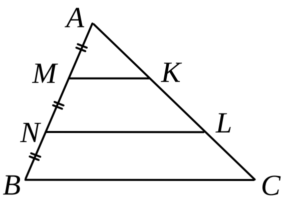
Решения задач олимпиады Фридлендера, 2014

Задача 1. Точки M и N делят сторону AB треугольника ABC на три равные части. Через них проведены прямые, параллельные стороне BC. Они делят треугольник на 3 части. Какую долю от площади исходного треугольника составляет средняя часть?

Ответ. Площадь средней части составляет 1/3 от площади исходного треугольника.

Решение. Обозначим площадь треугольника AMK через S. Треугольник ANL подобен треугольнику AMK с коэффициентом подобия 2, поэтому его площадь равна $4S$. Искомая фигура имеет площадь $4S - S = 3S$. Треугольник ABC подобен треугольнику AMK с коэффициентом подобия 3, его площадь равна $9S$. Итак, S составляет 1/9 от S_{ABC}.



Есть и другие способы решения этой задачи. Например, проведя через точки деления прямые, параллельные остальным сторонам, мы разобьем все три фигуры на равные треугольники.

Задача 2. а) Существует ли треугольник, у которого две высоты меньше 1 см, но площадь больше 1 м^2? б) Существует ли треугольник, у которого две высоты больше 1 м, но площадь меньше 1см^2?

Ответ. а) Да, существует. б) Нет, не существует.

Решение. а) Например , равнобедренный треугольник с основанием 1 км и высотой 0.5 см.

б) Стороны больше высоты, проведенной из той же вершины. Значит все стороны больше 1 м и потому площадь треугольника обязана быть больше 0,5 м^2.

Задача 3. Какое наибольшее число коней можно расставить на шахматной доске так, чтобы никакие два не били друг друга?

Ответ: 32.

Решение. Заметим, что конь, стоящий на белой клетке бьёт лишь чёрные, и наоборот. Значит, поставив коней на все 32 белые клетки доски мы получим требуемое расположение. Докажем, что число 32 максимально. Шахматную доску можно обойти ходом коня, побывав на каждом поле ровно один раз. Поэтому кони не могут стоять на полях, являющихся соседями в этой цепочке ходов, т.е. коней не может быть более 32. Возможно и другое рассуждение. Разрежем шахматную доску 8×8 на 8 прямоугольных кусков размером 2×4. В каждом куске содержится 4 пары клеток, соединенных ходом шахматного коня, поэтому он не может содержать более 4 коней. Значит, общее число коней не более $4\times8 = 32$ коней.

Задача 4. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2 - xy + y = 2014$.

Ответ: Уравнение имеет 16 целочисленных решений $\{x, y\} \in \{\{2014, 2014\}, \{672, 670\}, \{184, 174\}, \{62, 30\}, \{34, -26\}, \{12, -170\}, \{4, -666\}, \{2, -2010\}, \{0, 2014\}, \{-2, 670\}, \{-10, 174\}, \{-32, 30\}, \{-60, -26\}, \{-182, -170\}, \{-670, -666\}, \{-2012, -2010\}\}$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $y = x + 1 + (2013/(x - 1))$. Так как x и y – целые, то $(x - 1)$ должно быть делителем числа 2013, откуда $(x - 1) = \pm1, \pm3, \pm11, \pm61$, а также всевозможные их произведения.

Задача 5. За круглым столом сидят семь гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает всё своё молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и т. д. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным своё молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько в ней было вначале. Во всех кружках вместе 3 литра молока. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

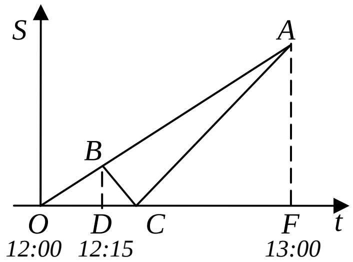
Ответ: 6/7, 5/7, 4/7, 3/7, 2/7, 1/7, 0 литров.

Решение. Легко показать, что указанные числа служат ответом. Действительно, после разливания молока первым гномом (по 1/7 каждому из остальных) получается точно такое же распределение, но «со сдвигом» на одного гнома, а сумма (1 + 2 + … + 6)/7 как раз равна 3. Осталось доказать, что нет других ответов. Пусть x — наибольшее количество молока, оказавшееся за всё время переливаний у какого-либо гнома Г. Тогда после очередного цикла из семи «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что Г можно считать первым в цикле) у Г накопится не более чем $6 \cdot x/6 = x$ литров молока; причём равенство возможно, лишь если каждый из шести других гномов наливает в кружку Г ровно $x/6$ литров молока. Таким образом, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке налито $kx/6$ литров ($k = 1, 2, …, 6$). Зная из условия, что $\frac{x+2x+\cdots+6x}{6} = 3$, находим единственный ответ.

Задача 6. В 12 часов Маша и Саша пошли на прогулку по набережной. Через четверть часа Маша вспомнила, что забыла на тумбочке у входа мобильник. Саша сбегал за ним и догнал Машу в 13:00. Во сколько Саша был у Маши дома? Считаем, что Маша шла все время с постоянной скоростью. Саша тоже бежал с постоянной скоростью.

Ответ. Саша был в доме Маши в 12:24.

Решение. *1 способ*. Будем считать, что скорость Маши составляет 4 единицы расстояния в час. За первую часть пути они с Сашей прошли 1 единицу. После этого до встречи с Сашей она прошла 45 минут, а он – 5 единиц (одну до дома и 4 до Маши). При этом путь до дома составил 1 единицу. Значит, он был в доме через 45 : 5 = 9 (мин).



2 способ. Решим задачу графически. Отрезок OA – график движения Маши, а ломаная $OBCA$ – Саши. Наклон отрезков BC и AC к оси одинаков (одинаковая скорость бега). Значит, треугольники BCD и ACF подобны. Получаем, что $CD : CF = BD : AF = OD : OF$. Последнее соотношение выведено с учетом подобия треугольников OBD и OAF. Но $OD : OF = 1 : 4$, поэтому отрезок CD составляет пятую часть отрезка DF, что соответствует времени 45 : 5 = 9 (мин).

Задача 7. Найти сумму $S_k = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2k-1}{2^k}$.

Ответ. $S_k = 3 - \frac{2k+3}{2^k}$.

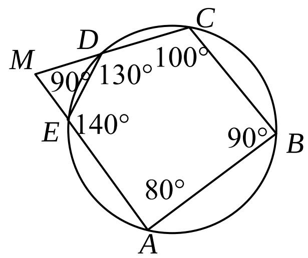
Решение. Добавим к сумме число $\frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^k} = 2 - \frac{2}{2^k}$. Получим выражение $\frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \cdots + \frac{2k+1}{2^k} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2k-1}{2^k} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2k+1}{2^k} = 2S_k - 1 + \frac{2k+1}{2^k}$. Получаем равенство $S_k + 2 - \frac{2}{2^k} = 2S_k - 1 + \frac{2k+1}{2^k}$. Откуда находим значение суммы.

Задача 8. Найти все функции f, такие, что для любого $x \in R$ выполняется $af(x) + bf(1 - x) = c$. Здесь a, b, c – некоторые константы, $a^2 \neq b^2$.

Ответ. $f(x) = \frac{c}{a+b}$.

Решение. Подставим вместо x выражение $1 - x$. Получим равенство $af(1 - x) + bf(x) = c$. Два равенства образуют систему линейных уравнений относительно $f(x)$ и $f(1 - x)$. Из системы находим $f(x)$.

Задача 9. На доске нарисован выпуклый пятиугольник, вписанный в окружность. Маша измерила его углы и сказала, что они равны 80°, 90°, 100°, 130°, 140° (в таком порядке). Права ли Маша?



Ответ. Вписанного пятиугольника с такими углами не существует.

Решение. Отрезок AC является диаметром окружности, так как на него опирается угол 90°. Продолжим стороны AE и CD до пересечения в точке M. Сумма углов четырехугольника $MCBE$ равна 360°, значит, угол при вершине M будет равен 90°. Но в таком случае точка M должна лежать на окружности. Она же в данном случае лежит вне.

Задача 10. Числа m и n – натуральные. Отрезок [0; 1] разделим на $m + n$ равных частей (концы отрезков исключаем). Могут ли два числа $\frac{i}{m}$ и $\frac{j}{n}$ попасть в одну и ту же часть?

Ответ. Нет.

Решение. Пусть существуют две точки на одном отрезке, например, $\frac{x}{m+n} < \frac{i}{m} \leq \frac{j}{n} < \frac{x+1}{m+n}$. Заметим, что $\frac{i}{m} \leq \frac{i+j}{m+n} \leq \frac{j}{n}$, так что $x < i + j < x + 1$, чего быть не может.