Известия вузов. Математика
2016, № 10, с. 8–13
http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Л.Е. ЕВТУШИК, *И. ГИНТЕРЛЕЙТНЕР, Н.И. ГУСЕВА, Й. МИКЕШ*

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ НА ПРОСТРАНСТВА ЭЙНШТЕЙНА

Аннотация. В данной работе изучаются конформные отображения римановых пространств на пространства Эйнштейна при условиях минимальных требований на класс дифференцируемости изучаемых пространств. Показано, при каких условиях имеют место линейные уравнения, полученные Й. Микешем, М.Л. Гаврильченко и Е.И. Гладышевой, которые определяют указанные отображения.

Получена оценка числа существенных параметров, от которых зависит общее решение системы основных уравнений.

Ключевые слова: (псевдо-)риманово пространство, конформное отображение, пространство Эйнштейна.

УДК: 514.762

Введение

Конформные отображения n-мерных римановых пространств V_n изучались многими авторами. Предполагаем, что сигнатура метрик g рассматриваемых V_n произвольна, т. е. V_n – собственно риманово или (псевдо-)риманово пространство. Конформные отображения имеют приложения в общей теории относительности (например, [1]–[5]).

Вопрос о том, допускает ли V_n ($n > 2$) конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна $\overline{V}_n$, был сведен Г. Бринкманом [6] к проблеме существования решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно $(n + 1)$ неизвестной функции. Эта задача детально изложена в монографии А.З. Петрова [2].

В работе [7], а также в ([8], [9], [10], с. 112–116), основная система этой задачи сведена к линейной системе, при помощи которой удалось оценить степень параметрического произвола p в решении указанной задачи, в нашей терминологии *степень мобильности риманова пространства относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна.*

В работе [11] оценена первая лакуна в распределении степеней мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна. Как известно [7], максимальное значение $p = n + 2$ допускают конформно плоские римановы пространства и только они. Получен тензорный признак пространств, отличных от конформно плоских, для которых $p = n - 1$, что является максимально возможным значением. Таким

Поступила 11.03.2015

The paper was supported by the grant IGA Faculty of Science 2014016 Mathematical Structures of the Palacky University and the project № LO1408, AdMas UP — Advanced Materials, Structures and Technologies (supported by Ministry of Education, Youth and Sports under the National Sustainability Programme I), Brno University of Technology.

образом, получена оценка первой лакуны в распределении степеней мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна и выделены максимально мобильные пространства, отличные от конформно плоских, относительно указанных степеней. Заметим, что уравнения, полученные в [7], переписанные в операторной форме, встречаются, например, в [12], [13].

В указанных выше исследованиях предполагается достаточно высокий класс гладкости рассматриваемых геометрических объектов. Наша работа посвящена изучению минимальных условий на дифференцируемость рассматриваемых геометрических объектов при конформных отображениях V_n на пространства Эйнштейна.

Выбором координатной системы, как известно, можно понизить класс дифференцируемости до "минимального уровня". Более того, гладкость функции, определяющей конформное отображение, самым непосредственным и "непреодолимым" способом влияет на гладкость метрики пространства, которое конформно пространству Эйнштейна.

В работе получена основная система этой задачи в замкнутой линейной форме при минимальных требованиях на дифференцируемость рассматриваемых метрик конформно соотвествующих пространств.

Исследования носят локальный характер. Будем считать, что размерность рассматриваемых пространств $n > 2$.

1. Основные сведения о конформных отображениях

Рассмотрим риманово пространство V_n, которое определяется метрикой g, сигнатура которой произвольна. Если на координатной карте (U, x) компоненты метрики $g_{ij}(x) \in C^r$, то будем писать $V_n \in C^r$. Будем считать, что $r = 2, 3, \dots, \infty, \omega$, класс C^∞ — класс функций, имеющих непрерывные частные производные любого порядка, а класс C^ω — класс вещественно-аналитических функций.

В $V_n \in C^1$ определяют символы Кристоффеля первого и второго типов

$$\Gamma_{ijk} = 1/2\ (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \ \text{ и } \ \Gamma^h_{ij} = g^{h\alpha}\Gamma_{ij\alpha},$$

где g^{ij} — компоненты обратной матрицы к $\|g_{ij}\|$ и $\partial_i = \partial/\partial x^i$.

В $V_n \in C^2$ определяют тензоры Римана и Риччи, скалярную кривизну

$$R_{hijk} = g_{h\alpha}R^\alpha_{ijk}, \quad R^h_{ijk} = \partial_j\Gamma^h_{ik} - \partial_k\Gamma^h_{ij} + \Gamma^\alpha_{ik}\Gamma^h_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{ij}\Gamma^h_{\alpha k}, \quad R_{ij} = R^\alpha_{i\alpha j}, \quad R = R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}.$$

Заметим, что во многих исследованиях (например, [14], [15]) тензор Риччи определяют с противоположным знаком.

Далее в V_n определяют тензор конформной кривизны Вейля

$$C^h_{ijk} = g^{h\alpha}C_{\alpha ijk}, \quad C_{hijk} = R_{hijk} - g_{hj}L_{ik} - g_{ik}L_{hj} + g_{hk}L_{ij} + g_{ij}L_{hk},$$

и тензоры $L_{ij} = \frac{1}{n-2}(R_{ij} - \frac{R}{2(n-1)}g_{ij})$, $L^h_i = g^{h\alpha}L_{\alpha i}$ и $L_{ijk} = L_{ij,k} - L_{ik,j}$. Здесь и далее запятой обозначена ковариантная производная по связности Леви-Чивита пространства V_n.

Если $V_n \in C^r$, то $\Gamma^h_{ij}, \Gamma_{ijk} \in C^{r-1}$; $R^h_{ijk}, R_{hijk}, R_{ij}, R, C^h_{ijk}, C_{hijk}, L_{ij}, L^h_i \in C^{r-2}$ и $L_{ijk} \in C^{r-3}$.

Два римановых пространства V_n и $\overline{V}_n$ находятся в *конформном соответствии*, если в общей по отображению системе координат (U, x) их метрические тензоры g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$ связаны следующим образом [1]–[3], [14]:

$$\overline{g}_{ij}(x) = e^{2\sigma(x)}g_{ij}(x), \tag{1}$$

где σ — некоторый инвариант.

Как известно, для конформно соответствующих пространств V_n и $\overline{V}_n$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^h_{ij} &= \Gamma^h_{ij} + \delta^h_i \sigma_j + \delta^h_j \sigma_i - \sigma^h g_{ij},\\
\overline{R}^h_{ijk} &= R^h_{ijk} + \delta^h_k \sigma_{ij} - \delta^h_j \sigma_{ik} + \sigma^h_k g_{ij} - \sigma^h_j g_{ik} + \Delta_1 \sigma \, (\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}),\\
\overline{R}_{ij} &= R_{ij} - (n-2)\sigma_{ij} - (\Delta_2 \sigma + (n-2)\Delta_1 \sigma) g_{ij},\\
\overline{C}^h_{ijk} &= C^h_{ijk}.
\end{aligned}$$

Здесь Γ^h_{ij} ($\overline{\Gamma}^h_{ij}$) — символы Кристоффеля, R^h_{ijk} ($\overline{R}^h_{ijk}$) — тензоры Римана, R_{ij} ($\overline{R}_{ij}$) — тензоры Риччи, C^h_{ijk} ($\overline{C}^h_{ijk}$) — тензоры конформной кривизны V_n и $\overline{V}_n$ соответственно. Кроме того, δ^h_i — символ Кронекера, $\Delta_1 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_\alpha \sigma_\beta$ и $\Delta_2 \sigma = g^{\alpha\beta} \sigma_{,\alpha\beta}$ — первый и второй операторы Бельтрами соответственно,

$$\sigma_i = \sigma_{,i}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{i,j} - \sigma_i \sigma_j, \quad \sigma^h = \sigma_\alpha g^{\alpha h}, \quad \sigma^h_i = \sigma_{\alpha i} g^{\alpha h}.$$

Вышеуказанные формулы справедливы, когда V_n и $\overline{V}_n \in C^2$ в общей по отображению системе координат x.

2. Конформные отображения на пространства Эйнштейна

В работе [7] доказано, что риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\overline{V}_n$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$ и $s(x)$ (> 0):

$$s_{,ij} = u\, g_{ij} - s\, L_{ij}. \tag{2}$$

При этом $s = \mathrm{e}^{-\sigma}$, тогда (1) принимает вид

$$\overline{g}_{ij} = s^{-2} g_{ij}. \tag{3}$$

Эти условия выполняются при минимальных требованиях на класс гладкости рассматриваемых функций, т. е. когда при этом функция $s \in C^2$ и u является непрерывной функцией. Очевидно, тогда V_n и $\overline{V}_n \in C^2$.

В работе [7] фактически при условии V_n и $\overline{V}_n \in C^3$ доказано, что риманово пространство V_n допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\overline{V}_n$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)$ (> 0) и вектора $s_i(x)$:

$$\text{a) } s_{,i} = s_i; \quad \text{b) } s_{i,j} = u\, g_{ij} - s\, L_{ij}; \quad \text{c) } u_{,i} = -s_\alpha L^\alpha_i. \tag{4}$$

Покажем, что подобные уравнения имеют место при более слабых условиях на дифференцируемость метрик изучаемых пространств.

Теорема 1. *Риманово пространство $V_n \in C^2$, в котором тензор $L_{ij} \in C^1$, допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\overline{V}_n \in C^2$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)$ (> 0) и вектора $s_i(x)$, при этом $s \in C^3$,*

$$\text{a) } s_{,i} = s_i; \quad \text{b) } s_{i,j} = u\, g_{ij} - s\, L_{ij}; \quad \text{c) } u_{,i} = -s_\alpha L^\alpha_i - s \cdot P_i, \tag{5}$$

где $P_k = \frac{1}{n-1}\, P_{ijk} g^{ij}$, $P_{ijk} = L_{ij,k} - L_{ik,j}$.

Доказательство. Условия (2), которые характеризуют рассматриваемую задачу, запишем с поднятым индексом в развернутом виде

$$\partial_j s^i - u\delta^i_j = -s^\alpha \Gamma^i_{\alpha j} - s\, L^i_j,$$

где $s^i{=}g^{i\alpha}s_\alpha$, $s_i = s_{,i}$. Так как правая сторона этого выражения по предположению теоремы дифференцируема, то на основании результата И. Гинтерлейтнер и Й. Микеша [16], [17] получим $s^i \in C^2$ и $u \in C^1$, из чего вытекает $s \in C^3$.

Ковариантно продифференцируем (2) вдоль x^k, полученное выражение проальтернируем по индексам j и k. На основании тождества Риччи имеем

$$s_\alpha R^\alpha_{ijk} = g_{ij}u_{,k} - g_{ik}u_{,j} - L_{ij}s_k + L_{ik}s_j - s\, P_{ijk}. \tag{6}$$

Свертывая эти условия с g^{ij}, после преобразований получим уравнения (5). □

Заметим, что уравнения (5 c)) принимают вид (4 c)) в случае, когда $P_{ijk}g^{ij} = 0$.

Для $V_n \in C^r$ ($n > 2$, $r > 2$) имеют место тожества Бианки $R^h_{ijk,l} + R^h_{ikl,j} + R^h_{ilj,k} = 0$, из которых свертыванием вытекают условия Фосса–Вейля $R^\alpha_{i,\alpha} = 1/2\, R_{,i}$, где $R^h_i = g^{h\alpha}R_{\alpha i}$. Тогда непосредственным вычислением убедимся, что $P_{ijk}g^{ij} = 0$ и уравнения (5 c)) принимают вид (4 c)).

Предположим, что $V_n \in C^r$, $r > 2$, включая $r = \infty, \omega$. Тогда повторным дифференцированием системы уравнений (4) убедимся, что функция s имеет класс дифференцируемости по крайней мере C^r, а следовательно, в силу (3) и метрический тензор $\overline{g}_{ij}$ имеет класс C^r. Очевидно, если $V_n \in C^\infty$, то и $s \in C^\infty$. Аналогично система уравнений (4) с аналитическими коэффициентами (при $V_n \in C^\omega$) имеет аналитическое решение, следовательно, функция s также аналитическая.

Поэтому на основании теоремы 1 справедлива

Теорема 2. *Риманово пространство $V_n \in C^r$, $r > 2$, допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\overline{V}_n \in C^2$ тогда и только тогда, когда в V_n существует решение замкнутой системы линейных однородных дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши* (4) *относительно инвариантов $u(x)$, $s(x)$ (> 0) и вектора $s_i(x)$. В этом случае $\overline{V}_n \in C^r$.*

3. Следствия из условий интегрируемости основных уравнений

Уравнения (4), как и (5), имеют для начальных значений $s(x_0) = \overset{\circ}{s}$, $u(x_0) = \overset{\circ}{u}$, $s_i(x_0) = \overset{\circ}{s}_i$ не более чем одно решение. Таким образом, общее решение уравнений (4), соответственно (5), зависит от $p \leq n+2$ существенных параметров. Число p назовем *степенью мобильности риманова пространства относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна.*

В работе [7] для V_n и $\overline{V}_n \in C^3$ установлено, что максимальное значение p $(= n+2)$ допускают конформно плоские пространства и только они. В силу теоремы 2 к этому сводится и рассмотренный случай, когда $V_n \in C^3$ и $\overline{V}_n \in C^2$. На тех же основаниях верны и остальные результаты, сформулированные в статье [11]. Для неконформно плоских пространств V_n решение уравнений (4) зависит не более чем от $(n-1)$ параметров.

Эти оценки вытекают из анализа условий интегрируемости уравнений (2), которые при условиях теоремы 2 имеют вид ([7])

$$s_\alpha C^\alpha_{ijk} = -s\, P_{ijk}. \tag{7}$$

При условиях теоремы 1, детально анализируя соотношение (6), убеждаемся, что равенство $p = n+2$ выполняется для конформно-евклидовых пространств. При этих условиях из (6) для пространств, не являющихся конформно-евклидовыми, выполняется неравенство $p \leq n$. Но, по всей вероятности, справедливо неравенство $p \leq n-1$.

Действительно, при условиях теоремы 1 условия (6) после подстановки (5) принимают вид

$$s_\alpha C^\alpha_{ijk} = -s\,(P_{ijk} + g_{ij}P_k - g_{ik}P_j). \tag{8}$$

При максимальном p из (8) вытекает $C^p_{ijk} = 0$ и $P_{ijk}+g_{ij}P_k-g_{ik}P_j = 0$. Тогда $R^h_{ijk} \in C^1$ и, как уже упоминалось, в этом случае справедливы тождества Бианки и на их основании $P_k = 0$. Тогда $P_{ijk} = 0$. Очевидно, при $n > 2$ выполняются условия конформной евклидовости. С другой стороны, если $C^h_{ijk} \neq 0$, то из (8) следует оценка $p \leq n$.

Имеет место

Теорема 3. *Компактное риманово пространство $V_n \in C^3$, в котором в любой точке $P_{ijk} \neq 0$, не допускает конформное отображение на пространство Эйнштейна $\overline{V}_n \in C^2$.*

Доказательство. Поскольку пространство компактное, то для функции s существует экстремум в некоторой точке x_0. В этой точке производные функции s обращаются в нуль. Тогда из (7) вытекает $s = 0$, что противоречит существованию конформного отображения. □

Литература

[1] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия* (Ин. лит., М., 1948).

[2] Петров А.З. *Новые методы в теории относительности* (Наука, М., 1965).

[3] Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии.* Т. I (Гостехиздат, М.–Л., 1939).

[4] Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. *Введение в новые методы дифференцияальной геометрии.* Т. II (Гостехиздат, Ин. лит., М., 1949).

[5] Денисов В.И. *Специальные конформные отображения в общей теории относительности*, Укр. геометрич. сб. **28**, 43–50 (1985).

[6] Brinkmann H.W. *Einstein spaces which mapped conformally on each other*, Math. Ann. **94**, 117–145 (1925).

[7] Микеш Й., Гаврильченко М.Л., Гладышева Е.И. *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна*, Вестн. Моск. ун-та, № 3, 13–17 (1994).

[8] Микеш Й., Гаврильченко М.Л., Гладышева Е.И. *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна*, Тез. докл. Ч. I. Международн. научн. конф. “Лобачевский и современная геометрия”, Казань, 18–22 августа 1992 г. (Казанск. ун-т, 1992), с. 64.

[9] Mikeš J. *Holomorphically projective mappings and their generalizations*, J. Math. Sci. (New York) **89** (3), 1334–1353 (1998).

[10] Mikeš J., Vanžurová A., Hinterleitner I. *Geodesic mappings and some generalizations* (Palacky University Press, Olomouc, 2009).

[11] Евтушик Л.Е., Киосак В.А., Микеш Й. *О мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна*, Изв. вузов. Матем., № 8, 36–41 (2010).

[12] Gover A.R., Nurowski P. *Obstructions to conformally Einstein metrics in n dimensions*, J. Geom. Phys. **56** (3), 450–484 (2006).

[13] Hammerl M., Somberg P., Souček V., Šilhan J. *Invariant prolongation of overdetermined PDEs in projective, conformal, and Grassmannian geometry*, Ann. Global Anal. Geom. **42** (1), 121–145 (2012).

[14] Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств (Наука, М., 1979).

[15] Yano K., Bochner S. *Curvature and Betti numbers* (Princeton Univ. Press, 1953).

[16] Hinterleitner I., Mikeš J. *Geodesic mappings and Einstein spaces*, Geom. Methods in Phys. (Birkhauser, Basel, 2013), 331–336. arXiv:1201.2827v1 [math.DG], 2012.

[17] Hinterleitner I., Mikeš J. *On holomorphically projective mappings from manifolds with equiaffine connection onto Kähler manifolds*, Arch. Math. (Brno) **49** (5), 295–302 (2013).

Л.Е. Евтушик

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Воробьевы горы, д. 1, Москва, 119991, Россия

И. Гинтерлейтнер

Технологический университет Брно,
ул. Жижкова, д. 17, г. Брно, 60200, Чешская республика,

e-mail: Hinterleitner.Irena@seznam.cz

Н.И. Гусева

Московский педагогический государственный университет,
ул. Малая Пироговская, д. 1, г. Москва, 119882, Россия,

e-mail: Ngus12@mail.ru

Й. Микеш

Университет Палацкого,
ул. 17 Листопаду д. 12, г. Оломоуц, 77146, Чешская республика,

e-mail: Josef.Mikes@upol.cz

L.E. Evtushik, *I. Hinterleitner, N.I. Guseva, and J. Mikeš*

Conformal mappings onto Einstein spaces

Abstract. In the present paper we study conformal mappings of Riemannian manifolds onto an Einstein manifold for the minimal condition on the differentiability class of these manifolds. We show for which conditions the corresponding equations obtained by J. Mikeš, M.L. Gavril'chenko and E.I. Gladyscheva, which defined these mappings, are linear.

We obtain the number of necessary parameters on which depends the general solution of fundamental system of equations.

Keywords: (pseudo-)Riemannian space, conformal mapping, Einstein space.

L.E. Evtushik

Moscow State University,
1 Vorob'yovy Gory, Moscow, 119991, Russia

I. Hinterleitner

Brno University of Technology,
17 Žižkova str., Brno, 60200, Czech Republic,

e-mail: Hinterleitner.Irena@seznam.cz

N.I. Guseva

Moscow State Pedagogical University,
1 Malaya Pirogovskaya str., Moscow, 119882 Russia,

e-mail: Ngus12@mail.ru

J. Mikeš

Palacky University,
12 17.listopadu str., Olomouc, 77 146, Czech Republic,

e-mail: Josef.Mikes@upol.cz