

УДК 539.3

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОЙ
ОБОЛОЧКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ***Л.У. Бахтиева, Ф.Х. Тазюков***Аннотация**

Рассмотрена задача устойчивости тонкой оболочки под действием осевой импульсной нагрузки. Предложен новый подход к построению математической модели, основанный на принципе стационарности действия Остроградского–Гамильтона. Показано, что задача сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, которые могут быть решены численно, а также с помощью разработанного авторами алгоритма приближенных вычислений. Выведена формула, определяющая зависимость между интенсивностью нагрузки и начальными условиями задачи. В указанной постановке решена задача устойчивости круговой цилиндрической оболочки, для определения критического значения импульса нагрузки использована теория устойчивости движения А.М. Ляпунова.

Ключевые слова: оболочка, устойчивость, импульс.

Введение

Статья является продолжением серии работ [1–3], посвященных постановке задач устойчивости тонких оболочек. Изучение особенностей поведения оболочечных конструкций (летательных аппаратов, судов, автомобилей и т. п.) под воздействием резко изменяющихся нагрузок интересно как с теоретической стороны, так и с практической точки зрения. При построении математической модели для такого рода задач возникают определенные трудности. Авторы известных нам теоретических исследований [4] трактуют нагружение как «придание некоторой начальной скорости» торцам оболочки, и исследуют возникающие при этом волновые процессы. В настоящей работе предлагается новая математическая модель задачи, позволяющая определить критическое значение импульса нагрузки и параметры волнообразования.

1. Построение математической модели

Пусть на оболочку действует продольная сжимающая нагрузка q , которую зададим в виде

$$q(t) = I \Delta(t),$$

где I – интенсивность импульса, $\Delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Из вариационного принципа Остроградского–Гамильтона имеем

$$\delta \int_0^t L dt = 0, \quad (1)$$

t – время, $L = K - P + A$ – функция Лагранжа, P – потенциальная энергия деформации, определяемая формулой

$$P = \frac{h}{2E} \iint \left[(\nabla^2 F)^2 - 2(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy + \\ + \frac{D}{2} \iint \left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy, \quad (2)$$

двойное интегрирование здесь и ниже проводится по осевому сечению оболочки S ; $D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$ – изгибная жесткость оболочки, h – толщина, E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона; w , F – подлежащие определению функции прогиба и напряжений, связанные уравнением неразрывности деформаций

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

k_x, k_y – кривизны координатных линий оболочки.

Для кинетической энергии K и работы внешних сил A имеем соответственно формулы

$$K = \frac{\rho h}{2} \iint (\dot{w})^2 dx dy, \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (4)$$

$$A = -\frac{h}{E} \iint \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0,L} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{E}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (5)$$

$\rho = E/V^2$ – плотность, V – скорость звука в материале оболочки.

Теорема 1. Пусть искомая функция прогиба представима в виде

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^m f_i(t) \varphi_i(x, y), \quad m \geq 2, \quad (6)$$

где $\varphi_i(x, y)$ – заданная система ортогональных на S базисных функций, $f_i(t)$ дважды дифференцируемы на $(0, t)$. Тогда функции $f_i(t)$ определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{f}_i} \right) + \frac{\partial P}{\partial f_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

причем начальные значения $f_i(0), \dot{f}_i(0)$ связаны с интенсивностью импульса на грузки формулами

$$\dot{f}_i(0) = \frac{I f_i(0) \iint \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)^2 dx dy}{2\rho \iint \varphi_i^2 dx dy}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

Доказательство. Обозначим $L' = K - P$, тогда из (1) получим

$$\delta \int_0^t L' dt + \delta \int_0^t A dt = 0. \quad (9)$$

С учетом формул (2), (4)–(6) получим

$$\delta L' = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L'}{\partial \dot{f}_i} \delta \dot{f}_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L'}{\partial f_i} \delta f_i.$$

Интегрируя первое слагаемое в (9) по частям, будем иметь

$$\delta \int_0^t L' dt = \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial L'}{\partial \dot{f}_i} \delta f_i \Big|_0^t + \int_0^t \left(\frac{\partial L'}{\partial f_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{f}_i} \right) \right) \delta f_i dt \right].$$

Используя формулы (5) и (6), найдем выражение для внешней работы

$$A = q(t) \sum_{i=1}^m c_i f_i^2, \quad c_i = \frac{h}{2} \iint \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)^2 dx dy, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

откуда, пользуясь фильтрующим свойством дельта-функции Дирака, получим

$$\delta \int_0^t A dt = I \sum_{i=1}^m c_i f_i(0) \delta f_i(0).$$

Уравнение (9) с учетом найденных выражений и равенств

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{f}_i} = \frac{\partial K}{\partial \dot{f}_i}, \quad \frac{\partial L'}{\partial f_i} = -\frac{\partial P}{\partial f_i}$$

приводит на интервале $(0, t_k)$ (t_k - момент потери устойчивости) к системе уравнений (7) и дополнительным условиям

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{f}_i} \delta f_i \Big|_0^{t_k} + I c_i f_i(0) \delta f_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Используя формулы (4) и (6), найдем

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{f}_i} = \rho h \dot{f}_i(t) \iint \varphi_i^2(x, y) dx dy.$$

В соответствии с критерием динамической устойчивости А.В. Саченкова [5] положим

$$\dot{f}_i(t_k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

тогда из условий (10) получим равенства

$$-\rho h \dot{f}_i(0) \iint \varphi_i^2(x, y) dx dy + I c_i f_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

из которых следуют формулы (8). Теорема доказана. \square

Уравнения (7) с начальными условиями (8) позволяют определить критическое значение импульса нагрузки и параметры волнообразования. Заметим, что функции $\varphi_i(x, y)$ в выражении (6) желательно подбирать таким образом, чтобы выполнялись краевые условия задачи.

Рассмотрим конкретный пример.

2. Решение задачи устойчивости цилиндрической оболочки

Выберем для шарнирно опертой цилиндрической оболочки ($k_x = 0$, $k_y = 1/R$) аппроксимирующую функцию прогиба (6) в виде

$$w(x, y, t) = f_1(t) \sin \alpha x \sin \beta y + f_2(t) \sin^2 \alpha x,$$

где $\alpha = m\pi/L$, $\beta = n/R$, R – радиус, L – длина оболочки, m , n – подлежащие определению волновые числа. Заметим, что выбранная функция удовлетворяет краевым условиям задачи и достаточно достоверно описывает наблюдающуюся в эксперименте [4] ромбовидную форму вмятин, образующихся после потери устойчивости.

Перейдем к построению системы уравнений (7). Подставим функцию w в уравнение неразрывности деформаций (3) и проинтегрируем его, получим для функции напряжений выражение

$$F = C_1 \cos 2\alpha x + C_2 \cos 2\beta y + C_3 \sin \alpha x \sin \beta y + C_4 \sin 3\alpha x \sin \beta y - qy^2/2,$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$C_1 = \frac{\beta^2 f_1^2}{32\alpha^2} - \frac{f_2}{8R\alpha^2}, \quad C_2 = \frac{\alpha^2 f_1^2}{32\beta^2},$$

$$C_3 = \frac{\alpha^2 f_1}{R(\alpha^2 + \beta^2)^2} - \frac{\alpha^2 \beta^2 f_1 f_2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}, \quad C_4 = \frac{\alpha^2 \beta^2 f_1 f_2}{(9\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Используя найденное выражение, определим по формуле (2) потенциальную энергию деформации

$$\hat{P} = A_1 \xi_1^4 + A_2 \xi_1^2 + A_3 \xi_2^2 + A_4 \xi_1^2 \xi_2^2 + A_5 \xi_1^2 \xi_2 + \hat{q}^2.$$

Здесь введены безразмерные величины

$$\hat{P} = \frac{PR}{\pi E h^3 L}, \quad \xi_i = \frac{f_i}{h}, \quad A_1 = \frac{\eta^2(1 + \theta^4)}{128}, \quad A_2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\theta^4}{s_1^2} + \frac{\eta^2 s_1^2}{12(1 - \nu^2)} \right),$$

$$A_3 = \frac{1}{8} + \frac{\eta^2 \theta^4}{6(1 - \nu^2)}, \quad A_4 = \frac{\eta^2 \theta^4}{4} \left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} \right), \quad A_5 = -\frac{\eta}{16} \left(1 + \frac{8\theta^4}{s_1^2} \right),$$

$$\hat{q} = \frac{qR}{Eh}, \quad \eta = \frac{n^2 h}{R}, \quad \theta = \frac{m\pi R}{nL}, \quad s_1 = 1 + \theta^2, \quad s_2 = 1 + 9\theta^2.$$

Вычислим по формуле (4) кинетическую энергию

$$\hat{K} = \frac{KR}{\pi E h^3 L} = \left(\frac{R}{V} \right)^2 \left(\frac{\dot{\xi}_1^2}{4} + \frac{3\dot{\xi}_2^2}{8} \right).$$

Система уравнений (7) примет вид

$$\frac{d^2 \xi_1}{d\tau^2} + 4(2A_1 \xi_1^3 + A_2 \xi_1 + A_4 \xi_1 \xi_2^2 + A_5 \xi_1 \xi_2) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d^2 \xi_2}{d\tau^2} + \frac{4}{3}(2A_3 \xi_2 + 2A_4 \xi_1^2 \xi_2 + A_5 \xi_1^2) = 0, \quad \tau = tV/R.$$

Из условий (8) получим начальные значения

$$\dot{\xi}_1(0) = 0, \quad \dot{\xi}_2(0) = \frac{2(m\pi)^2 \xi_2(0)}{3} \cdot \frac{IVR}{EL^2}. \quad (12)$$

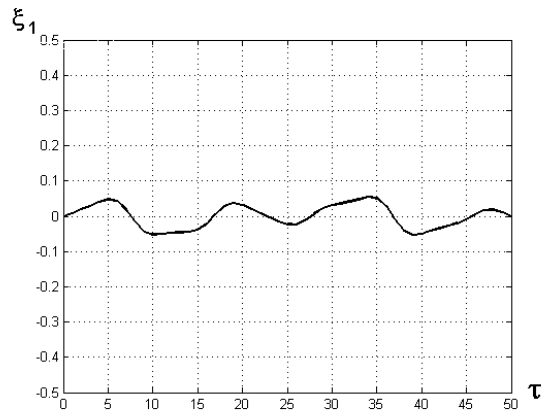


Рис. 1. Зависимость амплитуды прогиба от времени при малых значениях импульса нагрузки

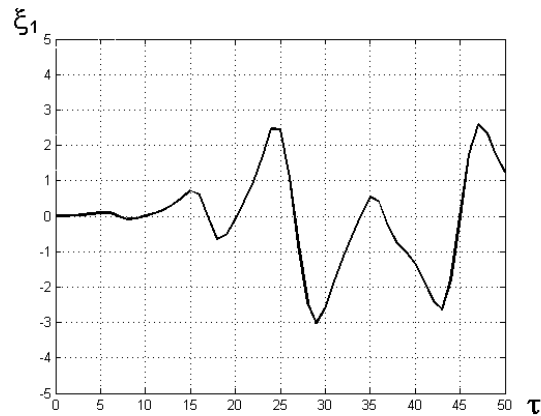


Рис. 2. Зависимость амплитуды прогиба от времени при критическом значении импульса нагрузки

Задача (11), (12) может быть решена численно. Расчеты показывают, что при малых значениях начальной скорости $\dot{\xi}_2(0)$ (следовательно, при малой интенсивности импульса нагрузки, см. формулу (8)) оболочка колеблется с амплитудой порядка $\xi_2(0)$ (рис. 1).

Если значение $\xi_2(0)$ достигает критической величины, наблюдается резкое возрастание амплитуды прогиба (рис. 2), то есть происходит потеря устойчивости движения по А.М. Ляпунову [6].

Вычисляя критическую интенсивность импульса для различных значений m , n и минимизируя нагрузку, находим параметры волнообразования. По графику на рис. 2 определяем критический момент времени, соответствующий первому максимуму амплитуды прогиба (критерий А.В. Саченкова [5]), и критическую величину прогиба. Таким образом, решение задачи (11), (12) позволяет найти все характеристики, соответствующие потере устойчивости оболочки.

Предложим алгоритм приближенных расчетов. Из статического аналога первого уравнения системы (11) найдем

$$\xi_1^2 = -\frac{1}{2A_1} (A_2 + A_5 \xi_2 + A_4 \xi_2^2).$$

Выразим с помощью найденного выражения правую часть второго уравнения (11) через ξ_2 , умножим обе части полученного равенства на $\dot{\xi}_2$ и проинтегрируем от 0 до t_k , получим

$$\dot{\xi}_2^2(0) = B_0 + B_1 \xi_2(t_k) + B_2 \xi_2^2(t_k) + B_3 \xi_2^3(t_k) + B_4 \xi_2^4(t_k),$$

где коэффициенты B_0, \dots, B_4 определяются через $\xi_2(0)$ и A_1, \dots, A_5 .

Минимизируя $\dot{\xi}_2(0)$ по амплитуде $\xi_2(t_k)$ и волновым числам m, n , находим критическое значение начальной скорости $v_{kp} = \dot{\xi}_2(0)$ и величину критического импульса по формуле

$$\hat{I}_{kp} = I \cdot \frac{2\pi^2 V \xi_2(0)}{3ER} = \frac{v_{kp} L^2}{m^2 R^2}.$$

Приведем некоторые результаты расчетов:

$$\begin{aligned} R/h = 100, \quad L/R = 1 : \quad v_{kp} = 1.61, \quad m = 2, \quad n = 8, \quad \hat{I}_{kp} = 0.40, \\ R/h = 100, \quad L/R = 2 : \quad v_{kp} = 1.60, \quad m = 4, \quad n = 8, \quad \hat{I}_{kp} = 0.40, \\ R/h = 200, \quad L/R = 1 : \quad v_{kp} = 1.59, \quad m = 3, \quad n = 12, \quad \hat{I}_{kp} = 0.18. \end{aligned}$$

Анализ полученных данных показывает, что увеличение длины оболочки не влияет на значение критического импульса и волнового числа n , но приводит к возрастанию количества вмятин вдоль оси оболочки. Уменьшение толщины оболочки приводит, как и следовало ожидать, к уменьшению величины критического импульса и возрастанию волновых чисел m и n .

Таким образом, предложенный подход к решению задач устойчивости оболочек при импульсном нагружении оказывается весьма эффективным и позволяет получить результаты, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными [4].

Summary

L.U. Bakhtieva, F.Kh. Tazyukov. Solving the Stability Problem for a Thin Shell under Impulsive Loading.

The stability problem for a thin shell under an axial impulsive load is considered. A new approach to building a mathematical model is presented, based on the Ostrogradskii–Hamilton principle of stationary action. It is shown that the problem reduces to a system of nonlinear differential equations that can be solved numerically and by using an approximate calculation algorithm developed by the authors. A formula that determines the dependence between the load intensity and the problem's initial conditions is derived. In the above formulation, the stability problem for a circular cylindrical shell is solved. To determine the critical value of the load impulse, the Lyapunov theory of dynamic stability is used.

Keywords: shell, stability, impulse.

Литература

1. Коноплев Ю.Г., Тазюков Ф.Х. Устойчивость упругих пластин и оболочек при нестационарных воздействиях. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 124 с.
2. Бахтиева Л.У., Тазюков Ф.Х. К постановке задачи устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении // Материалы II междунар. науч.-практ. конф. «Фундаментальные и прикладные науки сегодня». – М.: НИЦ «Академический», 2013. – С. 164–167.
3. Бахтиева Л.У., Тазюков Ф.Х. К постановке задачи устойчивости цилиндрической оболочки при кручении // Сб. науч. ст. по итогам междунар. науч.-практ. конф. «Институты и механизмы инновационного развития в экономике, математике, технике, физике». – СПб.: КультИнформПресс, 2013. – С. 13–16.

4. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 433 с.
5. *Саченков А.В., Бахтиева Л.У.* Об одном подходе к решению динамических задач устойчивости тонких оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – Вып. 13. – С. 137–152.
6. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

Поступила в редакцию
20.01.14

Бахтиева Ляля Узбековна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *lbakhtie@yandex.ru*

Тазюков Фэрид Хоснутдинович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *Farid.Tazyukov@kpfu.ru*