Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 92–96 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0024*

И.М. ПЛАКСИНА

ОБ ОДНОМ СИНГУЛЯРНОМ ЛИНЕЙНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Аннотация. В работе рассматривается сингулярное по независимой переменной функционально-дифференциальное уравнение первого порядка. Получены условия нетеровости, фредгольмовости, разрешимости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, сингулярные уравнения, фредгольмовость, разрешимость, краевая задача.

УДК: 517.929

Abstract. We consider one class of first-order functional differential equations with a singularity in the independent variable. We obtain conditions for the Fredholm property and the solvability of the mentioned equations.

Keywords: functional differential equations, singular equations, Fredholm property, solvability, boundary value problem.

В предлагаемой работе рассматривается функционально-дифференциальное уравнение первого порядка

$$\dot{x}(t) + a(t)x(t) + (Tx)(t) = f(t), \quad t \in [0, b]. \tag{1}$$

Коэффициент $a(t)$ имеет вид $a(t) = \frac{k}{t} + \widetilde{a}(t)$, $k \in \mathbb{R}$, функция $\widetilde{a} : [0, b] \to \mathbb{R}$ ограничена в существенном на каждом отрезке $[\varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, суммируема на $[0, b]$ и удовлетворяет предельному условию $\lim\limits_{t\to 0+} t\widetilde{a}(t) = 0$. Коэффициент $a(t)$ не суммируем на отрезке $[0, b]$, и уравнение (1) является сингулярным по независимой переменной в точке $t = 0$. Линейный оператор $T : AC \to L^p$ вполне непрерывен, где L^p — банахово пространство суммируемых со степенью p $(1 < p < \infty)$ на отрезке $[0, b]$ функций $z : [0, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|z\|_{L^p} = \Big(\int\limits_0^b |z(t)|^p\,dt\Big)^{1/p}$, AC – пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0, b]$ функций $x : [0, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{AC} = \|\dot{x}\|_{L^p} + |x(0)|$.

Примерами функций $a(t)$ могут быть $\frac{k}{\sin t}$ и $\frac{k}{t} + \frac{m}{\sqrt{t}}$. В качестве оператора T могут рассматриваться, например, операторы, определяющие сосредоточенное отклонение $(T_q x)(t) = q(t)x_g(t)$ или распределенное отклонение аргумента $(T_r x)(t) = \int\limits_0^b x(s)\,d_s r(t, s)$. Здесь $q(t)$ принадлежит пространству L^p, $g(t)$ измерима, $x_g(t) = \begin{cases} x[g(t)], & \text{если } g(t) \in [0; b]; \\ 0, & \text{если } g(t) \notin [0; b]. \end{cases}$

Поступила 24.06.2011

Функция $r(t,s)$ измерима в квадрате $[0;b]\times[0;b]$, $r(\cdot,s)\in L^p$, $\mathrm{var}_{s=0}^b\, r(\cdot,s)\in L^p$, $r(t,b)\equiv 0$. Эти условия обеспечивают ([1], с. 56) полную непрерывность операторов $T_q : AC\to L^p$ и $T_r : AC\to L^p$ соответственно.

Уравнения вида (1) возникают, например, при изучении процессов, протекающих в химическом реакторе, при изучении формы поверхности осесимметричного слоя жидкости, изучении явлений в ядре атома гелия [2], [3]. Задачи для обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений, обладающие аналогичной сингулярностью, привлекали внимание математиков еще в середине прошлого века [4]. Среди более поздних работ отметим работы представителей грузинской [3], [5] и чешской [6] математических школ. Отметим также работы пермских математиков [1], [7]–[9].

1. *Вспомогательные сведения.* Пусть D_0^p — пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0;b]\to\mathbb{R}$ с производной из пространства L^p, которые удовлетворяют дополнительному условию $x(0)=0$. Норму в пространстве D_0^p зададим равенством $\|x\|_{D_0^p}=\|\dot x\|_{L^p}$.

Отметим, что пространство D_0^p изоморфно пространству L^p. Изоморфизм между пространствами D_0^p и L^p определим равенством $z(t)=\dot x(t)$, где $x\in D_0^p$, $z\in L^p$. Обратное преобразование в этом случае имеет вид $x(t)=\int\limits_0^t z(s)\,ds$.

Определим вспомогательный оператор δ равенством $(\delta x)(t)=\dot x(t)+\frac{k}{t}x(t)$. Будем рассматривать его как оператор, определенный на множестве D_0^p и имеющий значения в пространстве L^p. Рассмотрим так называемое модельное уравнение ([1], с. 30)

$$(\delta x)(t)=f(t). \tag{2}$$

Свойства этого уравнения будут использованы при исследовании уравнения (1).

С помощью преобразования $x(t)=\int\limits_0^t z(s)\,ds$ уравнение (2) в пространстве D_0^p сводится к интегральному уравнению $z(t)+\frac{k}{t}\int\limits_0^t z(s)\,ds=f(t)$, содержащему оператор Чезаро $\mathcal{A}:L^p\to L^p$, определяемый равенством $(\mathcal{A}z)(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t z(s)\,ds$.

Свойства оператора Чезаро перечислены в широко цитируемой статье [10]. На основе этих свойств А.Р. Абдуллаевым было получено следующее утверждение ($p'=\frac{p}{p-1}$ — сопряженный к p индекс).

Утверждение ([11])**.** *При $kp'>-1$ уравнение* (2) *разрешимо и его решение единственно для любой правой части $f\in L^p$. При $kp'<-1$ уравнение* (2) *имеет однопараметрическое семейство решений для любой правой части $f\in L^p$. Если $kp'=-1$, то множество значений оператора δ не является замкнутым, и поэтому уравнение* (2) *разрешимо не для любой правой части $f\in L^p$.*

Следствиями этого утверждения являются леммы о нетеровости, фредгольмовости ([1], с. 12) и обратимости оператора δ.

Лемма 1. *Оператор δ является нетеровым тогда и только тогда, когда $kp'\neq -1$. Оператор δ является фредгольмовым тогда и только тогда, когда $kp'>-1$.*

Лемма 2. *Оператор δ имеет правый обратный оператор $\delta_r^{-1} : L^p \to D_0^p$ тогда и только тогда, когда $kp' \neq -1$. Оператор δ имеет обратный оператор $\delta^{-1} : L^p \to D_0^p$ тогда и только тогда, когда $kp' > -1$.*

2. *Основной результат.* Доказано, что такие фундаментальные свойства уравнения (1), как нетеровость и фредгольмовость, определяются единственной характеристикой — величиной числа k.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *в пространстве D_0^p нетерово тогда и только тогда, когда $kp' \neq -1$, причем при $kp' < -1$ его индекс равен* 1. *Уравнение* (1) *фредгольмово тогда и только тогда, когда $kp' > -1$.*

3. *Применение основного результата.* Теорема 1 позволяет сформулировать достаточные признаки разрешимости и однозначной разрешимости уравнения (1). Перечислим такие признаки для случаев $kp' > -1$ и $kp' < -1$.

Определим оператор $K_1 : L^p \to L^p$ равенством $K_1 = TC_1$, где $C_1 : L^p \to D_0^p$ — обратный оператор к оператору $\mathcal{L}_1 : D_0^p \to L^p$ вида $(\mathcal{L}_1 x)(t) = \dot{x}(t) + a(t)x(t)$. Оператор C_1 является линейным интегральным оператором, и его ядро имеет вид

$$C_1(t;s) = \begin{cases} \left(\frac{t}{s}\right)^{-k} e^{-\int_s^t \widetilde{a}(\eta)\,d\eta}\theta(t-s), & \text{если } s \neq 0; \\ 0, & \text{если } s = 0, \end{cases} \qquad \theta(t-s) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant s; \\ 0, & \text{если } t < s. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть $kp' > -1$ и выполнено хотя бы одно из условий*: а) *однородное уравнение $\mathcal{L}x = 0$ имеет только тривиальное решение*; б) *спектральный радиус оператора K_1 меньше* 1; в) *оператор T вольтерров. Тогда уравнение* (1) *имеет единственное решение при любой правой части $f \in L^p$.*

Обозначим $A_1 = \left(\frac{kp'+1}{b}\right)^{1/p'} \frac{1}{M}$, $A_2 = \frac{k+1}{Mb}$, где $M = e^{\int_0^b |\widetilde{a}(\eta)|\,d\eta}$. Пусть
$$\sigma_g(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } g(t) \in [0;b]; \\ 0, & \text{если } g(t) \notin [0;b]. \end{cases}$$

Следствие 1. Пусть $kp' > -1$ и выполнено хотя бы одно из условий: а) оператор T имеет вид T_q и $\|q(t)\sigma_g(t)\|_{L^p} < A_1$ или $\|q(t)\sigma_g(t)\|_{L^\infty} < A_2$; б) оператор T имеет вид T_r и $\|\operatorname{var}_{s=0}^b r(t,s)\|_{L^p} < A_1$ или $\|\operatorname{var}_{s=0}^b r(t,s)\|_{L^\infty} < A_2$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части $f \in L^p$.

Отметим, что второе неравенство следствия 1 содержит неулучшаемую оценку. Действительно, рассмотрим в пространстве D_0^2 при $t \in [0;1]$ уравнение $\dot{x}(t) + \frac{2}{t}x(t) + \beta x(1) = 0$. Это неравенство принимает вид $|\beta| < 3$. Решением уравнения является функция $x = mt$, где число m удовлетворяет условию $(3+\beta)m = 0$. Таким образом, при $\beta = -3$ рассматриваемое уравнение имеет нетривиальное решение.

Пусть оператор $K_2 : L^p \to L^p$ имеет вид $K_2 = TG_1$, где $G_1 : L^p \to D_0^p$ — правый обратный к оператору $\mathcal{L}_1$, имеющий ядро вида $G_1(t,s) = -\left(\frac{t}{s}\right)^{-k} e^{-\int_s^t a(\eta)\,d\eta}\theta(s-t)$.

Теорема 3. *Пусть $kp' < -1$ и спектральный радиус оператора K_2 меньше единицы. Тогда уравнение* (1) *имеет решение в пространстве D_0^p при любой правой части $f \in L^p$.*

Пусть $A_3 = \left(\frac{1}{b}\right)^{1/p'} \frac{1}{M}$, $A_4 = \frac{1}{Mb}$.

Следствие 2. Пусть $kp' < -1$ и выполнено хотя бы одно из условий: а) оператор T имеет вид T_q и $\|q(t)\sigma_g(t)\|_{L^p} < A_3$ или $\|q(t)\sigma_g(t)\|_{L^\infty} < A_4$; б) оператор T имеет вид T_r и $\|\operatorname{var}_{s=0}^b r(t,s)\|_{L^p} < A_3$ или $\|\operatorname{var}_{s=0}^b r(t,s)\|_{L^\infty} < A_4$. Тогда уравнение (1) имеет решение в пространстве D_0^p при любой правой части $f \in L^p$.

Рассмотрим в пространстве D_0^p краевую задачу

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = \alpha, \tag{3}$$

где $\ell : D_0^p \to \mathbb{R}$ — линейный ограниченный функционал. С помощью преобразования $x(t) = \int\limits_0^t z(s)\,ds$ функционал ℓ принимает вид $\ell x = \int\limits_0^b \varphi(s)\dot{x}(s)\,ds$, где $\varphi \in L^{p'}$. Отметим, что функционал $\ell x = x(0)$ не может быть записан в таком виде.

Краевую задачу будем рассматривать как операторное уравнение $[\mathcal{L},\ell](x) = \operatorname{col}\{f,\alpha\}$, где $[\mathcal{L},\ell] : D_0^p \to L^p \times \mathbb{R}$, $[\mathcal{L},\ell]x = \operatorname{col}\{\mathcal{L}x, \ell x\}$.

Теорема 4. *Краевая задача* (3) *в пространстве* D_0^p *нетерова тогда и только тогда, когда* $kp' \neq -1$, *причем при* $kp' > -1$ *ее индекс равен* -1. *Задача* (3) *фредгольмова тогда и только тогда, когда* $kp' < -1$.

Следствие 3. Пусть $kp' > -1$ и $X(t)$ — решение уравнения $\mathcal{L}x = f$. Тогда для любого функционала $\ell x \neq x(0)$ существует число $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ такое, что задача (3) не имеет решения, и существует число $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ такое, что задача (3) разрешима.

Следствие 4. Пусть $kp' < -1$ и $X(t)$ — решение уравнения $\mathcal{L}x = 0$. Краевая задача (3) однозначно разрешима в пространстве D_0^p при любой правой части $f \in L^p$, $\alpha \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\ell X \neq 0$.

Замечание. Условия следствия 2 гарантируют однозначную разрешимость краевой задачи $\mathcal{L}x = f$, $x(b) = 0$.

Литература

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения* (Ин-т компьютерных исследований, М., 2002).

[2] Васильев Н.И., Клоков Ю.А. *Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений* (Зинатне, Рига, 1978).

[3] Кигурадзе И.Т., Шехтер Б.Д. *Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем.: Новые достиж. **30**, 105–201 (1987).

[4] Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства* (Ин. лит., М., 1948).

[5] Кигурадзе И.Т. *Об условиях корректности линейных сингулярных краевых задач*, Дифференц. уравнения **46** (2), 183–190 (2010).

[6] Rachuncova I., Stanek S., Tvrdy M. *Singularities and Laplacians in boundary value problems for nonlinear differential equations*, Handbook of Differ. Equat. Ordinary Differ. Equat. Elsevier, **3**, 607–723 (2006).

[7] Шиндяпин А.И. *О краевой задаче для одного сингулярного уравнения*, Дифференц. уравнения **20** (3), 450–455 (1984).

[8] Лабовский С.М. *О положительных решениях двухточечной краевой задачи для линейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения*, Дифференц. уравнения **24** (10), 1695–1704 (1988).

[9] Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И. *О сингулярных краевых задачах для линейного дифференциального уравнения второго порядка*, Изв. вузов. Матем., №2, 3–11 (1999).

[10] Muntean I. *The spectrum of the Cesàro operator*, Rev. Anal. Numér. Théor. Approximation. Math. **22** (1), 97–105 (1980).

[11] Абдуллаев А.Р. *О разрешимости задачи Коши для сингулярного уравнения второго порядка в критическом случае*, Тр. ин-та прикладной математики им. И.Н. Векуа, № 37, 5–12 (1990).

И.М. Плаксина

аспирант, кафедра высшей математики,
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
Комсомольский пр., д. 29, г. Пермь, 614990, Россия,

e-mail: impl@list.ru

I.M. Plaksina

Postgraduate, Chair of Higher Mathematics,
State National Research Polytechnical University of Perm,
29 Komsomolskii Ave., Perm, 614990 Russia,

e-mail: impl@list.ru