

УДК 532.5.031:534-14

ДЕФОРМАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В ЖИДКОСТИ ПРИ АКУСТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.А. Аганин, А.И. Давлетшин

*Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН,
г. Казань, 420111, Россия*

Аннотация

Проведено исследование особенностей деформирования взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости, находящихся в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны, где давление изменяется по гармоническому закону. Рассмотрена одна из простейших неосесимметричных конфигураций, состоящая из пяти пузырьков, расположенных на двух ортогональных прямых. Один из пузырьков находится в точке пересечения этих прямых, а другие равноудалены от него. Использована математическая модель, представляющая собой полученную методом сферических функций систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров и векторов, характеризующих малое отклонение поверхности пузырьков от сферической. Представлена методика оценки малых трехмерных отклонений формы пузырьков от сферической в виде сферических гармоник. Показано, что для таких оценок наиболее удобным является параметр, представляющий собой отношение максимального суммарного отклонения от сферической формы поверхности к радиусу пузырька. Установлено, что в рассматриваемой конфигурации форма центрального пузырька оказывается практически сфероидальной (с осью симметрии сфероидальной несферичности, ортогональной плоскости, в которой расположены центры пузырьков). И это весьма неожиданно, поскольку возникновение сфероидальной несферичности естественно для пузырька, находящегося между двумя другими пузырьками, тогда как в рассматриваемом случае с четырьмя соседними пузырьками можно было ожидать, что максимальный уровень несферичности будет обусловлен деформациями в виде гармоник, определяемых присоединённым полиномом Лежандра четвертой степени.

Ключевые слова: динамика пузырьков, радиальные колебания пузырьков, взаимодействие пузырьков, малые деформации пузырьков, пространственные перемещения пузырьков, акустическое воздействие, метод сферических функций, уравнения взаимодействия пузырьков

Введение

Динамика парогазовых пузырьков в акустических полях представляет большой научный интерес. Вместе с тем она находит и широкое практическое применение. Воздействие на пузырьки интенсивным ультразвуком используется, в частности, в медицине для диагностики [1], доставки лекарств в органические клетки посредством сонопорации [2], дробления камней в почках и желчном пузыре, стерилизации хирургических инструментов, в химии для интенсификации химических реакций [3], в биологии для обеззараживания жидкости от различных вредных микробов и бактерий, во многих областях промышленности для очистки твердых поверхностей от различных загрязнений [4, 5].

Динамика пузырьков в жидкости зависит от их размеров, физических параметров содержащейся в них парогазовой среды, параметров окружающей их жидкости, закона акустического воздействия. Важную роль в реальных условиях играет также и гидродинамическое взаимодействие между пузырьками [6–10]. По мере уменьшения межпузырькового расстояния влияние такого взаимодействия возрастает. Его результатом может быть ослабление или усиление радиальных колебаний пузырьков [11, 12], их пространственное перемещение [13], деформирование их поверхностей [14, 15] и т.д. Наименее изученным к настоящему времени является эффект взаимодействия на деформирование пузырьков. При этом рассматривался преимущественно двумерный (осесимметричный) случай, когда центры взаимодействующих пузырьков расположены на одной прямой, являющейся осью симметрии задачи (то есть когда пузырьки образуют стример). В частности, в [14] методом сферических функций получены уравнения взаимодействия слабо несферических пузырьков в стримере, описывающие изменение радиусов пузырьков, координаты их центров на прямой, проходящей через эти центры, и амплитуд отклонений их формы от сферической в виде полиномов Лежандра. Данные уравнения имеют 4-й порядок точности относительно малого параметра $\delta = R/D$, где R – характерный радиус пузырьков, D – характерное расстояние между их центрами. Параметр δ является мерой относительной удаленности пузырьков друг от друга: чем меньше расстояние между пузырьками и/или больше радиус пузырьков, тем больше δ и тем больше эффект их взаимодействия. В [16] рассмотрены деформации пузырьков, взаимодействующих в бегущей акустической волне.

Настоящая работа посвящена изучению малых деформаций взаимодействующих пузырьков в трехмерном (пространственном) случае. Для этого используется математическая модель, являющаяся небольшой, но для целей настоящей работы существенной модификацией модели работы [17]. Она представляет собой полученную методом сферических функций систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров и векторов, характеризующих малое отклонение поверхности пузырьков от сферической. Модификация состоит в том, что в настоящей работе уравнения для деформаций пузырьков имеют более высокий порядок точности относительно параметра δ , так что они позволяют более корректно описывать высокочастотную несферичность пузырьков. Отметим, что для описания малых трехмерных деформаций пузырьков можно воспользоваться также и уравнениями работы [18]. Однако уравнения настоящей работы значительно более удобны для применения.

1. Постановка задачи

Изучаются особенности деформирования взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости, находящихся в пучности интенсивной ультразвуковой стоячей волны, где давление p_∞ изменяется по гармоническому закону

$$p_\infty = p_0 - p_a \sin \omega t.$$

Здесь t – время, p_a , ω – амплитуда и частота колебаний, p_0 – статическое давление жидкости.

Рассматривается одна из простейших неосесимметричных конфигураций (рис. 1), состоящая из пяти пузырьков. Изначально (в момент $t = 0$) пузырьки – одинаковые сферические, их центры расположены в одной плоскости на двух ортогональных прямых, центр одного из пузырьков (центрального) находится в точке пересечения этих прямых, а другие пузырьки (боковые, периферийные) равноудалены от центрального.

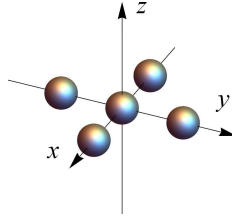


Рис. 1. Схема взаимного расположения пузырьков

В результате колебаний давления жидкости пузырьки совершают радиальные пульсации, которые, в свою очередь, вызывают их гидродинамическое взаимодействие. В результате гидродинамического взаимодействия пузырьки могут перемещаться в жидкости в пучности давления стоячей волны, а их поверхности могут испытывать пространственные деформации. Рассматриваемая конфигурация является простейшей моделью трехмерного кластера пузырьков. Основное внимание в настоящей работе направлено на изучение малых деформаций центрального пузырька.

Считается, что пузырьки заполнены воздухом, а жидкостью является вода при комнатных условиях. Принято, что скорость звука в жидкости $c_0 = 1500$ м/с, плотность жидкости $\rho_0 = 998$ кг/м³, статическое давление жидкости $p_0 = 1$ бар, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 0.0725$ Н/м, динамический коэффициент вязкости жидкости $\mu = 10^{-3}$ кг/(м·с), показатель адиабаты газа в пузырьках $\kappa = 1.4$, амплитуда колебаний давления в волне $p_a = 1.2$ бар, частота колебаний $\omega/2\pi = 20$ кГц. В начальный момент времени $t = 0$ радиусы пузырьков равны 3 мкм, расстояние между центрами боковых и центрального пузырьков $d_0 = 200$ мкм.

2. Математическая модель

Уравнение поверхности пузырьков $F_k(r_k, \theta_k, \varphi_k, t) = 0$ записывается в виде

$$\begin{aligned} F_k(r_k, \theta_k, \varphi_k, t) &= r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N \mathbf{a}_{nk}(t) \cdot \mathbf{Y}_n(\theta_k, \varphi_k) = \\ &= r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n a_{nk}^m(t) Y_n^m(\theta_k, \varphi_k) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots, K$, K – число пузырьков, $(r_k, \theta_k, \varphi_k)$ – сферическая система координат с началом отсчёта в центре k -го пузырька; $\mathbf{Y}_n(\theta_k, \varphi_k) = (Y_{nk}^{-n} - iY_{nk}^n, Y_{nk}^{-n+1} - iY_{nk}^{n-1}, \dots, Y_{nk}^0, \dots, Y_{nk}^{-n+1} + iY_{nk}^{n-1}, Y_{nk}^{-n} + iY_{nk}^n)$, Y_{nk}^m – сферические функции, определяемые по формуле

$$Y_{nk}^m = Y_n^m(\theta_k, \varphi_k) = \begin{cases} P_n^{|m|}(\cos \theta_k) \cos m \varphi_k, & m \leq 0, \\ P_n^{|m|}(\cos \theta_k) \sin m \varphi_k, & m > 0, \end{cases} \quad (2)$$

$P_n^{|m|}$ – присоединённый полином Лежандра степени n порядка $|m|$; $\mathbf{a}_{nk}(t) = ((a_{nk}^{-n} + ia_{nk}^n)/2, \dots, a_{nk}^0, \dots, (a_{nk}^{-n} - ia_{nk}^n)/2)$, a_{nk}^m – амплитуда отклонения поверхности k -го пузырька от сферической $r_k = R_k$ в виде поверхностной гармоники с номером n и порядком m ; N – максимум номера сферических гармоник в представлении поверхности пузырьков, i – мнимая единица.

Для описания совместной динамики пузырьков используется следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков R_k , радиус-векторов их центров \mathbf{p}_k и векторов \mathbf{a}_{nk} , определяющих несферичность пузырьков,

$$\begin{aligned} R_k \ddot{R}_k + \frac{3\dot{R}_k^2}{2} - \frac{3\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{110})}{8} + \frac{2\sigma}{\rho_0 R_k} - \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} + \psi_{0k} + \Delta_k = \\ = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{\dot{B}_{0j}}{d_{kj}} - \frac{B_{0j} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^2} - \frac{(R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j \mathbf{C}_{10kj})'}{2d_{kj}^2} - \frac{9B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{110})}{4d_{kj}^2} + \right. \\ \left. + \sum_{s=1, s \neq j}^K \frac{(R_j^3 B_{0s} \mathbf{C}_{01js} \mathbf{C}_{10kj})'}{2d_{kj}^2 d_{js}^2} + \sum_{s=1, s \neq k}^K \frac{9B_{0j} B_{0s} \mathbf{C}_{01kj} (\mathbf{C}_{01ks} \boldsymbol{\beta}_{110})}{8d_{kj}^2 d_{ks}^2} \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k \ddot{\mathbf{p}}_k + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k - 2\dot{R}_k \dot{\mathbf{p}}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211}) - \frac{7\dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{a}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211})}{6} - \frac{3\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{2k} \boldsymbol{\beta}_{211})}{2} + \\ + \psi_{1k} = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[\frac{3(R_k B_{0j} \mathbf{C}_{01kj})'}{d_{kj}^2} - \frac{3(R_k R_j^3 \dot{\mathbf{p}}_j \mathbf{C}_{11kj})'}{2d_{kj}^3} - \right. \\ \left. - \frac{6R_k B_{0j} \mathbf{C}_{01kj} \dot{d}_{kj}}{d_{kj}^3} - \frac{5R_k B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{02kj} \boldsymbol{\beta}_{211})}{d_{kj}^3} + \right. \\ \left. + \frac{3(B_{0j} \mathbf{C}_{01kj} (\mathbf{a}_{2k} \boldsymbol{\Upsilon}_{211}^2))'}{2d_{kj}^2} - \frac{B_{0j} (\dot{\mathbf{a}}_{2k} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{2k}) (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{121})}{d_{kj}^2} \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_k \ddot{\mathbf{a}}_{mk} + 3\dot{R}_k \dot{\mathbf{a}}_{mk} - (m-1)\dot{R}_k \dot{\mathbf{a}}_{mk} - \delta_{2m} \frac{27\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{112})}{8} + \\ + \frac{3}{2} \sum_{n=m-1}^{m+1} \left(\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{nk} \boldsymbol{\Upsilon}_{n1m}^2) - \frac{(m+1)(\dot{\mathbf{a}}_{nk} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{nk}) (\dot{\mathbf{p}}_k \boldsymbol{\beta}_{1nm})}{(n+1)} + \right. \\ \left. + \ddot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{a}_{nk} \boldsymbol{\Upsilon}_{n1m}^{2(2-m)/3}) \right) + \frac{(m^2-1)(m+2)\sigma \boldsymbol{\varepsilon}_{mk}}{\rho_0 R_k} + \psi_{mk} = \\ = \sum_{j=1, j \neq k}^K \left[-\frac{3(2m-1)(m+1)R_k^{m-2} B_{0j} \dot{\mathbf{p}}_k (\mathbf{C}_{0m-1kj} \boldsymbol{\beta}_{m-11m})}{2m d_{kj}^m} + \right. \\ \left. + \frac{(2m+1)(R_k^m B_{0j} \mathbf{C}_{0mkj})'}{d_{kj}^{m+1}} + \sum_{n=m-1}^{m+1} \left(\frac{3(B_{0j} \mathbf{a}_{nk} (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\Upsilon}_{1nm}^2))'}{2d_{kj}^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3(m+1)B_{0j} (\dot{\mathbf{a}}_{nk} + 2\dot{R}_k \boldsymbol{\varepsilon}_{nk}) (\mathbf{C}_{01kj} \boldsymbol{\beta}_{1nm})}{2(n+1)d_{kj}^2} \right) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь штрихи и точки сверху означают дифференцирование по времени, $m = 2, 3, \dots, N$, $\mathbf{p}_k = (p_k^{-1}, p_k^0, p_k^1)$, $p_k^{-1} = (x_k + iy_k)/2$, $p_k^0 = z_k$, $p_k^1 = (x_k - iy_k)/2$, x_k, y_k, z_k – координаты центра k -го пузырька, $\boldsymbol{\varepsilon}_{nk} = \mathbf{a}_{nk}/R_k$, d_{kj} – расстояние между центрами k -го и j -го пузырьков, p_k – давление газа в k -м пузырьке, ρ_0 – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения, δ_{nm} –

символ Кронекера, $B_{0k} = -R_k^2 \dot{R}_k$; $\mathbf{C}_{\gamma\zeta k j} = (C_{\gamma\zeta k j}^\zeta)$, $\beta_{\gamma\zeta\varrho} = (\beta_{\gamma\zeta\varrho}^\zeta)$ – матрицы, в которых $\zeta = -\gamma, -\gamma + 1, \dots, \gamma$, $\xi = -\varsigma, -\varsigma + 1, \dots, \varsigma$, $\vartheta = \varrho, \varrho - 1, \dots, -\varrho$,

$$C_{\gamma\zeta k j}^\zeta = (-1)^{\gamma+(|\zeta|+|\xi|-|\zeta-\xi|)/2} \frac{(\gamma + \varsigma - |\zeta - \xi|)!}{(\gamma - |\zeta|)!(\varsigma + |\xi|)!} Y_{\gamma+\zeta}^{\zeta-\xi}(\theta_{kj}, \varphi_{kj}),$$

$$\beta_{\gamma\zeta\varrho}^\zeta = \frac{\gamma(\gamma + 1) + \varsigma(\varsigma + 1) - \varrho(\varrho + 1)}{2} \alpha_{\gamma\zeta\varrho}^{\zeta\xi\vartheta},$$

$$\alpha_{\gamma\zeta\varrho}^{\zeta\xi\vartheta} = \frac{2\varrho + 1}{4\pi} \frac{(\varrho - |\vartheta|)!}{(\varrho + |\vartheta|)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta Y_\gamma^\zeta(\theta, \varphi) Y_\varsigma^\xi(\theta, \varphi) Y_\varrho^\vartheta(\theta, \varphi) d\theta d\varphi,$$

$\theta_{kj}, \varphi_{kj}$ – угловые координаты центра j -го пузырька в сферической системе с началом отчета в центре k -го, $\mathbf{\Upsilon}_{\gamma\zeta\varrho}^p = p\alpha_{\gamma\zeta\varrho} - \beta_{\gamma\zeta\varrho}$.

В уравнениях (3)–(5) векторы и матрицы умножаются общепринятым способом, например,

$$\dot{\mathbf{p}}_k \mathbf{C}_{10kj} = \sum_{\gamma=-1}^1 \sum_{\zeta=-1}^1 \dot{p}_k^\gamma C_{10kj}^{\zeta 0},$$

$$\dot{\mathbf{p}}_k (\dot{\mathbf{a}}_{2k} \beta_{211}) = \left(\sum_{\gamma=-1}^1 \sum_{m=-2}^2 \sum_{\zeta=-2}^2 \sum_{\xi=-1}^1 \dot{p}_k^\gamma \dot{a}_{2k}^m \beta_{211}^{\zeta\xi\vartheta} \right), \vartheta = 1, 0, -1,$$

$$\varepsilon_{nk} (\mathbf{C}_{pqkj} \beta_{1n\varrho}) = \left(\sum_{m=-n}^n \sum_{\gamma=-p}^p \sum_{\varsigma=-q}^q \sum_{\zeta=-1}^1 \sum_{\xi=-n}^n \varepsilon_{nk}^m C_{pqkj}^{\gamma\zeta} \beta_{1n\varrho}^{\zeta\xi\vartheta} \right), \vartheta = \varrho, \varrho - 1, \dots, -\varrho.$$

Эффекты вязкости и сжимаемости жидкости описываются без учёта взаимодействия между пузырьками, так что поправки $\psi_{0k}, \psi_{1k}, \psi_{mk}$ и Δ_k определяются следующим образом:

$$\psi_{0k} = \frac{4\nu \dot{R}_k}{R_k}, \psi_{1k} = \frac{12\nu \dot{\mathbf{p}}_k}{R_k}, \psi_{mk} = \frac{2(m+1)\nu}{R_k} \left((m+2)\dot{\mathbf{a}}_{mk} + 2(m-1)\dot{R}_k \varepsilon_{mk} \right),$$

$$\Delta_k = -\frac{\dot{R}_k}{c_0} \left(R_k \ddot{R}_k + \frac{\dot{R}_k^2}{2} + \frac{p_k - p_\infty}{\rho_0} \right) - \frac{R_k}{c_0} \left(\frac{\dot{p}_k - \dot{p}_\infty}{\rho_0} - \frac{4\nu \ddot{R}_k}{R_k} \right),$$

где $\nu = \mu/\rho_0$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости, c_0 – скорость звука в жидкости.

Решение системы (3)–(5) находится численно при заданных начальных значениях $R_k, \dot{R}_k, \mathbf{p}_k, \dot{\mathbf{p}}_k, \mathbf{a}_{mk}, \dot{\mathbf{a}}_{mk}$.

3. Особенности оценки малых трехмерных деформаций пузырьков

В настоящей работе рассматриваются малые отклонения формы пузырька от сферической. В связи с этим возникает вопрос о характеристике величины таких отклонений в рамках принятой модели, в которой уравнение поверхности пузырька имеет вид (1). На первый взгляд представляется естественным для оценки уровня малой несферичности пузырьков в виде отдельных сферических гармоник принять величину $|\varepsilon_{nk}^m|$, где $\varepsilon_{nk}^m = a_{nk}^m/R_k$ – относительная амплитуда отклонения. Однако это неудобно, поскольку система сферических функций Y_n^m , ортогональных в смысле скалярного произведения

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

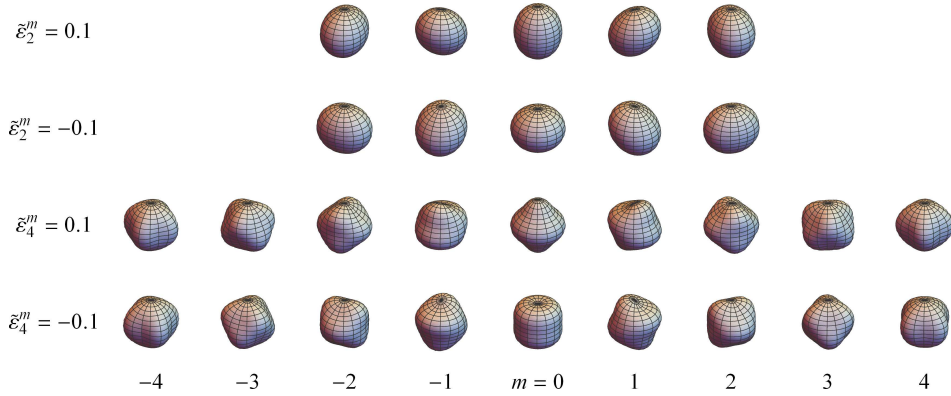


Рис. 2. Формы поверхностей пузырьков с несферичностью в виде второй (две верхние строки) и по четвертой (две нижние строки) гармоникам. Во всех случаях $|\tilde{\varepsilon}_{nk}^m| = 0.1$

не является нормированной. Действительно, имеем

$$(Y_n^m, Y_n^m) = (c_n^m)^2,$$

где

$$c_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{4\pi}{2n+1}}, & m = 0, \\ \sqrt{\frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!}}, & m \neq 0. \end{cases}$$

Значения c_n^m для гармоник с номерами $n = 2, 3, 4, 5$ представлены в табл. 1. Видно, что с увеличением n значения c_n^m все более отличаются от 1. Это означает, что с увеличением n «ненормированность» базиса Y_n^m становится все более существенной.

Табл. 1

Значения нормировочного коэффициента c_n^m для гармоник с $n = 2, 3, 4, 5$

$n \setminus m$	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5
2	1.5853	2.7459	5.4917			
3	1.3398	3.2819	10.378	25.422		
4	1.1816	3.7367	15.853	59.318	167.78	
5	1.0688	4.1396	21.904	107.31	455.28	1439.7

Во избежание указанного недостатка для оценки величины малой несферичности пузырьков в виде отдельных сферических гармоник удобнее принять величину $|\tilde{\varepsilon}_{nk}^m|$, где $\tilde{\varepsilon}_{nk}^m = \tilde{a}_{nk}^m/R_k$, \tilde{a}_{nk}^m – размерная амплитуда отклонения, определяемая следующим представлением поверхности пузырька:

$$F_k(r_k, \theta_k, \varphi_k, t) = r_k - R_k(t) - \sum_{n=2}^N \sum_{m=-n}^n \tilde{a}_{nk}^m(t) \tilde{Y}_n^m(\theta_k, \varphi_k) = 0,$$

где $\tilde{Y}_n^m = Y_n^m/c_n^m$ – ортонормированный базис.

Рис. 2 иллюстрирует формы поверхностей пузырьков при наличии несферичности в виде отдельных сферических гармоник. Для примера выбраны гармоники с номерами $n = 2, 4$, которые, как будет видно ниже, являются для настоящей работы наиболее важными.

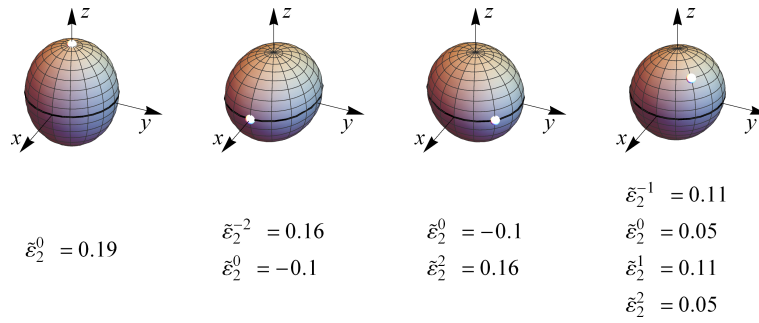


Рис. 3. Один и тот же сфероидальный пузырек при четырех положениях относительно неподвижных координат x, y, z и соответствующие ненулевые значения параметров $\tilde{\varepsilon}_2^m$, определяющих сфероидальную несферичность его формы. Жирные черные линии – части контуров поверхности пузырька в его сечении плоскостью x, y , белым цветом отмечены точки поверхности пузырька, находящиеся на оси его симметрии

Другой аспект, который следует иметь в виду при оценке величины несферичности пузырьков, состоит в том, что относительные амплитуды $\tilde{\varepsilon}_n^m$ отклонений формы пузырьков от сферической в виде отдельных сферических гармоник зависят от положения пузырьков относительно принятой неподвижной системы отсчета x, y, z . Это обстоятельство иллюстрирует рис. 3 на примере пузырька сфероидальной формы, слегка вытянутого вдоль оси симметрии. Видно, что численные значения $\tilde{\varepsilon}_2^m$, определяющие несферичность этого пузырька при его четырех представленных на рис. 3 положениях относительно x, y, z , заметно различаются. Во-первых, по мере смещения по рисунку слева направо число ненулевых значений $\tilde{\varepsilon}_2^m$ возрастает от одного до четырех. Во-вторых, максимальное по m значение уменьшается (от 0.19 до 0.11).

С учетом вышесказанного представляется, что для оценки уровня несферичности пузырька в виде гармоник с номером n наиболее целесообразным является использование величины $|\varepsilon_n|$, определяемой формулой

$$|\varepsilon_n| = \max_{\theta, \varphi} \left| \sum_{m=-n}^n \varepsilon_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) \right|.$$

Эта величина не зависит от положения пузырька относительно неподвижной системы отсчета x, y, z . Она не зависит также и от m . Отметим, что $\varepsilon_n^m Y_n^m(\theta, \varphi) = \tilde{\varepsilon}_n^m \tilde{Y}_n^m(\theta, \varphi)$, так что нормировка функций $Y_n^m(\theta, \varphi)$ не требуется.

В настоящей работе несферичность пузырьков с читается малой в том смысле, что величиной $|\varepsilon_n|^2$ по сравнению с 1 можно пренебречь.

4. Особенности малых деформаций центрального пузырька

Особенности динамики центрального пузырька в рассматриваемой конфигурации из пяти пузырьков (рис. 1) иллюстрирует рис. 4. Видно, что пузырек совершает периодические радиальные колебания в такт с изменением давления жидкости в стоячей волне. При этом в ходе первого наиболее интенсивного за период расширения-сжатия пузырька его радиус изменяется примерно в четыре раза.

Расстояние между центральным и соседними пузырьками периодически уменьшается. Его уменьшение реализуется в фазах быстрого сжатия пузырька, поэтому имеет скачкообразный характер. Положение центрального пузырька в жидкости остается неизменным в силу взаимной компенсации действующих на него сил

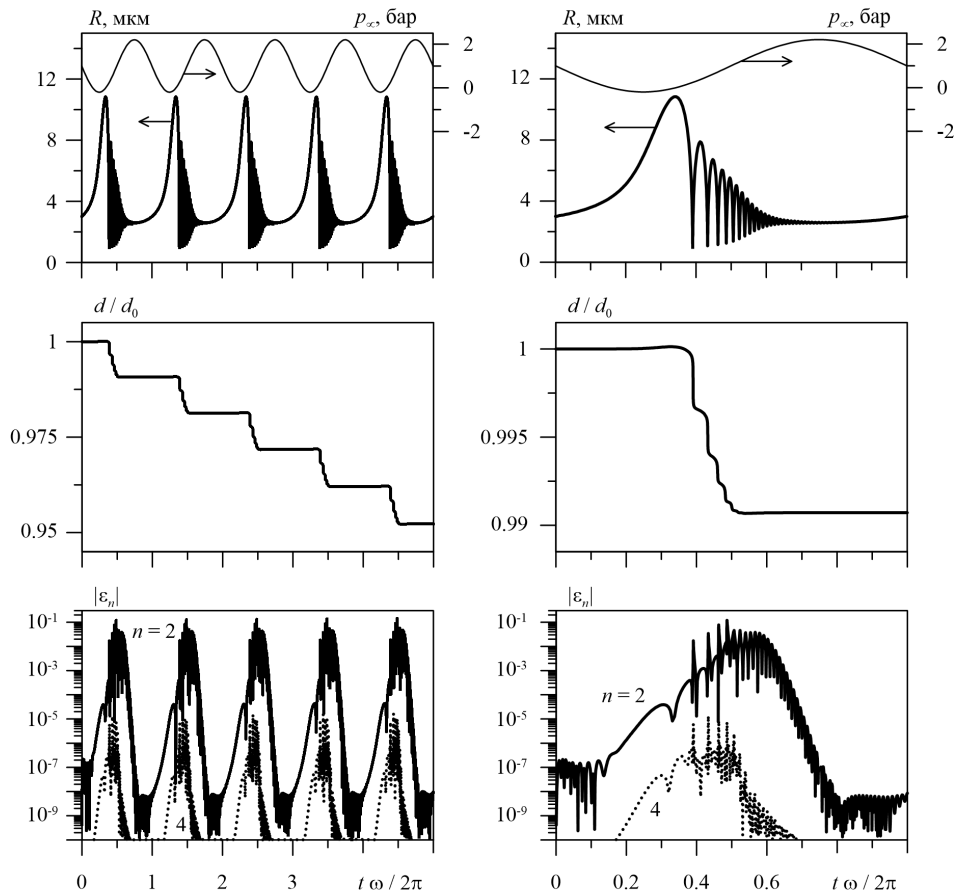


Рис. 4. Изменение в ходе пяти (слева) и одного (справа) периодов стоячей волны: давления жидкости в пучности волны p_{∞} , радиуса центрального пузырька R , относительного расстояния между центрами центрального и соседних пузырьков d/d_0 и параметров $|\epsilon_2|$ и $|\epsilon_4|$, характеризующих несферичность центрального пузырька в виде гармоник с $n = 2, 4$

притяжения и отталкивания со стороны других пузырьков из-за их симметричного расположения относительно центрального. Сближение центрального пузырька с периферийными обусловлено смещением периферийных.

Наибольший интерес для настоящей работы представляют деформации центрального пузырька. На рис. 4 (нижний ряд) представлено изменение параметра $|\epsilon_n|$, характеризующего несферичность центрального пузырька в виде гармоник с номерами $n = 2, 4$. Следует отметить, что из-за попарной симметричности расположения периферийных пузырьков относительно центрального деформации центрального пузырька в виде гармоник с нечетными номерами $n = 3, 5, \dots$ не возникают. Кроме того, амплитуда деформаций по четным гармоникам с номерами $n > 4$ меньше, чем у представленных на рис. 4.

На рис. 4 видно, что в процессе колебаний параметр $|\epsilon_2|$, характеризующий несферичность центрального пузырька в виде гармоник с $n = 2$, принимает значения, на 3–4 порядка превышающие значения параметра $|\epsilon_4|$, характеризующего несферичность центрального пузырька в виде гармоник с $n = 4$. Это означает, что в рассматриваемой конфигурации форма пузырька оказывается практически

сфероидальной (с осью симметрии сфероидальной несферичности, ортогональной плоскости, в которой расположены центры пузырьков), что весьма неожиданно. Действительно, возникновение сфероидальной несферичности естественно для пузырька, находящегося между двумя другими пузырьками, тогда как в рассматриваемом случае с четырьмя симметрично расположенными соседями естественно ожидать, что максимальный уровень несферичности будет обусловлен деформациями в виде гармоник с $n = 4$.

Следует отметить, что возникновение указанной сфероидальной несферичности центрального пузырька в рассматриваемой конфигурации было недавно отмечено в [17]. Однако в силу недостаточной точности модели работы [17] в ней не удалось выявить возникающих в такой конфигурации деформаций в виде гармоник с $n \geq 4$, а следовательно, и не удалось провести сопоставление их уровня с уровнем сфероидальных деформаций.

Заключение

Изучены особенности деформирования взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости в акустическом поле. Рассмотрен случай пяти пузырьков, один из которых (центральный) находится в точке пересечения двух ортогональных прямых, а другие (боковые) расположены на этих прямых на одинаковом удалении от центрального. Данная конфигурация является простейшей моделью трехмерного кластера пузырьков. Основное внимание направлено на изучение деформирования центрального пузырька. Динамика взаимодействующих пузырьков описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно радиусов пузырьков, радиус-векторов их центров и векторов, характеризующих малое отклонение поверхности пузырьков от сферической.

Проведено рассмотрение методики оценки малых трехмерных отклонений формы пузырьков от сферической в виде сферических гармоник с номером $n = 2, 3, \dots$. Показано, что для таких оценок наиболее удобным является параметр $|\varepsilon_n|$, представляющий собой отношение максимального отклонения от сферической формы поверхности с суммарной несферичностью в виде гармоник с номером n к радиусу указанной сферической формы. Преимущество использования этого параметра состоит в том, что он не зависит ни от положения поверхности относительно неподвижных координат, ни от необходимости нормировки сферических функций.

В рассматриваемой конфигурации центральный пузырек в силу его неподвижности деформируется только по четным сферическим гармоникам. Установлено, что максимальными оказываются деформации по второй гармонике ($n = 2$). При этом форма центрального пузырька оказывается практически сфероидальной с осью симметрии, ортогональной плоскости, в которой расположены центры пузырьков.

Литература

1. Miller D.L., Qudus J. Diagnostic ultrasound activation of contrast agent gas bodies induces capillary rupture in mice // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. – 2000. – V. 97, No 18. – P. 10179–10184. – doi: 10.1073/pnas.180294397.
2. Seemann S., Hauff P., Schultze-Mosgau M., Lehmann C., Reszka R. Pharmaceutical evaluation of gas-filled microparticles as gene delivery system // Pharm. Res. – 2002. – V. 19, No 3. – P. 250–257.
3. Suslick K.S. Sonochemistry // Science. – 1990. – V. 247. – P. 1439–1445. – doi: 10.1126/science.247.4949.1439.

4. *Kieser B., Phillion R., Smith S., McCartney T.* The application of industrial scale ultrasonic cleaning to heat exchangers // Proc. Int Conf. on Heat Exchanger Fouling and Cleaning. – 2011. – P. 336–366.
5. *Mason T.J.* Ultrasonic cleaning: An historical perspective // Ultrason. Sonochem. – 2016. – V. 29. – P. 519–523. – doi: 10.1016/j.ultsonch.2015.05.004.
6. *Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.D., Lauterborn W.* Bjerknes force between small cavitation bubbles in a strong acoustic field // Phys. Rev. E. – 1997. – V. 56, No 3. – P. 2924–2931.
7. *Konovalova S., Akhatov I.S.* Structure formation in acoustic cavitation // Multiphase Sci. Technol. – 2005. – V. 17, No 3. – P. 343–371. – doi: 10.1615/MultScienTechn.v17.i4.30.
8. *Pelekasis N.A., Gaki A., Doinikov A., Tsamopoulos J.A.* Secondary Bjerknes forces between two bubbles and the phenomenon of acoustic streamers // J. Fluid Mech. – 2004. – V. 500. – P. 313–347. – doi: 10.1017/S002211200300736.
9. *Doinikov A.A.* Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields // J. Acoust. Soc. Am. – 2004. – V. 116, No 2. – P. 821–827.
10. *Маргулис И.М., Маргулис М.А.* Динамика взаимодействия пузырьков в кавитационном облаке // Журн. физ. химии. – 2004. – Т. 78, № 7. – С. 1326–1337.
11. *Губайдуллин А.А., Губкин А.С.* Исследование динамики пузырькового кластера // Вестн. Тюмен. гос. ун-та. – 2013. – № 7. – P. 91–97.
12. *Губайдуллин А.А., Губкин А.С.* Поведение пузырьков в кластере при акустическом воздействии // Современная наука: идеи, исследования, результаты, технологии. – 2013. – № 1. – P. 363–367.
13. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Взаимодействие сферических пузырьков с центрами на одной прямой // Матем. моделирование. – 2013. – Т. 25, № 12. – С. 3–18.
14. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Моделирование взаимодействия газовых пузырьков в жидкости с учётом их малой несферичности // Матем. моделирование. – 2009. – Т. 21, № 6. – С. 89–102.
15. *Аганин А.А., Давлетшин А.И., Топорков Д.Ю.* Деформация расположенных в линию кавитационных пузырьков при их сильном расширении-сжатии // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 67–78.
16. *Аганин И.А., Давлетшин А.И.* Динамика двух газовых пузырьков в жидкости в ультразвуковой бегущей волне // Труды Ин-та механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского науч. центра РАН. – 2017. – Т. 12, № 1. – С. 33–39.
17. *Аганин А.А., Давлетшин А.И.* Гидродинамическое взаимодействие слабонесферических газовых пузырьков в жидкости в трёхмерной постановке задачи // Труды Ин-та механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского науч. центра РАН. – 2017. – Т. 12, № 1. – С. 51–58.
18. *Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S.* Dynamics of a cluster of bubbles in a liquid. Theoretical analysis // JSME Int. J., Ser. B. – 1994. – V. 37, No 2. – P. 297–305.

Поступила в редакцию
17.04.18

Аганин Александр Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: aganin@kfti.knc.ru

Давлетшин Анас Ильгизович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт механики и машиностроения ФИЦ Казанский научный центр РАН
ул. Лобачевского, д. 2/31, г. Казань, 420111, Россия
E-mail: anas.davletshin@gmail.com

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2018, vol. 160, no. 4, pp. 657–669

Deformation of Interacting Gas Bubbles in Liquid under Acoustic Excitation

*A. A. Aganin**, *A. I. Davletshin***

*Institute of Mechanics and Engineering, FRC Kazan Scientific Center,
Russian Academy of Sciences, Kazan, 420111 Russia
E-mail: *aganin@kfti.knc.ru, **anas.davletshin@gmail.com*

Received April 17, 2018

Abstract

The deformation of interacting bubbles in liquid in the pressure antinode of a standing ultrasound wave where the pressure varies harmonically has been studied. One of the simplest non-axisymmetric configurations – comprising five bubbles located on two orthogonal straight lines – has been considered. One of the bubbles is at the point of intersection of those lines, the others are equally distant from it. We have applied a mathematical model, a set of the ordinary differential equations of the second order in the bubble radii, the bubble center position-vectors, and the vectors characterizing small deviations of the shape of the bubbles from the spherical one in the form of spherical harmonics. The results show that the shape of the central bubble in the considered configuration turns out to be essentially spheroidal (with the axis of the spheroidal non-sphericity being orthogonal to the plane containing the bubble centers), which is quite surprising, because the spheroidal non-sphericity is typical of a bubble located between two other bubbles, whereas in the case under study with four neighboring bubbles one may expect that the maximum non-sphericity level will be due to the deformations in the form of harmonics defined by the associated Legendre polynomial of the fourth order.

Keywords: bubble dynamics, radial bubble oscillations, bubble interaction, small bubble deformations, bubble translations, acoustic excitation, spherical function method, interacting bubble equations

Figure Captions

Fig. 1. Schematic arrangement of bubbles.

Fig. 2. The shapes of the bubble surfaces with nonsphericity in the form of the second (two upper lines) and fourth (two lower lines) harmonics. In all the cases, $|\tilde{\varepsilon}_{n k}^m| = 0.1$.

Fig. 3. The same spheroidal bubble at four positions relative to the fixed coordinates x , y , z and the corresponding non-zero values of the parameters $\tilde{\varepsilon}_2^m$ that determine the spheroidal nonsphericity of the bubble shape. Fat black lines represent parts of the bubble surface contours in the bubble (x, y) -plane section, the bubble surface points located on the bubble symmetry axis are shown in white color.

Fig. 4. The change, during five periods (left) and one period (right) of the standing wave, of: the antinode liquid pressure p_∞ , the central bubble radius R , the relative distance d/d_0 between the centers of the central and neighboring bubbles, and the parameters $|\varepsilon_2|$ and $|\varepsilon_4|$ characterizing the nonsphericity of the central bubble in the form of harmonics with $n = 2, 4$.

References

1. Miller D.L., Quddus J. Diagnostic ultrasound activation of contrast agent gas bodies induces capillary rupture in mice. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.*, 2000, vol. 97, no. 18, pp. 10179–10184. doi: 10.1073/pnas.180294397.
2. Seemann S., Hauff P., Schultze-Mosgau M., Lehmann C., Reszka R. Pharmaceutical evaluation of gas-filled microparticles as gene delivery system. *Pharm. Res.*, 2002, vol. 19, no. 3, pp. 250–257. doi: 10.1023/A:1014430631844.
3. Suslick K.S. Sonochemistry. *Science*, 1990, vol. 247, pp. 1439–1445. doi: 10.1126/science.247.4949.1439.
4. Kieser B., Phillion R., Smith S., McCartney T. The application of industrial scale ultrasonic cleaning to heat exchangers. *Proc. Int. Conf. on Heat Exchanger Fouling and Cleaning*, 2011, pp. 336–366.
5. Mason T.J. Ultrasonic cleaning: An historical perspective. *Ultrason. Sonochem.*, 2016, vol. 29, pp. 519–523. doi: 10.1016/j.ultsonch.2015.05.004.
6. Mettin R., Akhatov I., Parlitz U., Ohl C.D., Lauterborn W. Bjerknes force between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Phys. Rev. E.*, 1997, vol. 56, no. 3, pp. 2924–2931. doi: 10.1103/PhysRevE.56.2924.
7. Konovalova S., Akhatov I. Structure formation in acoustic cavitation. *Multiphase Sci. Technol.*, 2005, vol. 17, no. 3, pp. 343–371. doi: 10.1615/MultScienTechn.v17.i4.30.
8. Pelekasis N.A., Gaki A., Doinikov A., Tsamopoulos J.A. Secondary Bjerknes forces between two bubbles and the phenomenon of acoustic streamers. *J. Fluid Mech.*, 2004, vol. 500., pp. 313–347. doi: 10.1017/S0022112003007365.
9. Doinikov A.A. Mathematical model for collective bubble dynamics in strong ultrasound fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004, vol. 116, no. 2, pp. 821–827. doi: 10.1121/1.1768255.
10. Margulis I.M., Margulis M.A. Interaction dynamics of bubbles in a cavitation cloud. *Russ. J. Phys. Chem.*, 2004, vol. 78, no. 7, pp. 1159–1170.
11. Gubaidullin A.A., Gubkin A.C. Investigation of bubble cluster dynamics. *Vestn. Tyumen. Gos. Univ.*, 2013, no. 7, pp. 91–97. (In Russian)
12. Gubaidullin A.A., Gubkin A.C. Behavior of bubbles in a cluster under acoustic influence. *Sovrem. Nauka: Idei, Issled., Resul'taty, Tekhnol.*, 2013, no. 1, pp. 363–367. (In Russian)
13. Aganin A.A., Davletshin A.I. Interaction of spherical bubbles with centers located on the same line. *Mat. Model.*, 2013, vol. 25, no. 12, pp. 3–18. (In Russian)
14. Aganin A.A., Davletshin A.I. Simulation of interaction of gas bubbles in a liquid with allowing for their small asphericity. *Mat. Model.*, 2009, vol. 21, no. 6, pp. 89–102. (In Russian)

15. Aganin A.A., Davletshin A.I., Toporkov D.Yu. Deformation of cavitation bubbles arranged in a line during their strong expansion-compression. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 67–78. (In Russian)
16. Aganin I.A., Davletshin A.I. Dynamics of two gas bubbles in liquid in an ultrasonic traveling wave. *Tr. Inst. Mekh. im. R.R. Mavlyutova Ufim. Nauchn. Tsentra Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 12, no. 1, pp. 33–39. (In Russian)
17. Aganin A.A., Davletshin A.I. Hydrodynamic interaction of weakly nonspherical gas bubbles in a liquid in the three-dimensional problem statement. *Tr. Inst. Mekh. im. R.R. Mavlyutova Ufim. Nauchn. Tsentra Ross. Akad. Nauk*, 2017, vol. 12, no. 1, pp. 51–58. (In Russian)
18. Takahira H., Akamatsu T., Fujikawa S. Dynamics of a cluster of bubbles in a liquid. Theoretical analysis. *JSME Int. J., Ser. B.*, 1994. vol. 37, no. 2, pp. 297–305. doi: 10.1299/jsmeb.37.297.

⟨ **Для цитирования:** Аганин А.А., Давлетшин А.И. Деформации взаимодействующих газовых пузырьков в жидкости при акустическом воздействии // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2018. – Т. 160, кн. 4. – С. 657–669. ⟩

⟨ **For citation:** Aganin A.A., Davletshin A.I. Deformation of interacting gas bubbles in liquid under acoustic excitation. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 4, pp. 657–669. (In Russian) ⟩