\overline{x}) = J(f(x, a)) = J(x).$$

**Теорема. [4]** *Функция $J(x)$ является инвариантом тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению*

$$XJ = X^1(x)\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + X^n(x)\frac{\partial}{\partial x^n} = 0. \tag{3}$$

Критерий инвариантности (3) представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка. Поэтому любая однопараметрическая группа преобразований в $\mathbb{R}^n$ имеет $n-1$ функционально независимых инвариантов. При этом любой другой инвариант этой группы есть функция от этих $(n-1)$ «базисных» инвариантов. В качестве такого базиса можно выбрать левые части первых интегралов $J_1(x) = C_1, \ldots, J_{n-1}(x) = C_{n-1}$ характеристической системы уравнения (3):

$$\frac{dx^1}{X^1} = \frac{dx^2}{X^2} = \ldots = \frac{dx^n}{X^n}. \tag{4}$$

**Теорема.** **[4]** *Всякая однопараметрическая группа $G$ преобразований $\overline{x} = f(x, a)$ невырожденной заменой переменных $x^{i'} = x^{i'}(x^k)$ может быть приведена к группе переносов вдоль оси $x^{n'}$.*

Для доказательства достаточно выбрать в качестве функций $x^{i'}$, $i' = 1, \ldots, n-1$, любые $n-1$ функционально независимых инвариантов $J_1, \ldots, J_{n-1}$, а функцию $x^{n'}$ найти из условия $X(x^{n'}) = 1$.

Система функций

$$x^{1'} = J_1(x),\ \ldots,\ x^{n-1'} = J_{n-1}(x),\ x^{n'} = x^{n'}(x^i)$$

определяет искомую замену переменных. Векторное поле $X$ в этих координатах имеет вид $X = \frac{\partial}{\partial x^{n'}}$, то есть, определяет группу переносов вдоль оси $x^{n'}$.

**Определение.** Будем говорить,что дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0$$

*допускает данную группу преобразований*, если под действием каждого преобразования из этой группы, уравнение переходит в равносильное уравнение того же вида.

Саму группу будем называть *допускаемой*, и ее оператор тоже будем называть *допускаемым*. Заметим, что допускаемый оператор существенен с точностью до постоянного множителя [4].

Знание допускаемой группы позволяет проинтегрировать уравнение первого порядка. Действительно, имеет место следующая теорема.

**Теорема.** **[5]** Уравнение

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0 \tag{5}$$

допускает группу с оператором

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

тогда и только тогда, когда функция

$$\mu = \frac{1}{\xi Q - \eta P}$$

является интегрирующим множителем уравнения (5).

Помимо использования интегрирующего множителя, решить уравнение $y' = f(x,y)$, допускающее группу преобразований с оператором (7), можно следующим образом.

Приведем этот оператор к группе переносов, то есть, сделаем замену переменных

$$x, y \to z, t$$

из условий

$$X(z) = 0, \quad X(t) = 1.$$

Тогда в переменных $(z,t)$ оператор $X$ примет вид $\dfrac{\partial}{\partial t}$, а уравнение $y' = f(x,y)$ перейдет в уравнение $z' = g(z)$ или $t' = h(z)$ в зависимости от того, какую из переменных $z, t$ выбрать в качестве новой функции. В любом случае мы придем к уравнению в разделяющихся переменных.

**Пример.**

Уравнение

$$y' = \frac{x^2 y}{x^3 + y^2} \tag{6}$$

допускает оператор

$$X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}.$$

Для его решения запишем уравнение в симметричной форме

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{y^2} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

После интегрирования,получаем:

$$\ln x = \ln y + C \Longrightarrow \frac{y}{x} = C.$$

Первый интеграл есть

$$z = \frac{y}{x}.$$

Аналогично, ищем $t$ из условия

$$X(t) = 1,$$

то есть

$$xy\frac{\partial t}{\partial x} + y^2\frac{\partial t}{\partial y} = 1.$$

Будем искать решение в виде $t = t(y)$. Ведь достаточно найти хотя бы одно решение. Тогда уравнение примет вид

$$y^2\frac{dt}{dx} = 1 \Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{y^2}.$$

Отсюда

$$t = -\frac{1}{y}.$$

Следовательно, нужная замена переменных имеет вид:

$$t = -\frac{1}{y}, \quad z = \frac{y}{x}.$$

Выразим $x$, $y$ через $z$, $t$:

$$y = -\frac{1}{t}, \quad x = -\frac{1}{tz}.$$

Подставляем их в формулу (6):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{d\left(\frac{1}{tz}\right)} = \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{d\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt} = \frac{z}{1+tz^3},$$

Получаем

$$\frac{d\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{-\frac{1}{t^2}dt} = \frac{1+tz^3}{z} \Longrightarrow -t\cdot\left(\frac{1}{z}\right)' + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} + tz^2.$$

$$-t\cdot\left(\frac{1}{z}\right)' = tz^2 \Longrightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}, \quad u = \frac{1}{z}.$$

Посчитаем интеграл

$$\int u^2 dz = -\int dt \Longrightarrow \frac{u^3}{3} = -t + C.$$

Отсюда

$$\frac{1}{3z^3} = -t + C.$$

Подставляем значения $z$ и $t$, получаем:

$$\frac{x^3}{3 \cdot y^3} = \frac{1}{y} + C.$$

Это и есть решение уравнения (6).

Для решения задач нам потребуется продолжить действие оператора

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \tag{7}$$

на первую производную $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$. Формула продолжения имеет следующий вид [4, 5, 9]:

$$\zeta_1 = D_x(\eta) - \dot{y} D_x(\xi) = \eta_x + \dot{y}\eta_y - \dot{y}(\xi_x + \dot{y}\xi_y),$$

а первое продолжение оператора $X$ есть

$$X^{(1)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \dot{y}} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2 \xi_y) \frac{\partial}{\partial \dot{y}}. \tag{8}$$

Здесь $\dot{y}$ обозначает переменную, соответствующую производной $y'$ (см. [4]).

## 3 Уравнения Абеля и допускаемые ими группы преобразований

Уравнением Абеля называется обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, кубическое по зависимой переменной:

$$y' = a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x). \tag{9}$$

Мы будем считать, что $a(x) \not\equiv 0$, так как в противном случае уравнение Абеля превращается в уравнение Риккати.

В настоящей главе мы будем решать следующую задачу: когда это уравнение допускает некоторые заданные группы преобразований.

Оператор группы мы будем обозначать

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

В нашей работе мы ограничимся случаями, когда $\xi$ — функция только от переменной $x$, а $\eta$ — многочлен от переменной $y$.

Эту задачу мы каждый раз будем решать следующим методом: найдем первое продолжение оператора $X$:

$$X^{(1)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2 \xi_y) \frac{\partial}{\partial \dot{y}}. \tag{10}$$

Далее запишем определяющее уравнение

$$X^{(1)}(F)|_{F=0} = 0, \tag{11}$$

где

$$F = \dot{y} - (a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x)).$$

В рассматриваемых нами случаях левая часть определяющего уравнения будет представлять собой многочлен относительно $y$. Действительно, первое продолжение принимает вид

$$X^{(1)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x)) \frac{\partial}{\partial \dot{y}},$$

и тогда

$$\begin{aligned} X^{(1)}(\dot{y} - (a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x))) &= \\ = (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x)) - \eta(3a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x)) &- \\ - \xi(a'(x)y^3 + b'(x)y^2 + c'(x)y + d'(x)). \end{aligned}$$

Подставив $\dot{y} = a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x)$ и приравняв полученное выражение к нулю, мы получим, что определяющее уравнение действительно является полиномиальным относительно $y$. Приравняв нулю все коэффициенты этого уравнения, мы получим систему уравнений на неизвестные коэффициенты оператора $X$, которую будем пытаться решить.

### 3.1 Случай $\xi = f(x)$, $\eta = 0$.

Оператор $X$ имеет вид

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{12}$$

Посчитаем его продолжение на первые производные. По формуле (10) имеем

$$X^{(1)} = f(x)\frac{\partial}{\partial x} - f'(x)\dot{y}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Определяющее уравнение имеет вид:

$$X^{(1)}F = 0|_{F=0},$$

где

$$F = \dot{y} - a(x)y^3 - b(x)y^2 - c(x)y - d(x).$$

Подставим этот оператор в это уравнение. Получим:

$$\begin{aligned} &- f(x)\big(a'(x)y^3 + b'(x)y^2 + c'(x)y + d'(x)\big) - \\ &\qquad\qquad - f'(x)\big(a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x)\big) = 0. \end{aligned}$$

Соберем все коэффициенты при степенях $y$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x)a'(x) + f'(x)a(x) = 0, \\ f(x)b'(x) + f'(x)b(x) = 0, \\ f(x)c'(x) + f'(x)c(x) = 0, \\ f(x)d'(x) + f'(x)d(x) = 0. \end{cases}$$

Из нее следует, что

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = -\frac{f'}{f}. \tag{13}$$

Решим одно из уравнений:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{a'}{a}.$$

Отсюда, решением этого уравнения является, например, функция

$$f = \frac{1}{a}$$

(заметим, что оператор $X$ существенен с точностью до постоянного множителя, а функция $a \neq 0$).

Таким образом, условие (13) является необходимым для того, чтобы оператор вида

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$$

допускался данным уравнением. С другой стороны, оно, очевидно, является и достаточным условием.

Из системы уравнений (13) выразим все функции $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ через $a(x)$. Возьмем первое уравнение:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}.$$

Из него следует, что

$$\ln a(x) = \ln b(x) + k_1.$$

Отсюда

$$b(x) = k_1 a(x),$$

где $k_1 = \mathrm{const}$. Аналогично, из остальных уравнений получаем:

$$c(x) = k_2 a(x), \quad d(x) = k_3 a(x).$$

Отсюда следует, что уравнение Абеля будет иметь вид:

$$y' = a(x)(y^3 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3),$$

где $k_1$,$k_2$, $k_3 \in \mathbb{R}$.

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{y^3 + k_1 y^2 + k_2 y + k_3} = a(x)dx,$$

решение которого можно получить стандартным методом.

Таким образом, мы доказали следующее

**Предложение 1.** *Уравнение Абеля* (9) *допускает группу преобразований с оператором вида* (12) *тогда и только тогда, когда оно является уравнением с разделяющимися переменными.*

## 3.2 Случай $\xi = 0$, $\eta = f(x)$.

Пусть теперь оператор $X$ имеет вид

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{14}$$

Его продолжение есть

$$X^{(1)} = f(x)\frac{\partial}{\partial y} + f'(x)\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Определяющее уравнение (11) примет вид:

$$-f(x)\big(3y^2a(x) + 2yb(x) + c(x)\big) + f'(x) = 0.$$

Соберем все коэффициенты при степенях $y$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -3f(x)a(x) = 0; \\ -2f(x)b(x) = 0; \\ -f(x)c(x) = 0; \\ f'(x) = 0. \end{cases}$$

Поскольку $a(x) \neq 0$, отсюда следует, что необходимо, чтобы $f(x) = 0$. Мы доказали

**Предложение 2.** *Уравнение Абеля* (9) *не допускает ненулевых операторов вида* (14).

## 3.3 Случай $\xi = 0$, $\eta = f(x)y$.

Теперь рассмотрим случай, когда оператор группы имеет вид

$$X = f(x)y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{15}$$

Его продолжение на первые производные имеет вид:

$$X^{(1)} = yf(x)\frac{\partial}{\partial y} + (yf'(x) + \dot{y}f(x))\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Запишем определяющее уравнение (11), вычислив выражение в левой части:

$$\begin{aligned} &- yf(x)\big(3a(x)y^2 + 2yb(x) + c(x)\big) + yf'(x)+ \\ &\qquad\qquad + f(x)\big(a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x)\big) = 0. \end{aligned}$$

Соберем все коэффициенты при степенях $y$ и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2f(x)a(x) = 0; \\ -f(x)b(x) = 0; \\ f'(x) = 0; \\ f(x)d(x) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы, как и в п. 3.2 получаем, что $f(x) = 0$.

**Предложение 3.** *Уравнение Абеля* (9) *не допускает ненулевых операторов вида* (15).

Первые три рассмотренных нами случая оказываются не очень интересными. Перейдем к более содержательным случаям.

### 3.4 Случай $\xi = f(x)$, $\eta = g(x)$.

В этом параграфе мы ответим на вопрос когда уравнение (9) допускает оператор вида

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + g(x)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{16}$$

где $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$.

Первое продолжение оператора $X$ принимает вид

$$X^{(1)} = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + g(x)\frac{\partial}{\partial y} + (g'(x) - f'(x)\dot{y})\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Запишем определяющее уравнение (11)

$$-f(x)\big(a'(x)y^3 + b'(x)y^2 + c'(x)y + d'(x)\big) - g(x)\big(3y^2a(x) + 2yb(x) + \\ + c(x)\big) + g'(x) - f'(x)\big(a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x)\big) = 0.$$

Собрав все коэффициенты при степенях $y$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -f(x)a'(x) - f'(x)a(x) = 0; \\ -f(x)b'(x) - 3g(x)a(x) - f'(x)b(x) = 0; \\ -f(x)c'(x) - 2g(x)b(x) - f'(x)c(x) = 0; \\ -f(x)d'(x) - g(x)c(x) + g'(x) - f'(x)d(x) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$f(x)a'(x) + f'(x)a(x) = 0.$$

Его левая часть есть полный дифференциал:

$$\frac{d(f(x)a(x))}{d(x)} = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = \frac{k}{a} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{ka'}{a^2}.$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ существенны с точностью до постоянного множителя, можно взять $k = 1$. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{a(x)}. \tag{18}$$

Подставив это во второе уравнение системы, получаем:

$$g = \frac{a'b - b'a}{3a^3}. \tag{19}$$

Найденные $f(x)$ и $g(x)$ подставим в третье и четвертое уравнения системы.

Преобразуем третье уравнение,

$$-\frac{1}{a}c' - \frac{2b}{3a^3}(a'b - b'a) + c\frac{a'}{a^2} = 0.$$

Домножим это выражение на $3a^3$ и приведем подобные слагаемые, получим уравнение:

$$3a(ca' - c'a) + 2b(b'a - ba') = 0.$$

Перейдем к преобразованию четвертого уравнения.

$$-\frac{1}{a}d' - \frac{c}{3a^3}(a'b - b'a) + \frac{1}{3a^6}\big(a^3(a''b - ab'') + 3a^2a'(ab' - a'b)\big) + d\frac{a'}{a^2} = 0.$$

Далее, домножим это выражение на $3a^4$ и приведем подобные слагаемые, получим следующее уравнение:

$$(ab' - a'b)(3a' + ca) + a(a''b - ab'') + 3a^2(da' - ad') = 0.$$

Таким образом, мы приходим к системе из двух уравнений на коэффициенты уравнения Абеля:

$$\begin{cases} 3a(ca' - c'a) + 2b(b'a - ba') = 0, \\ (ab' - a'b)(3a' + ca) + a(a''b - ab'') + 3a^2(da' - ad') = 0; \end{cases} \tag{20}$$

Эти равенства представляют собой необходимое условие для того, чтобы уравнение (9) допускало оператор вида (16). С другой стороны, поскольку

$f$ и $g$ находятся из первых двух уравнений системы (17) однозначно, эти условия являются и достаточными. Таким образом, получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Равенства* (20) *будут необходимыми и достаточными условиями для существования решения у системы* (17)*, а, следовательно, и для существования у уравнения* (9) *оператора вида* (16)*.*

Заметим, что из системы (20) из первого равенства можно найти $c(x)$. Действительно,

$$3a(ca' - c'a) + 2b(b'a - a'b) = 0.$$

Разделим это уравнение на $a^3$, получим:

$$3\frac{ca' - c'a}{a^2} + \frac{2b}{a}\frac{(b'a - a'b)}{a^2} = 0.$$

Перепишем его в виде

$$3\left(\frac{c}{a}\right)' - 2\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}\right)' = 0.$$

Проинтегрируем последнее уравнение. Тогда получим:

$$3\frac{c}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + C_1.$$

Из этого следует, что

$$c = \frac{b^2}{3a} + C_1 a. \tag{21}$$

Далее, зная $c(x)$, можно подставить его во второе равенство (20) и получить уравнение на $d(x)$:

$$(ab' - a'b)\left(3a' + \frac{b^2}{3} + C_1 a^2\right) + a(a''b - ab'') + 3a^2(da' - ad') = 0.$$

Его решением будет служить функция:

$$d(x) = \frac{1}{3}C_1 b + C_2 a - \frac{1}{27}\frac{9ab' - 9ba' - b^3}{a^2}. \tag{22}$$

Это означает, что при заданных $a(x)$ и $b(x)$ мы получим семейство уравнений Абеля, допускающих оператор (16), где $f(x)$ и $g(x)$ заданы формулами (18) и (19). Это семейство зависит от двух функций $a(x) \neq 0$, и $b(x)$, а также от двух произвольных постоянных $C_1, C_2$.

**Пример.**

Пусть $a = 1$, $b = x^2 + x$.

Выберем функции $c(x)$ и $d(x)$ из (21) и (22), взяв постоянные $C_1$ и $C_2$ нулями. Тогда

$$c = \frac{(x^2 + x)^2}{3}.$$

Далее, из выражения (22) найдем $d(x)$:

$$d(x) = \frac{1}{27}x^6 + \frac{1}{9}x^5 + \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{27}x^3.$$

Решим соответствующее уравнение Абеля (9) :

$$y' = y^3 + (x^2 + x)y^2 + \frac{(x^2 + x)^2}{3}y + \frac{1}{27}x^6 + \frac{1}{9}x^5 + \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{27}x^3. \tag{23}$$

Сделаем замену:

$$x, y \to z, t$$

с учетом условий $X(t) = 0$, $X(z) = 1$. Имеем:

$$\frac{\partial t}{\partial x} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Отсюда,

$$dx = -\frac{dy}{\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}}.$$

Получаем:

$$y = t - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x^2.$$

С учетом второго условия имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{3}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Можно искать $z$ в виде $z = z(x)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1.$$

Отсюда выберем

$$z = x.$$

Выразим функции $x$ и $y$ через $t$ и $z$. Тогда замена переменных примет вид:

$$x = z, \quad y = t - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}z^2.$$

Подставляем эти переменные в уравнение (23).

Сначала посчитаем производную $y'$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(t - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}z^2)}{dz} = \frac{dt}{dz} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2z}{3}\right).$$

Подставляя все остальное, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{3} + t^3.$$

Окончательное решение примет вид:

$$-\frac{\ln(\sqrt[3]{9}t^2 - \sqrt[3]{3}t + 1)}{2\sqrt[3]{3}} + \frac{\ln(\sqrt[3]{3}t + 1)}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[6]{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2\sqrt[3]{3}t - 1}{\sqrt{3}}\right) = z + C.$$

Сделав обратную подстановку $t = y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^2, z = x$, получим решение уравнения (23) в переменных $x, y$.

### 3.5 Случай $\xi = f(x)$, $\eta = yg(x)$.

Теперь исследуем вопрос, когда уравнение Абеля допускает оператор вида

$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + yg(x)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{24}$$

где

$$g(x) \neq 0,$$

т.к. случай $g(x) = 0$ рассмотрен в п. 3.2.

Посчитаем его продолжение на первые производные. Имеем

$$X^{(1)} = f\frac{\partial}{\partial x} + yg\frac{\partial}{\partial y} + (yg' + \dot{y}(g - f'))\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Определяющее уравнение имеет вид:

$$-f(a'y^3 + b'y^2 + c'y + d') - yg(3ay^2 + 2by + c) + \\ + yg' + (ay^3 + by^2 + cy + d)(g - f') = 0.$$

Соберем все коэффициенты при степенях $y$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} fa' + af' + 2ga = 0; \\ fb' + bf' + bg = 0; \\ fc' + cf' - g' = 0; \\ fd' + df' - dg = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Из третьего уравнения получим:

$$(cf)' = g',$$

откуда

$$f = \frac{g+k}{c}, \tag{26}$$

где $k = \mathrm{const}$ (будем пока считать, что $c \neq 0$).

Далее, из первого и второго уравнений системы исключим $f'$, домножив первое уравнение на $b$, второе на $a$, затем вычтем из первого уравнения второе. В результате придем к равенству

$$fa'b + gab - fb'a = 0. \tag{27}$$

Из этого следует, что

$$f = -\frac{gab}{a'b - b'a}, \tag{28}$$

при условии, что $a'b - b'a \neq 0$.

Далее, приравняем (26) и (28), откуда найдем функцию $g$:

$$\frac{g+k}{c} = -\frac{gab}{a'b - b'a}. \tag{29}$$

Отсюда

$$g = \frac{k(b'a - a'b)}{a'b - b'a + cab}.$$

Для того, чтобы найти $f$, подставим $g$ в (26), получим:

$$f = \frac{k}{c} + \frac{k}{c}\left(\frac{b'a - a'b}{a'b - b'a + cab}\right).$$

Возьмем $k = 1$. Тогда функции $f$ и $g$ будут иметь вид:

$$g = \frac{b'a - a'b}{a'b - b'a + cab} \tag{30}$$

и

$$f = \frac{ab}{a'b - b'a + cab}. \tag{31}$$

при условии, что $a'b - b'a + cab \neq 0$.

Далее, подставим $f$ и $g$ в третье уравнение системы. После преобразований получим:

$$c'ab^2a' - c'a^2bb' + ca'^2b^2 - ca^2b'^2 - cab^2a' + \\ + ca^2bb'' + a'^2b^2 - 2a'bab' + a'b^2ca + a^2b'^2 - a^2b'cb = 0. \tag{32}$$

Затем, подставим функции $f$ и $g$ в четвертое уравнение системы:

$$b(abd'a' - a^2d'b' + a^2bd'c + 2da'^2b - daba''+ \\ + da^2b'' - da^2bc' - 2da'ab' + da'bca - da^2b'c) = 0.$$

Заметим, что $b \neq 0$, так как иначе $a'b - b'a = 0$. Поэтому на $b$ можно сократить:

$$abd'a' - a^2d'b' + a^2bd'c + 2da'^2b - daba''+ \\ + da^2b'' - da^2bc' - 2da'ab' + da'bca - da^2b'c = 0. \quad (33)$$

Таким образом, мы получили необходимые условия для существования решения $f$, $g$. С другой стороны, так как функции $f$ и $g$ находятся из системы (25) однозначно, они являются достаточными.

**Теорема 2.** *При условии выполнения неравенств* $a'b - b'a \neq 0$ *и* $a'b - b'a + cab \neq 0$*, уравнения* (32) *и* (33) *являются необходимыми и достаточными условиями для существования у уравнения* (9) *допускаемого оператора вида* (24).

Далее, рассмотрим случай, когда $k = 0$.

Если $k = 0$, тогда из (26) следует, что

$$f = \frac{g}{c}. \quad (34)$$

Далее, из первого и второго уравнений системы (25) исключим $f'$, домножив первое уравнение на $b$, второе на $a$, затем вычтем из первого уравнения второе. Получим:

$$f = \frac{gab}{b'a - a'b}, \quad (35)$$

при условии, что $b'a - a'b \neq 0$.

Далее, приравняем (34) и (35), откуда найдем функцию $g$:

$$\frac{g}{c} = \frac{gab}{b'a - a'b}.$$

Отсюда,

$$g(b'a - a'b - cab) = 0.$$

Получаем, что $b'a - a'b - cab = 0$. Этот случай не будем рассматривать.

Рассмотрим теперь случай, когда $a'b - b'a = 0$.

Из уравнения (29) следует, что $gab = 0$ ( иначе функции $g$ не существует). Так как $a \neq 0$, тогда получаем $b = 0$. Тогда система (25) будет иметь вид:

$$\begin{cases} fa' + af' + 2ga = 0; \\ fc' + cf' - g' = 0; \\ fd' + df' - dg = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что $(cf)' = g'$. Отсюда находим

$$f = \frac{g+k}{c}, \quad k = \text{const}. \tag{36}$$

Из первого и третьего уравнений исключим $f'$. Домножим первое уравнение на $d$, второе на $a$, затем вычтем из первого уравнения третье.

Получаем

$$a'fd + 3gad - d'fa = 0,$$

откуда

$$f = \frac{3gad}{d'a - a'd}. \tag{37}$$

Приравниваем выражения (36) и (37) :

$$\frac{g+k}{c} = \frac{3gad}{d'a - a'd}.$$

Отсюда получаем:

$$g = \frac{k(a'd - d'a)}{d'a - a'd - 3adc}, \tag{38}$$

где $d'a - a'd - 3adc \neq 0$.

Функцию $g$ из (38) подставляем в формулу (37) и находим функцию $f$:

$$f = \frac{-3kad}{d'a - a'd - 3adc}. \tag{39}$$

Выберем $k = 1$. Подставим (39) и (38) в третье уравнение системы. Отбросив знаменатель получим уравнение:

$$\begin{multline} -12d(2a^2d'^2 - ad'a'd - 3a^2d'dc - a^2dd''+ \\ + ad^2a'' + 3a^2d^2c' - a'^2d^2 - d'^2a^2 + 2a'dd'a- \\ - a'^2d^2 + 3a^2dd'c - 3ad^2a'c). \end{multline} \tag{40}$$

**Теорема 3.** *Уравнение Абеля* $y' = ay^3 + cy + d$, *для которого* $a'd - d'a \neq 0$ *и* $d'a - a'd - 3adc \neq 0$, *допускает оператор вида* (24) *тогда и только тогда, когда выполняется соотношение* (40).

Рассмотрим подслучай, когда $d'a - a'd = 0$. Так как $a \neq 0$, тогда $d = 0$. То есть имеем $d = 0, b = 0$.

Тогда система (25) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} fa' + af' + 2ga = 0; \\ fc' + cf' - g' = 0. \end{cases}$$

Исключим из уравнений системы $f'$. Домножим первое уравнение системы на $c$, второе уравнение — на $a$ и вычтем из первого уравнения второе.

Получаем:

$$fa'c + 2gac - fc'a + g'a = 0.$$

Отсюда

$$f = -\frac{2gac + g'a}{a'c - c'a} \tag{41}$$

Из второго уравнения системы следует, что $(cf)' = g'$. Отсюда находим

$$f = \frac{g + k}{c}, \quad k = \text{const}. \tag{42}$$

Приравниваем выражения (41) и (42):

$$g' + g\left(\frac{a'c - c'a + 2ac^2}{ac}\right) = -k\left(\frac{a'c - c'a}{ac}\right)$$

Отсюда получаем функцию $g$:

$$g = \left(k\int \frac{c'a - a'c}{c^2} e^{2\int cdx} dx + C_1\right) \frac{c}{a} e^{-2\int cdx}.$$

Вывод: уравнение Абеля $y' = ay^3 + cy$ при условии $a'c - c'a \neq 0$ всегда допускает оператор вида (24).

Если же и коэффициент $c$ обращается в нуль, то уравнение Абеля (9) примет вид:

$$y' = a(x)y^3.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое решается стандартным образом.

Вернемся к системе (25) и рассмотрим случай $c = 0$ отдельно от всех выше изложенных случаев.

Система (25) примет вид:

$$\begin{cases} fa' + af' + 2ga = 0; \\ fb' + bf' + bg = 0; \\ g' = 0; \\ fd' + df' - dg = 0. \end{cases} \tag{43}$$

Из третьего уравнения системы следует, что $g = \mathrm{const}$. Возьмем $g = 1$.

Тогда система (43) примет вид:

$$\begin{cases} fa' + af' + 2a = 0; \\ fb' + bf' + b = 0; \\ fd' + df' - d = 0. \end{cases} \tag{44}$$

Далее, из первого и второго уравнений исключим $f'$. Домножим первое уравнение на $b$, второе уравнение на $a$ и вычтем их.

Тем самым получим:

$$fa'b + ab - fb'a = 0.$$

Отсюда

$$f = \frac{ab}{b'a - a'b}, \quad a'b - b'a \neq 0.$$

Подставим функцию $f$ во второе уравнение, получим:

$$ba(3ab'^2 - 3b'ba' - bab'' + b^2a'') = 0.$$

Далее, подставим функцию $f$ в третье уравнение:

$$b(d'a^2b' - d'aba' - 2dba'^2 - da^2b'' + dbaa'' + 2dab'a') = 0.$$

Эти равенства представляют собой необходимое и достаточное условия для того, чтобы уравнение $y' = ay^3 + by^2 + d$ допускало оператор вида (24).

**Пример.**

$$a = x,\ b = 2,\ c = \frac{1}{x},\ d = \frac{1}{x^2}.$$

Тогда уравнение Абеля (9) примет вид:

$$y' = xy^3 + 2y^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{x^2}. \tag{45}$$

Из равенств (31) и (30) находим функции $f$ и $g$:

$$f = \frac{x}{2}, \quad g = -\frac{1}{2}.$$

Избавимся от знаменателя, умножив $f$ и $g$ на 2:

$$f = x, \quad g = -1.$$

Тогда оператор примет вид:

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Сделаем замену:

$$x, y \to z, t$$

с учетом условий $X(t) = 0$, $X(z) = 1$.

Имеем:

$$x\frac{\partial t}{\partial x} - y\frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}.$$

Откуда следует, что

$$xy = t.$$

С учетом второго условия $X(z) = 1$, получаем:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Можно искать $z$ в виде $z = z(x)$.

Тогда можно выбрать

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

откуда следует, что

$$\frac{dx}{x} = dz.$$

Отсюда

$$x = e^z.$$

Тем самым получили замену переменных:

$$x = e^z, \quad y = \frac{t}{e^z}.$$

Подставляем найденную замену в уравнение Абеля (45).

Сначала посчитаем производную $y'$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{t}{e^t}\right)}{d(e^z)} = \frac{1}{e^{2z}}\frac{dt}{dz} - \frac{t}{e^{2z}}.$$

После замены переменных, получаем:

$$\frac{1}{e^{2z}}\frac{dt}{dz} - \frac{t}{e^{2z}} = \frac{t^3}{e^{2z}} + \frac{2t^2}{e^{2z}} + \frac{t}{e^{2z}} + \frac{1}{e^{2z}}.$$

Умножим левую и правую части на $e^{2z}$, чтобы избавиться от знаменателя.

Получаем уравнение:
$$\frac{dt}{dz} = t^3 + 2t^2 + 2t + 1.$$
Интегрируя это уравнение с разделяющимися переменными, получаем решение:
$$\ln\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2t+1)\right) = z + C,$$
где $C = \text{const}$.

Сделав обратную замену $t = xy, z = \ln x$, получим решение уравнения (45) в переменных $x$, $y$.

### 3.6 Случай $\xi = f(x)$, $\eta = yg(x) + h(x)$.

Наконец, рассмотрим случай, когда оператор имеет вид
$$X = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + (yg(x) + h(x))\frac{\partial}{\partial y}, \tag{46}$$
где $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, $h(x) \neq 0$.

Посчитаем его продолжение на первые производные. Имеем
$$\zeta_1 = \eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2 = yg'(x) + h'(x) + \dot{y}(g(x) - f'(x))\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$
Отсюда
$$\begin{aligned} X^{(1)} = f(x)\frac{\partial}{\partial x} + (yg(x) + h(x))\frac{\partial}{\partial y} + (g'(x)y + h'(x) + \\ + (a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x)))(g(x) - f'(x)). \end{aligned}$$
Определяющее уравнение примет вид:
$$\begin{aligned} - f(x)(a'(x)y^3 + b'(x)y^2 + c'(x)y + d'(x)) - \\ - (h(x) + yg(x))(3a(x)y^2 + 2b(x)y + c(x)) + yg'(x) + h'(x) + \\ + (a(x)y^3 + b(x)y^2 + c(x)y + d(x))(g(x) - f'(x)). \end{aligned}$$

Собрав все коэффициенты при степенях $y$, получаем систему уравнений:
$$\begin{cases} -f(x)a'(x) - 2g(x)a(x) - a(x)f'(x) = 0; \\ -f(x)b'(x) - 3h(x)a(x) - b(x)g(x) - b(x)f'(x) = 0; \\ -f'(x)c(x) - 2h(x)b(x) + g'(x) - c(x)f'(x) = 0; \\ -f(x)d'(x) - h(x)c(x) + h'(x) + g(x)d(x) - d(x)f'(x) = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Из первого и второго уравнений системы выразим функции $g(x)$ и $h(x)$:

$$g = -\frac{fa' + af'}{2a}, \quad h = -\frac{fb' + bg + bf'}{3a}. \tag{48}$$

Далее, подставим эти функции в третье и четвертое уравнения системы (47).

Третье уравнение примет вид:

$$3a^2 f'' + f'(12ca^2 - 2b^2 a + 3aa') + f(-4bb'a + 2b^2 a' + 3aa'' - 3a'^2) = 0. \tag{49}$$

После преобразования четвертое уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} &- a^2 b f'' + f'(ca^2 b - 3a^2 b' + 2aba' - 9da^3) \\ &+ f(-6d'a^3 + 2ca^2 b' - caba' - 2a^2 b'' + 3ab'a' + aba'' - 2ba'^2 - 3da^2 a') = 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Из третьего уравнения находим

$$f(x) = c_1 M + c_2 N,$$

где

$$M = e^{\int k(x)dx}, \quad N = M \int e^{-\int k(x)dx} dx = M \int \frac{dx}{M},$$

$$k(x) = -2c + \frac{2b^2}{3a} - \frac{a'}{a}.$$

Вычислим производные этих функций:

$$M' = k(x)M, \quad N' = k(x)M \int \frac{dx}{M} + 1. \tag{51}$$

Исключим вторую производную $f''$ из уравнений (49)–(50). Домножим уравнение (49) на $b$, уравнение (50) на 3 и сложим эти выражения. Получим уравнение

$$\begin{aligned} &f'(-27da^3 + 9ba'a - 9b'a^2 + 9ca^2 b - 2b^3 a) + \\ &\quad f(-18d'a^3 - 9da^2 a' - 9ba'^2 + 9b'aa' + 6baa'' - 6b''a^2 - 3caba' + \\ &\qquad + 6ca^2 b + 6bc'a^2 + 2b^3 a' - 4b^2 b'a) = 0. \end{aligned} \tag{52}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} T &= -27da^3 + 9ba'a - 9b'a^2 + 9ca^2 b - 2b^3 a, \\ S &= -18d'a^3 - 9da^2 a' - 9ba'^2 + 9b'aa' + 6baa'' - 6b''a^2 - \\ &\qquad -3caba' + 6ca^2 b' + 6bc'a^2 + 2b^3 a' - 4b^2 b'a. \end{aligned} \tag{53}$$

Заметим, что выражение $T' - \dfrac{3}{2}S$ будет иметь вид:

$$-\frac{135}{2}da^2a' - \frac{45}{2}b'aa' + \frac{45}{2}ba'^2 + \frac{45}{2}abca' - 5a'b^3. \qquad (54)$$

В свою очередь выражение (54) можно переписать в виде:

$$\frac{5}{2}\frac{a'}{a}T.$$

Следовательно, справедливо соотношение:

$$S = \frac{2}{3}T' - \frac{5}{3}\frac{a'}{a}T. \qquad (55)$$

Подставим полученные выражения для $f$ и $f'$ в уравнение (52). Тогда оно примет вид:

$$(c_1M' + c_2N')T + (c_1M + c_2N)S = 0.$$

Подставим в уравнение (52) функции $M$, $N$, $M'$, $N'$ и вынесем константы $c_1, c_2$ за скобки. Тогда уравнение (52) примет следующий вид:

$$c_1(kMT + MS) + c_2\,(T + kTN + NS) = 0. \qquad (56)$$

Введем обозначения для удобства

$$U = kMT + MS, \quad V = T + kTN + NS.$$

Следовательно, наше уравнение будет иметь вид:

$$c_1U + c_2V = 0,$$

где $c_1$, $c_2$ — некоторые постоянные. Такое равенство означает, что функции $U$ и $V$ линейно зависимы. Это равносильно тому, что их отношение

$$\frac{V}{U} = \text{const}. \qquad (57)$$

Запишем уравнение (57) в виде $V = cU$ и подставим вместо $U$ и $V$ их значения

Получим, что

$$T + NS + kTN = c(kMT + MS). \qquad (58)$$

Получаем

$$T + SM\int\frac{dx}{M} + kMT\int\frac{dx}{M} = c(kMT + MS). \qquad (59)$$

Преобразуя уравнение (58), получим
$$T + N(S + kT) = cM(kT + S).$$
Отсюда
$$\frac{T}{S + kT} = cM - N. \tag{60}$$
Обозначим
$$P = \frac{T}{S + kT}.$$
Продифференцируем равенство (60), используя (51).

Получим, что
$$P' = cM' - N' = ckM - kN - 1 = k(cM - N) - 1.$$
Из этого следует, что
$$P' = kP - 1. \tag{61}$$
Последнее выражение является необходимым условием для того, чтобы уравнение Абеля допускало оператор вида (46).

**Предложение 4.** *Необходимым условием для того, чтобы уравнение Абеля* (9) *допускало оператор вида* (46), *является выполнение равенства* (61).

Рассмотрим частный случай $T = 0$. Тогда из соотношения (55) с очевидностью следует, что $S = 0$. В этом случае уравнение (52) выполнено тождественно.

Выразим из первого уравнения (53) функцию $d(x)$, получим:
$$d = \frac{9ba'a - 9b'a^2 + 9ca^2b - 2b^3a}{27a^3}. \tag{62}$$
Значит, уравнения, для которых $T = S = 0$, обязательно удовлетворяют условию (62). Подставим функции $d$, $g$, $h$ из формул (62) и (48) в третье и четвертое уравнение системы (47). После преобразований, выясняется, что получаются два одинаковых уравнения, совпадающие с уравнением (49). Поскольку последнее уравнение всегда имеет решение $f(x)$, то по нему можно построить функции $g(x)$ и $h(x)$ по формулам (48). Следовательно, получаем следующее утверждение.

**Предложение 5.** *Уравнение Абеля* (9), *для которого коэффициент* $d$ *удовлетворяет равенству* (62), *всегда допускает оператор вида* (46).

## 3.7 Об одном уравнении из справочника Камке

Рассмотрим уравнение вида:

$$x^{2n+1}y' = ay^3 + bx^{3n}, \quad a \neq 0,\ b \neq 0. \tag{63}$$

В справочнике Камке [7] оно указано под номером 1.188.

В настоящем параграфе мы найдем допускаемый им оператор. Тем самым, мы предложим путь к его решению, отличный от указанного в справочнике.

Попытаемся подобрать допускаемый им оператор в виде

$$X = \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

где

$$\eta = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_k y^k$$

— многочлен от $y$ с коэффициентами $a_i = a_i(x)$.

Первое продолжение этого оператора имеет вид:

$$X^{(1)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + (\eta_x + \dot{y}(\eta_y - \xi_x) - \dot{y}^2\xi_y)\frac{\partial}{\partial \dot{y}} = \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta_x\frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \dot{y}\eta_y\frac{\partial}{\partial \dot{y}}.$$

Запишем определяющее уравнение

$$\eta_x - \eta\frac{3ay^2}{x^{2n+1}} + \eta_y\frac{ay^3 + bx^{3n}}{x^{2n+1}} = 0.$$

Приведем его к общему знаменателю:

$$x^{2n+1}\eta_x - 3ay^2\eta + (ay^3 + bx^{3n})\eta_y = 0. \tag{64}$$

Заметим, что левая часть уравнения есть многочлен от $y$. Наибольшая степень $y$, входящая в это уравнение, есть $y^{k+2}$. Коэффициент при ней равен

$$-3aa_k + kaa_k.$$

Поскольку все коэффициенты должны обратиться в нуль, отсюда следует, что $k = 3$.

Таким образом, $\eta$ будет иметь вид

$$\eta = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 + s(x)y^3. \tag{65}$$

Подставим (65) в уравнение (64) и получим выражение:

$$x^{2n+1}(p' + q'y + r'y^2 + s'y^3) - 3ay^2(p + qy + ry^2 + sy^3) + \\ + (ay^3 + bx^{3n})(q + 2ry + 3sy^2) = 0.$$

Далее, разложим последнее уравнение по степеням $y$ и получим:

$$\begin{aligned} y^5 &: \ -3as + 3as = 0 \\ y^4 &: \ -3ar + 2ar = 0 \\ y^3 &: \ x^{2n+1}s' - 3aq + aq = 0 \\ y^2 &: \ x^{2n+1}r' - 3ap + 3sbx^{3n} = 0 \\ y &: \ x^{2n+1}q' + 2rbx^{3n} = 0 \\ y^0 &: \ x^{2n+1}p' + qbx^{3n} = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения системы сразу получаем, что:

$$r = 0.$$

(по условию, $a \neq 0$)

Из пятого уравнения тогда следует, что

$$x^{2n+1}q' = 0,$$

откуда

$$q' = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \text{const}.$$

Возьмем $q = 1$.

Из шестого уравнения найдем $p$:

$$x^{2n+1}p' + bx^{3n} = 0.$$

Отсюда получаем, что при $n \neq 0$

$$p = -\frac{bx^n}{n}.$$

Далее, из третьего уравнения получаем, что

$$s' = \frac{2a}{x^{2n+1}},$$

откуда

$$s = -\frac{a}{x^{2n}n}.$$

Тогда и четвертое уравнение обращается в верное равенство:

$$0 + 3\frac{abx^n}{n} - 3\frac{abx^n}{n} = 0.$$

Итак, уравнение (63) допускает оператор вида

$$X = \left(y - \frac{b}{n}x^n - \frac{ay^3}{nx^{2n}}\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Следовательно, если записать уравнение (63) в дифференциалах

$$dy = \frac{ay^3 + bx^{3n}}{x^{2n+1}}dx,$$

то оно будет допускать интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\xi Q - \eta P},$$

где $Q = -\left(\frac{ay^3 + bx^{3n}}{x^{2n+1}}\right)$, $P = -1$.

Отсюда получаем, что интегрирующий множитель равен

$$\mu = \frac{1}{\left(y - \frac{b}{n}x^n - \frac{ay^3}{nx^{2n}}\right)} = \frac{nx^{2n}}{nyx^{2n} - bx^{3n} - ay^3}.$$

При $n = 0$ уравнение (63) примет вид:

$$y' = \frac{ay^3}{x} + \frac{b}{x}.$$

Снова попытаемся подобрать допускаемый им оператор в виде

$$X = \eta\frac{\partial}{\partial y},$$

где

$$\eta = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_k y^k$$

— многочлен от $y$ с коэффициентами $a_i = a_i(x)$.

Запишем определяющее уравнение

$$\eta_x - \eta\frac{3ay^2}{x} + \eta_y\frac{ay^3 + bx}{x} = 0.$$

Приведем его к общему знаменателю:

$$x\eta_x - 3ay^2\eta + (ay^3 + b)\eta_y = 0. \qquad (66)$$

Наибольшая степень $y$, входящая в это уравнение, есть $y^{k+2}$. Коэффициент при ней равен

$$-3aa_k + kaa_k.$$

Поскольку все коэффициенты должны обратиться в нуль, отсюда следует, что $k = 3$.

Таким образом, $\eta$ снова будет иметь вид

$$\eta = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 + s(x)y^3. \tag{67}$$

Подставим (67) в уравнение (66) и получим выражение:

$$x(p' + q'y + r'y^2 + s'y^3) - 3ay^2(p + qy + ry^2 + sy^3)+ \\ + (ay^3 + b)(q + 2ry + 3sy^2) = 0.$$

Далее, разложим последнее равенство по степеням $y$ и получим:

$$\begin{aligned} y^5 &: \ -3as + 3as = 0 \\ y^4 &: \ -3ar + 2ar = 0 \\ y^3 &: \ xs' - 3aq + aq = 0 \\ y^2 &: \ xr' - 3ap + 3sb = 0 \\ y &: \ xq' + 2rb = 0 \\ y^0 &: \ xp' + qb = 0. \end{aligned}$$

Первое уравнение системы обращается в верное равенство. Из второго уравнения системы получаем:

$$r = 0.$$

Из пятого уравнения системы видим, что

$$q' = 0 \quad \Rightarrow \quad q = \text{const}.$$

Предположим, что $q \neq 0$, тогда выберем $q = 1$. Далее, из третьего уравнения получим:

$$s' = \frac{2a}{x} \quad \Rightarrow \quad s = 2a \ln x + c_1,$$

где $c_1 = \text{const}$. Из шестого уравнения системы получаем:

$$p' = \frac{b}{x} \quad \Rightarrow \quad p = -b \ln x + c_2,$$

где $c_2 = \text{const}$.

Осталось четвертое уравнение. Из него следует, что

$$ap = bs.$$

Подставляя все найденные значения функции, получаем:

$$a(-b\ln x + c_2) = b(2a\ln x + c_1).$$

Отсюда

$$3ab\ln x + bc_1 - ac_2 = 0,$$

что невозможно, ибо $ab \neq 0$.

Следовательно, остается единственная возможность:

$$q = 0.$$

Тогда из третьего и шестого уравнений получим

$$s' = 0, \quad p' = 0.$$

Отсюда,

$$s = c_1, \quad p = c_2.$$

Возьмем

$$s = a, \quad p = b,$$

чтобы выполнялось равенство $ap = bs$. Тогда $\eta$ будет иметь следующий вид:

$$\eta = ay^3 + b.$$

# 4 Заключение

В дипломной работе решены следующие задачи:

1. Показано, что уравнение Абеля не может допускать группу преобразований с операторами вида $f(x)\frac{\partial}{\partial y}$ и $yf(x)\frac{\partial}{\partial y}$.

2. Указаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы уравнение Абеля допускало группу преобразований с операторами вида $f(x)\frac{\partial}{\partial x} + g(x)\frac{\partial}{\partial y}$ и $f(x)\frac{\partial}{\partial x} + yg(x)\frac{\partial}{\partial y}$.

3. Указаны необходимые условия для того, чтобы уравнение Абеля допускало группу преобразований с оператором вида $f(x)\frac{\partial}{\partial x}+(yg(x)+h(x))\frac{\partial}{\partial y}$. Выделен подслучай, в котором такой оператор всегда существует.

4. Приведены различные примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

5. Для уравнения 1.188 из справочника Камке найден допускаемый им оператор. Тем самым предложен новый способ его решения.

# Список литературы


[1] V. M. Boyko, *Symmetry, Equivalence and Integrable Classes of Abel Equations*, `arXiv:nlin/0404020v2 [nlin.SI]`, 2005.

[2] J. F. Carñena, J. de Lucas, M. F. Rañada, *A geometric approach to integrability of Abel differential equations*, // Int. J. Theor. Phys., Vol. 50, 2114–2124, 2011.

[3] E.S. Cheb-Terrab, A.D. Roche, *Abel ODEs: Equivalence and Integrable Classes*, Computer Physics Communications. 01/2000; DOI: 10.1016/S0010-4655(00)00042-4, `arXiv:math-ph/0001037`, 2000.

[4] Н.Х. Ибрагимов. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983.

[5] Н.Х. Ибрагимов. *Азбука группового анализа.* – М.: Знание. – 1989. – 48 с.

[6] Н.Х. Ибрагимов. *Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования.* – Н.Новгород: Изд-во ННГУ – 2007. – 421 с.

[7] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука: Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. – 576 с.

[8] D. E. Panayotounakos, T. I. Zarmpoutis, *Construction of Exact Parametric or Closed Form Solutions of Some Unsolvable Classes of Nonlinear ODEs (Abel's Nonlinear ODEs of the First Kind and Relative Degenerate Equations)* // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Volume 2011 (2011), Article ID 387429, 13 pages.

[9] В.В. Шурыгин. *Групповой анализ дифференциальных уравнений* (учебно-методическое пособие). – Казань: Изд-во КПФУ. – 2010. – 55 с.

# Содержание