Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 34–42 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0017*

Б.Г. ГРЕБЕНЩИКОВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ОДНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. В работе изучена проблема экспоненциальной устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием, при этом правая часть одной из подсистем содержит множитель e^t. Получены достаточные условия устойчивости по первому приближению.

Ключевые слова: неустойчивость, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная оценка, первое приближение.

УДК: 517.977

Abstract. We study the exponential stability of a nonlinear system of differential equations with constant delay such that the right-hand side of one of its subsystems contains the multiplier e^t. We obtain a sufficient condition for the first-approximation stability of this system.

Keywords: instability, asymptotic stability, exponential estimation, first approximation.

Рассматривается следующая нелинейная система с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= A_1x(t) + A_2x(t-\tau) + B_1y(t) + B_2y(t-\tau)+ \\ &\quad + f^1(t,x(t),x(t-\tau)) + f^2(t,y(t),y(t-\tau)), \\ dy(t)/dt &= e^t[A_3x(t) + A_4x(t-\tau)x(t-\tau) + B_3y(t) + B_4y(t-\tau)+ \\ &\quad + f^3(e^t,x(t),x(t-\tau)) + f^4(e^t,y(t),y(t-\tau))],\ \ t \ge t_0, \quad \tau = \mathrm{const}, \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь A_k, B_k $(k = 1,2,3,4)$ — постоянные матрицы размерности $m\times m$, $x(t), y(t)$ — m-мерные вектор-функции времени (аргумента) t, $f^j(t,x(t),x(t-\tau))$, $f^l(t,y(t),y(t-\tau))$ $(j = 1,3;$ $l = 2,4)$ — нелинейные вектор-функции, для которых справедливы условия $f^j(t,0,0) = 0$, $f^l(e^t,0,0) = 0$, удовлетворяющие в окрестности начала координат следующим оценкам:

$$\begin{aligned} \|f^j(t,x(t),x(t-\tau))\| &\le \widehat{\delta}_1(t)[\|x(t)\| + \|x(t-\tau)\|], \quad \int_{t-1}^{t}\widehat{\delta}_1(s)ds \le \widehat{\varepsilon}_1, \\ \|f^l(e^t,y(t),y(t-\tau))\| &\le \widehat{\delta}_2(e^t)[\|y(t)\| + \|y(t-\tau)\|], \quad \int_{t-1}^{t}\widehat{\delta}_2(s)ds \le \widehat{\varepsilon}_2, \end{aligned} \tag{2}$$

($\widehat{\varepsilon}_1$ и $\widehat{\varepsilon}_2$ — достаточно малые положительные числа). Норму вектора $w = \{w_j\}^{(\top)}$ (здесь w_j — компоненты вектора w) определим равенством $\|w\| = \sum\limits_{j=1}^{m}|w_j|$. Норму матрицы $D = \{d_{ij}\}$

Поступила 28.02.2011

$(i, j = 1, \ldots, m)$ определим в соответствии с нормой вектора ([1], с. 12), именно,

$$\|D\| = \max_j \sum_i |d_{ij}|.$$

Рассмотрим линейную однородную "невозмущенную" систему (систему первого приближения)

$$\begin{aligned} &dx^0(t)/dt = A_1x^0(t) + A_2x^0(t-\tau) + B_1y^0(t) + B_2y^0(t-\tau), \\ &dy^0(t)/dt = e^t[A_3x^0(t) + A_4x^0(t-\tau) + B_3y^0(t) + B_4y^0(t-\tau)], \quad t \geq t_0 > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Полагаем, что корни λ характеристического уравнения

$$|A_1 + A_2e^{-\lambda\tau} - \lambda E| = 0 \tag{4}$$

имеют отрицательную вещественную часть, т. е. справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\,\lambda < -\beta_1, \quad \beta_1 = \mathrm{const}, \quad \beta_1 > 0. \tag{5}$$

Кроме того, считаем, что собственные числа ν матрицы B_3 имеют отрицательную вещественную часть, т. е.

$$\mathrm{Re}\,\nu < -\beta_2, \quad \beta_2 = \mathrm{const}, \quad \beta_2 > 0. \tag{6}$$

Наконец, полагаем, что корни p характеристического уравнения

$$|B_3 + B_4e^{-p\tau} - \left(A_3 + A_4e^{-p\tau}\right)\left(A_1 + A_2e^{-p\tau} - pE\right)^{-1}\left(B_1 + B_2e^{-p\tau}\right)| = 0 \tag{7}$$

удовлетворяют неравенству

$$\mathrm{Re}\,p < -\beta_3, \quad \beta_3 = \mathrm{const}, \quad \beta_3 > 0. \tag{8}$$

В работе [2] с использованием преобразования Лапласа решений невозмущенной системы (3) $x^0(t, \phi_1(\eta)); y^0(t, \phi_2(\eta))$ показано, что при выполнении неравенств (5), (6), (8) решение этой системы (определенное начальной вектор-функцией $\phi^{(\top)}(\eta) = \{\phi_1(\eta),\, \phi_2(\eta)\} : x(\eta) = \phi_1(\eta)$, $y(\eta) = \phi_2(\eta)$, $\eta \in [t_0 - \tau, t_0]$, значок $(\top)$ означает транспонирование вектора) экспоненциально устойчиво ([1], с. 168). Именно, для него справедлива экспоненциальная оценка

$$\begin{gathered} \|x^0(t)\| + \|y^0(t)\| \leq M_0e^{-\beta_0(t-t_0)}[\sup_\eta \|\phi_1(\eta)\| + \sup_\eta \|\phi_2(\eta)\|], \quad t \geq t_0, \\ M_0 = \mathrm{const}, \quad M_0 > 1, \quad \beta_0 = \min\{\beta_1, \beta_3\} - \overline{\varepsilon} \end{gathered} \tag{9}$$

($\beta_0 > 0$ при достаточно малом положительном $\overline{\varepsilon}$).

Расположение нулей характеристического уравнения (7) достаточно подробно исследовано в работе [3]. В частности, показано, что корни этого уравнения расположены левее некоторой вертикальной прямой $\mathrm{Re}\,p = \beta$, $\beta = \mathrm{const}$, $\beta > 0$. Расстояние между любыми корнями уравнения (7) в области $\mathrm{Re}\,p \leq \beta$ строго больше нуля, при этом в области $\mathrm{Re}\,p \leq \beta$ отсутствуют предельные точки корней данного характеристического уравнения. Полюсы вектор-функций $X(p)$, $Y(p)$ — изображений по Лапласу ([4], с. 11) вектор-функций $x^0(t, \phi_1(\eta))$, $y^0(t, \phi_2(\eta))$ — определяются корнями характеристических уравнений (4) и (7). При этом для данных мероморфных вектор-функций $X(p)$, $Y(p)$ в тех точках области $\mathrm{Re}\,p \leq \beta$, где они являются аналитическими, справедливо асимптотическое представление, аналогичное соответствующему свойству квазиполиномов ([4], с. 460). Вследствие этого в работе [3] показано, что при наличии корней $\overline{p} : \mathrm{Re}\,\overline{p} > 0$ решение системы (3) неустойчиво (этот факт устанавливается также с использованием преобразования Лапласа решений системы (3)). Таким образом, достаточные условия (8) являются довольно точными. Отметим, что при нахождении корней (7) в конкретных случаях можно достаточно эффективно использовать пакет прикладных программ MATHCAD.

Определим теперь решение исходной (возмущенной) системы (1) той же самой вектор-функцией $\phi(\eta)$ (полагаем $[\sup_\eta \|\phi_1(\eta\| + \sup_\eta \|\phi_2(\eta)\|] < \delta_0$, δ_0 — достаточно малое положительное число).

Теорема. *При выполнении неравенств* (2), (5), (6), (8) *решение "возмущенной" системы* (1) *экспоненциально устойчиво при достаточно малых величинах* ε_1, ε_2 *и* δ_0.

Доказательство. Чтобы лучше понять особенности исходной системы, перейдем от системы (1) — конечной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием на бесконечном промежутке времени — к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, заданной на конечном промежутке времени $[0, \tau]$, полагая $x_{n+1}(t) = x(t_0+n\tau+t)$, $y_{n+1}(t) = y(t_0+n\tau+t)$, $f^r_{n+1}(t, x_{n+1}(t), x_n(t)) = f^r(t_0+n\tau+t, x(t_0+n\tau+t), x(t_0+(n-1)\tau+t))$ $(r = 1, 3)$; $f^k_{n+1}(e^t, y_{n+1}(t), y_n(t)) = f^k(e^{t_0+n\tau+t}, y(t_0+n\tau+t), y(t_0+(n-1)\tau+t))$ $(k = 2, 4)$, $t \in [0, \tau]$. Получаем совокупность двух подсистем m-го порядка

$$\begin{aligned} dx_{n+1}(t)/dt &= A_1x_{n+1}(t) + A_2x_n(t) + B_1y_{n+1}(t) + B_2y_n(t)+ \\ &\quad + f^1_{n+1}(t, x_{n+1}(t), x_n(t)) + f^2_{n+1}(t, y_{n+1}(t), y_n(t)), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n dy_{n+1}(t)/dt &= e^t[A_3x_{n+1}(t) + A_4x_n(t) + B_3y_{n+1}(t) + B_4y_n(t)+ \\ &\quad + f^3_{n+1}(e^t, x_{n+1}(t), x_n(t)) + f^4_{n+1}(e^t, y_{n+1}(t), y_n(t))], \end{aligned} \tag{11}$$

$$0 \le t \le \tau, \quad \varepsilon_n = e^{-(t_0+n\tau)}, \quad x_0(t) = \phi_1(t-\sigma), \quad y_0 = \phi_2(t-\sigma),$$

для которой справедливы граничные условия

$$x_{n+1}(0) = x_n(\tau), \quad y_{n+1}(0) = y_n(\tau).$$

Таким образом, нахождение решения системы (1) сведено к последовательному интегрированию "дифференциально-разностной" системы в пространстве непрерывных вектор-функций, заданных на отрезке $[0, \tau]$. Отметим некоторые свойства подсистемы (11). Ввиду того, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, подсистема (4) является сингулярно возмущенной [2], [3]. Следовательно, совокупность решений системы (10), (11) можно рассматривать как систему, содержащую медленные $(x_n(t))$ и быстрые $(y_n(t))$ переменные.

Невозмущенная (линейная) система (3) подобным образом сводится к счетной дифференциально-разностной системе вида

$$dx^0_{n+1}(t)/dt = A_1x^0_{n+1}(t) + A_2x^0_n(t) + B_1y^0_{n+1}(t) + B_2y^0_n(t), \tag{12}$$

$$\varepsilon_n dy^0_{n+1}(t)/dt = e^t[A_3x^0_{n+1}(t) + A_4x^0_n(t) + B_3y^0_{n+1}(t) + B_4y^0_n(t)] \tag{13}$$

с аналогичными граничными условиями

$$x^0_{n+1}(0) = x^0_n(\tau), \quad y^0_{n+1}(0) = y^0_n(\tau).$$

Если определить норму вектор-функции $z(t)$, $t \in [0, \tau]$, в виде

$$\|z(t)\|_\tau = \max_{0 \le t \le \tau} \|z(t)\|,$$

то линейное пространство непрерывных вектор-функций на отрезке $[0, \tau]$ будет пространством Банаха ([5], с. 124). Обозначим его $C_{2m}[0, \tau]$. В этом пространстве решение "невозмущенной" (линейной) системы (12), (13) можно представить в операторном виде

$$\begin{pmatrix} x^0_{n+1}(t) \\ y^0_{n+1}(t) \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} x^0_n(t), y^0_{n+1}(t), y^0_n(t) \\ y^0_n(t), x^0_{n+1}(t), x^0_n(t) \end{pmatrix},$$

где линейный оператор сдвига T_n определен следующим образом:

$$T_n = \begin{Bmatrix} T_n^1 \\ T_n^2 \end{Bmatrix} = \begin{cases} U(t)u_n(\tau) + \int\limits_0^t U(t-s)A_2u_n(s)ds + \int\limits_0^t U(t-s)\left(B_1v_{n+1}(s) + B_2v_n(s)\right)ds; \\ e^{B_3(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-1)}v_n(\tau) + \int\limits_0^t e^{B_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}e^s(\varepsilon_n)^{-1}(B_4v_n(s)+ \\ \qquad +A_3u_{n+1}(s) + A_4u_n(s))ds. \end{cases}$$

Здесь $U(t-s)$ — фундаментальная матрица решений однородной системы

$$d\overline{u}_{n+1}/dt = A_1\overline{u}_{n+1}(t) + A_2\overline{u}_n(t), \quad 0 \le t \le \tau, \quad \overline{u}_{n+1}(0) = \overline{u}_n(\tau),$$

при этом (ввиду неравенства (5)) справедлива оценка

$$\|U(t-s)\| \le M_1e^{-\beta_1(t-s)}, \quad M_1 = \text{const}, \quad M_1 > 0. \tag{14}$$

Свойства оператора сдвига T_n подробно изложены в работах [6], [7], в частности, доказана его равномерная ограниченность, именно, $\|T_n\| \le \overline{M}$. Из неравенства (9) для произведения операторов T_j следует оценка

$$\left\|\prod_{j=0}^{n} T_jw_0(s)\right\| \le M_0q^n\|x_0(t)\|_\tau + \|y_0(t)\|_\tau, \quad w_0^{(\top)}(t) = \{x_0(t), y_0(t)\}, \quad q = e^{-\tau}, \quad 0 < q < 1. \tag{15}$$

Будем теперь исследовать решение “возмущенной” системы (10), (11) по шагам. Записывая решение данной системы в интегральной форме (в форме Коши), считая неоднородностями нелинейные “возмущающие” члены ([1], с. 162), представим ее решение также в операторном виде

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}(t) \\ y_{n+1}(t) \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} x_n^0(t), y_{n+1}^0(t), y_n^0(t) \\ y_n^0(t), x_{n+1}^0(t), x_n^0(t) \end{pmatrix} + \\ + I_n \begin{pmatrix} f_{n+1}^1(t, x_{n+1}(t), x_n(t)), f_{n+1}^2(t, y_{n+1}(t), y_n(t)) \\ f_{n+1}^3(e^t, x_{n+1}(t), x_n(t)), f_{n+1}^4(e^t, y_{n+1}(t), y_n(t)) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Здесь I_n — нелинейный интегральный оператор, определенный следующим образом:

$$I_n = \begin{Bmatrix} I_n^1(f_{n+1}^1(t, x_{n+1}(t), x_n(t)), f_{n+1}^2(t, y_{n+1}(t), y_n(t))) \\ I_n^2(f_{n+1}^3(e^t, x_{n+1}(t), x_n(t)), f_{n+1}^4(e^t, y_{n+1}(t), y_n(t))) \end{Bmatrix},$$

где

$$I_n^1(f_{n+1}^1(t, x_{n+1}(t), x_n(t)), f_{n+1}^2(t, y_{n+1}(t), y_n(t))) = \\ = \int_0^t U(t-s)f_{n+1}^1(s, x_{n+1}(s), x_n(s))ds + \int_0^t U(t-s)f_{n+1}^2(s, y_{n+1}(s), y_n(s))ds,$$

$$I_n^2(f_{n+1}^3(e^t, x_{n+1}(t), x_n(t)), f_{n+1}^4(e^t, y_{n+1}(t), y_n(t))) = \\ = \int_0^t e^{B_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}e^s(\varepsilon_n)^{-1}f_{n+1}^3(e^s, x_{n+1}(s), x_n(s))ds+ \\ + \int_0^t e^{B_2(\varepsilon_n)^{-1}(e^t-e^s)}e^s(\varepsilon_n)^{-1}f_{n+1}^4(e^s, y_{n+1}(s), y_n(s))ds.$$

Оценим теперь норму данного нелинейного оператора I_n. Пусть

$$x_n^0(t) = x_n(t), \quad y_n(t) = y_n^0(t), \quad \widehat{u}_{n+1}(t) = x_{n+1}(t) - x_{n+1}^0(t), \quad \widehat{v}_{n+1}(t) = y_{n+1}(t) - y_{n+1}^0(t).$$

Рассмотрим первое из соотношений (16). Учитывая оценки (2), (14), получаем цепь неравенств

$$\|\widehat{u}_{n+1}(t)\| \le \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}[\|f^1_{n+1}(s,x_{n+1}(s),x_n(s))\| + \|f^2_{n+1}(s,y_{n+1}(s),y_n(s))\|]ds \le$$
$$\le \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_{n+1}(s)\| + \|x_n(s)\| + \|y_{n+1}(s)\| + \|y_n(s)\|]ds,$$

откуда

$$\|\widehat{u}_{n+1}(t)\| \le \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)\|u_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)\|x^0_{n+1}(s)\|ds +$$
$$+ \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)\|y^0_{n+1}(s)\|ds +$$
$$+ \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds. \quad (17)$$

Ввиду равномерной ограниченности оператора T_n имеем оценки

$$\max_t \|x^0_{n+1}(t)\| \le \overline{M}[\max_t \|x_n(t)\| + \max_t \|y_n(t)\|],$$
$$\max_t \|y^0_{n+1}(t)\| \le \overline{M}[\max_t \|x_n(t)\| + \max_t \|y_n(t)\|].$$

Умножив обе части неравенства (17) на $e^{\beta_1 t}$ и обозначив $p_1^{n+1}(t) = \|\widehat{u}_{n+1}(t)\|e^{\beta_1 t}$, получаем из (17) неравенство

$$p_1^{n+1}(t) \le \int_0^t M_1\widehat{\delta}_1(s)p_1^{n+1}(s)ds + \int_0^t M_1 e^{\beta_1 s}\widehat{\delta}_1(s)[\|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|]ds +$$
$$+ \int_0^t M_1 e^{\beta_1 s}\widehat{\delta}_1(s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{\beta_1 s}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds.$$

Так как $e^{\beta_1 s}\delta_1(s)$ не является монотонно убывающей функцией, то, используя лемму Беллмана–Гронуолла ([4], с. 72), из последнего неравенства получаем оценку

$$p_1^{n+1}(t) \le \int_0^t M_1 e^{\beta_1 s}\widehat{\delta}_1(s)[\|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|]ds +$$
$$+ \int_0^t M_1 e^{\beta_1 s}\widehat{\delta}_1(s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{\beta_1 s}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds +$$
$$+ \int_0^t M_1 e^{\beta_4 s}\widehat{\delta}_1(s)[\|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|]ds +$$
$$+ \int_0^t M_1 e^{\beta_4 s}\widehat{\delta}_1(s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{\beta_4 s}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds.$$

Здесь $\beta_4 = \beta_1 - M_1\varepsilon_1$. Предполагаем величину $\widehat{\varepsilon}_1$ настолько малой, что справедливо неравенство

$$\beta_4 > 0.$$

Возвращаясь к переменной $\|\widehat{u}_{n+1}(t)\|$, получаем оценку

$$\|\widehat{u}_{n+1}(t)\| \leq \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)[\|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|]ds+ \\ + \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{-\beta_1(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds+ \\ + \int_0^t M_1 e^{-\beta_4(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)[\|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|]ds+ \\ + \int_0^t M_1 e^{-\beta_4(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_1 e^{-\beta_4(t-s)}\widehat{\delta}_1(s)[\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь второе равенство из соотношений (16). Записывая решение в интегральной форме (считая неоднородностью нелинейные члены), учитывая неравенства (2) и (6), аналогично выводу неравенства (17) получаем оценку

$$\|\widehat{v}_{n+1}(t)\| \leq \int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}\times \\ \times e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\|x^0_{n+1}(s)\|ds + \int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\|\widehat{u}_{n+1}(s)\|ds+ \\ + \int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\|y^0_{n+1}(s)\|ds+ \\ + \int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\times \\ \times [\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|]ds, \quad M_2 = \mathrm{const}, \quad M_2 > 1.$$

Если в правую часть данного неравенства подставить вместо $\|\widehat{u}_{n+1}\|$ оценку (18), то члены, содержащие величины $\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|$, $\|\widehat{v}_{n+1}(r)\|$, $0 < r \leq s \leq t$, будут иметь вид

$$\int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|ds,$$

$$\int_0^t M_2 e^{-\beta_2\varepsilon_n^{-1}(e^t-e^s)}e^s\varepsilon_n^{-1}\widehat{\delta}_2(e^s)\times \\ \times \left[\int_0^s M_1 e^{-\beta_1(s-r)}\widehat{\delta}_1(r)\|\widehat{v}_{n+1}(r)\|dr + \int_0^t M_1 e^{-\beta_4(s-r)}\widehat{\delta}_1(r)\|\widehat{v}_{n+1}(r)\|dr\right]. \quad (19)$$

Рассмотрим последний член. Внутренние интегралы (в квадратных скобках) можно оценить следующим образом:

1) $\tau > 1$, тогда $1 \leq r + k + \vartheta \leq s$, k — натуральное число, $\vartheta = \mathrm{const}$, $0 < \vartheta < 1$, и имеем цепь неравенств

$$\int_0^s M_1 e^{-\beta_i(s-r)}\widehat{\delta}_1(r)\|\widehat{v}_{n+1}(r)\|dr < M_1 e^{-\beta_i s}\sup_{0\leq r\leq s}\|\widehat{v}_{n+1}(r)\|\sum_{n=1}^{k+1}e^{\beta_i(r+n)}\int_{r+n}^{r+n+1}\widehat{\delta}_1(r)dr \leq \\ \leq \widehat{\varepsilon}_1 M_1\frac{e^{\beta_i}}{e^{\beta_i-1}}\sup_{0\leq r\leq s}\|\widehat{v}_{n+1}(r)\|, \quad i = \overline{1,4}; \quad (20)$$

2) если $\tau \le 1$, то имеем оценку

$$M_1 \int_0^s e^{-\beta_i(s-r)} \|v_{n+1}(r)\| dr \le M_1 \sup_{0 \le r \le s} \|v_{n+1}(r)\|, \quad i = \overline{1,4}.$$

И в том, и в другом случае получаем, что данные интегралы не превосходят величины

$$O(\varepsilon_1) \sup_{0 \le r \le s \le \tau} \|\widehat{v}_{n+1}(r)\|. \tag{21}$$

Таким образом, последний член в соотношении (19) (содержащий $\|\widehat{v}_{n+1}(s)\|, \|\widehat{v}_{n+1}(r)\|$, где $0 < r \le s \le t$) является величиной более высокого порядка малости, чем величина

$$M_2 \int_0^t e^{-\beta_2 \varepsilon_n^{-1}(e^t - e^s)} e^s \varepsilon_n^{-1} \widehat{\delta}_2(e^s) \|\widehat{v}_{n+1}(s)\| ds.$$

Ввиду этого в первом приближении получаем для $\|\widehat{v}_{n+1}(t)\|$ неравенство

$$\|\widehat{v}_{n+1}(t)\| < \int_0^t M_2 e^{-\beta_2 \varepsilon_n^{-1}(e^t - e^s)} e^s \varepsilon_n^{-1} \widehat{\delta}_2(e^s) \|\widehat{v}_{n+1}(s)\| ds + \int_0^t M_2 e^{-\beta_2 \varepsilon_n^{-1}(e^t - e^s)} e^s \varepsilon_n^{-1} \times$$
$$\times \widehat{\delta}_2(e^s) [\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\|] ds + \int_0^t M_2 e^{-\beta_2 (e^t - e^s)} e^s \widehat{\delta}_2(e^s) \left[\|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|\right] ds +$$
$$+ \int_0^t M_2 e^{-\beta_2 (e^t - e^s)} e^s \widehat{\delta}_2(e^s) \bigg\{ \int_0^s M_1 e^{-\beta_1(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) \left[\|x^0_{n+1}(r)\| + \|y^0_{n+1}(r)\|\right] dr +$$
$$+ \int_0^s M_1 e^{-\beta_1(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) [\|x_n(r)\| + \|y_n(r)\|] dr + \int_0^s M_1 e^{-\beta_4(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) \times$$
$$\times \left[\|x^0_{n+1}(r)\| + \|y^0_{n+1}(r)\|\right] dr + \int_0^s M_1 e^{-\beta_4(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) [\|x_n(r)\| + \|y_n(r)\|] dr \bigg\} ds. \tag{22}$$

(Если рассматривать более точное неравенство, то в правой части появятся члены вида (19), имеющие более высокий порядок малости.) Умножив обе части (22) на $e^{\beta_2 e^t} \varepsilon_n$, обозначив $p_2^{n+1}(t) = \|\widehat{v}_{n+1}(t)\| e^{\beta_2 \varepsilon_n^{-1} e^t} \varepsilon_n$, получаем из (22) неравенство

$$p_2^{n+1}(t) < \int_0^t M_2 p_2^{n+1}(s) e^s \widehat{\delta}_2(e^s) ds + \int_0^t M_2 e^{\beta_2 \varepsilon_n^{-1} e^s} e^s \widehat{\delta}_2(e^s) [\|x_n(s)\| + \|y_n(s)\| +$$
$$+ \|x^0_{n+1}(s)\| + \|y^0_{n+1}(s)\|] ds + \int_0^t M_2 e^{\beta_2 \varepsilon_n^{-1} e^s} e^s \widehat{\delta}_2(e^s) \times$$
$$\times \bigg\{ \int_0^s M_1 e^{-\beta_1(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) \left[\|x^0_{n+1}(r)\| + \|y^0_{n+1}(r)\|\right] dr + \int_0^s M_1 e^{-\beta_1(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) \times$$
$$\times [\|x_n(r)\| + \|y_n(r)\|] dr + \int_0^s M_1 e^{-\beta_4(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) [\|x^0_{n+1}(r)\| + \|y^0_{n+1}(r)\|] dr +$$
$$+ \int_0^s M_1 e^{-\beta_4(s-r)} \widehat{\delta}_1(r) [\|x_n(r)\| + \|y_n(r)\|] dr \bigg\} ds. \tag{23}$$

Ввиду того, что выражение в фигурных скобках есть величина $O(\varepsilon_1) \sup\limits_{0 \le \vartheta < \tau} [\|x_n(\vartheta)\| + \|y_n(\vartheta)\|]$ (это можно доказать аналогично выводу оценки (21)), в первом приближении для величины

$p_2^{n+1}(t)$ из (23) получаем неравенство

$$p_2^{n+1}(t) < \int_0^t M_2 p_2^{n+1}(s) e^s \widehat{\delta}_2(e^s) ds + \int_0^t M_2 e^{\beta_2 \varepsilon_n^{-1} e^s} e^s \widehat{\delta}_2(e^s)[\|x_n(s)\| + \\ + \|y_n(s)\| + \|x_{n+1}^0(s)\| + \|y_{n+1}^0(s)\|] ds$$

или

$$p_2^{n+1}(t) < \int_0^t M_2 p_2^{n+1}(s) e^s \widehat{\delta}_2(e^s) ds + F_{n+1}(t, x_n(\vartheta), y_n(\vartheta), x_{n+1}^0(\vartheta), y_{n+1}^0(\vartheta)), \quad 0 < \vartheta \le \tau. \quad (24)$$

Очевидно, функция $F_{n+1}(t, x_n(\vartheta), y_n(\vartheta), x_{n+1}^0(\vartheta), y_{n+1}^0(\vartheta))$ не зависит от $p_2^{n+1}(t)$.

Вновь применяя лемму Беллмана–Гроноулла, аналогично выводу (18) получаем из неравенства (24) оценку

$$p_2^{n+1}(t) < F_{n+1}(t, x_n(\vartheta), y_n(\vartheta), x_{n+1}^0(\vartheta), y_{n+1}^0(\vartheta)) + \\ + \int_0^t F_{n+1}(s, x_n(\vartheta), y_n(\vartheta), x_{n+1}^0(\vartheta), y_{n+1}^0(\vartheta)) e^{M_2 \int_s^t e^r \widehat{\delta}_2(e^r) dr} ds.$$

Поскольку

$$M_2 \int_s^t e^r \widehat{\delta}_2(e^r) dr < M_2 \widehat{\varepsilon}_2 (e^t - e^s),$$

$$F_{n+1}(t, x_n(\vartheta), y_n(\vartheta), x_{n+1}^0(\vartheta), y_{n+1}^0(\vartheta)) < M_2(1 + \overline{M}) \varepsilon_n \widehat{\varepsilon}_2 [\|x_n\|_\tau + \|y_n(t)\|_\tau],$$

то аналогично выводу неравенства (18) получаем оценку

$$\|\widehat{v}_{n+1}(t)\| \le \widehat{\varepsilon}_2 M_2 (1 + \overline{M})[1/\beta_2 + 1/\beta_5][\|x_n\|_\tau + \|y_n(t)\|_\tau], \quad \beta_5 = \beta_2 - M_2 \widehat{\varepsilon}_2. \quad (25)$$

(Здесь $\beta_5 > 0$ при достаточно малом $\widehat{\varepsilon}_2$.) Справедлива также оценка

$$\int_s^t e^{\beta r} \widehat{\delta}_1(r) dr < \widehat{\varepsilon}_1 e^{\beta} (e^{\beta t} - e^{\beta s})(e^{\beta} - 1)^{-1}$$

(доказывается аналогично выводу неравенства (20)). Используя данную оценку и соотношение (25), из (18) получаем (учитывая, что члены, содержащие $\|\widehat{v}_{n+1}(t)\|$, имеют более высокий порядок малости)

$$\|\widehat{u}_{n+1}(t)\| \le \widehat{\varepsilon}_1 M_1 (1 + \overline{M}) \left[\frac{e^{\beta_1}}{e^{\beta_1} - 1} + \frac{e^{\beta_4}}{e^{\beta_4} - 1} \right] [\|x_n\|_\tau + \|y_n(t)\|_\tau]. \quad (26)$$

Из неравенств (25), (26) следует: найдется такая постоянная $L > 1$, что для нелинейного интегрального оператора I_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ справедлива оценка

$$\|I_n\| \le L\varepsilon, \quad \varepsilon = \max_j \widehat{\varepsilon}_j, \quad j = 1, 2. \quad (27)$$

Рассматривая теперь решение возмущенной системы (16) (записанное в операторном виде), на первом шаге имеем равенство

$$w_{1,\varepsilon}(t) = T_0(w_0(s)) + I_0(w_{1,\varepsilon}(s), w_0(s)).$$

Далее, на втором шаге

$$w_{2,\varepsilon}(t) = T_1(w_{1,\varepsilon}(s)) + I_1(w_{2,\varepsilon}(s), w_{1,\varepsilon}(s))$$

и т. д. Здесь $w_{n,\varepsilon}(t) = \{x_n(t), y_n(t)\}^\top$.

Используя формулу вариации постоянных ([6], с. 23), запишем решение возмущенной однородной системы на любом шаге. Имеем равенство

$$w_{n+1,\varepsilon}(t) = T_nT_{n-1}\dots T_1T_0(w_0(s)) + T_nT_{n-1}\dots T_1I_0(w_{1,\varepsilon}(s), w_0(s)) + \\ + T_nT_{n-1}\dots T_2I_1(w_{2,\varepsilon}(s), w_{1,\varepsilon}(s)) + \dots + I_n(w_{n+1,\varepsilon}(s), w_{n,\varepsilon}(s)). \quad (28)$$

Учитывая (15) и (27), получаем из (28) неравенство

$$\|w_{n+1,\varepsilon}(t)\| < M_0q^n\|w_0(t)\| + LM_0\varepsilon\left[q^{n-1}\|w_0(s)\| + q^{n-2}\|w_{1,\varepsilon}(t)\| + \dots + \|w_{n,\varepsilon}(t)\|\right].$$

Обозначив $u_n = q^{-n}\|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau$, получаем из последнего неравенства соотношение

$$u_{n+1} \leq \frac{M_0}{q} + LM_0\varepsilon\sum_{k=0}^{n}u_k,$$

отсюда ([6], с. 40)

$$u_{n+1} \leq (1 + LM_0\varepsilon)^n\left(\frac{M_0}{q} + LM_0\varepsilon\right)u_0.$$

Возвращаясь к переменной $\|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau$, из последнего неравенства получаем оценку

$$\|w_{n,\varepsilon}(t)\|_\tau \leq M_0(1 + qL\varepsilon)(q + LM_0\varepsilon q)^n\|w_0(t)\|_\tau.$$

Экспоненциальная оценка достигается при

$$\varepsilon < \frac{1-q}{qLM_0}. \qquad \square$$

Литература

[1] Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости* (Наука, М., 1967).

[2] Гребенщиков Б.Г. *Асимптотическое поведение решений одной системы с линейным запаздыванием*, Изв. РАН. Теория и системы управления, №2, 29–34 (2008).

[3] Гребенщиков Б.Г., Новиков С.И. *О неустойчивости системы с линейным запаздыванием, приводимой к сингулярно возмущенной системе*, Изв. вузов. Матем., №2, 3–13 (2010).

[4] Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения* (Мир, М., 1967).

[5] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1977).

[6] Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем* (Мир, М., 1971).

[7] Гребенщиков Б.Г. *О существовании асимптотически периодического решения одной системы с запаздыванием*, Изв. Уральск. гос. ун-та. Матем. и механ. Вып. 5 (26), 44–54 (2003).

Б.Г. Гребенщиков

доцент, кафедра прикладной математики,
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия

B.G. Grebenshchikov

Associate Professor, Chair of Applied Mathematics,
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia