

УДК 517.54

## СПЕКТР ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ И ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*И.Р. Каюмов*

### Аннотация

Настоящий обзор посвящен описанию наиболее важных результатов об оценках интегральных средних для производных конформных отображений круга на односвязные области на плоскости. Подробно описаны результаты, связанные с оценками спектра интегральных средних вблизи нуля, а также в точке  $t = -2$ . Дано описание результатов, связанных с законом повторного логарифма для конформных отображений, доказанного Н.Г. Макаровым в 1985 г. Показана связь между спектром интегральных средних и законом повторного логарифма. На этой основе усилены оценки гармонической меры на жордановых кривых через меры Хаусдорфа.

### Введение

Пусть  $\Omega$  – односвязная область на плоскости, граница которой содержит не менее двух точек,  $f$  – конформное отображение круга  $\mathbb{D}$  на  $\Omega$ . В силу хорошо известных теорем искажения (см., например, [1]) имеет место соотношение

$$|f(re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^2, \quad r \rightarrow 1.$$

Х. Правиц [2], обобщая результат Дж. Литтлвуда [3], показал, что для любого фиксированного  $p > 1/2$  выполняется соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{2p-1}, \quad r \rightarrow 1.$$

Отсюда видно, что при интегрировании по линиям уровня порядок роста модуля однолистной функции уменьшается на единицу.

Поскольку

$$|f'(re^{i\theta})| = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^3, \quad r \rightarrow 1,$$

то естественно ожидать, что для любого фиксированного  $p > 1/3$  выполняется соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right)^{3p-1}, \quad r \rightarrow 1.$$

Это было подтверждено Й. Фенгом и Т. МакГрегором в работе [4], однако лишь для случая  $p \geq 2/5$ . Н.Г. Макаровым [5] показано, что этот результат неверен

для  $p$ , близких к  $1/3$ . Ниже мы покажем, что этот результат неверен при  $p \leq 0.341$  (имеется гипотеза, что точная граница здесь равна  $6 - 4\sqrt{2} = 0.343\dots$ ). Итак, Н.Г. Макаровым установлена существенная разница между интегральными средними однолистной функции и ее производной. Причины этой разницы не были ясны до середины 80-х гг. XX в. Для исследования этих вопросов Н.Г. Макаровым был введен спектр интегральных средних

$$\beta_f(p) = \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta}{|\log(1-r)|},$$

который фактически является порядком роста интегральных средних производной. Для «хороших» областей (например, для областей с ограниченным граничным вращением)  $\beta_f(p)$  является кусочно-линейной функцией от  $p$ .

Отметим три важнейших результата, касающихся спектра интегральных средних.

1) Л. Карлесон и П. Джонс [6] показали, что

$$\sup_{f \in S_1} \beta_f(1) = \alpha = \sup_{f \in S_1} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |na_n|}{\log n},$$

где  $S_1$  – класс ограниченных и однолистных функций в круге  $\mathbb{D}$ ,  $a_n$  – коэффициенты разложения Тейлора функции  $f$ . Заметим, что неравенство  $\sup \beta_f(1) \geq \alpha$  доказывается весьма просто (и основывается на том, что интеграл от модуля некоторой функции не меньше, чем модуль интеграла от той же функции), в то время, как обратное неравенство является непростым фактом.

2) Н.Г. Макаровым [7] доказано, что если множество  $A \subset \partial\mathbb{D}$  измеримо по Борелю, то для любого  $q > 0$  справедливо неравенство

$$\dim f(A) \geq \frac{q \dim A}{\beta_f(-q) + q + 1 - \dim A},$$

где  $\dim A$  – Хаусдорфова размерность множества  $A$ .

3) Х. Поммеренке [8], [9, с. 241] установил следующий факт. Если область  $f(\mathbb{D})$  является областью класса Джона (то есть не имеет внутренних нулевых углов), то

$$\text{mdim } \partial f(\mathbb{D}) = p,$$

где  $p$  – единственное решение уравнения  $\beta_f(p) = p - 1$ ,  $\text{mdim}$  – верхняя метрическая размерность Минковского.

Из этих результатов становится ясна причина сложного поведения  $\beta_f(p)$ . Классическая теорема Каратеодори утверждает, что конформное отображение областей с жордановыми границами друг на друга может быть продолжено до гомеоморфизма замкнутых областей, однако не дает информацию о том, каким образом искажаются Хаусдорфовы меры борелевских множеств на границе этих областей. Исследование поведения спектра интегральных средних позволяет пролить свет на этот вопрос.

## 1. Оценки спектра интегральных средних

Для удобства дальнейшего изложения обозначим универсальный спектр интегральных средних через

$$B(t) = \sup_{f \in S} \beta_f(t).$$

Относительно  $B(t)$  имеется гипотеза [10, 11]:

$$B(t) = \begin{cases} -t - 1, & t \in (-\infty, -2], \\ t^2/4, & t \in [-2, 6 - 4\sqrt{2}], \\ 3t - 1, & t \in [6 - 4\sqrt{2}, +\infty). \end{cases}$$

Й. Клуни и Х. Поммеренке показали, что

$$B(t) \leq (9 + \varepsilon)t^2$$

при любом положительном  $\varepsilon$  и достаточно малых  $t$ . Х. Поммеренке усилил это результат, понизив константу 9 до 3.

Лучшие верхние оценки спектра интегральных принадлежат Х. Хеденмальму и С. Шиморину [12]. Ими показано, что

$$B(t) \leq 0.38t^2$$

для достаточно малых  $t$ .

С другой стороны, Н.Г. Макаров показал, что существует положительная константа  $c$  такая, что

$$B(t) \geq ct^2$$

для достаточно малых  $t$ .

С. Роде [9, 13] усилил этот результат, доказав, что в качестве  $c$  можно взять число 0.117. Далее Ф. Крецер, используя метод, разработанный Л. Карлесоном и П. Джонсом [6, 14], с использованием компьютера экспериментально установил, что

$$B(t) \geq \frac{t^2}{4}, \quad t \in [-2, 2].$$

Отметим, что численный эксперимент, проведенный Ф. Крецером, математически не является строго обоснованным.

В нашей работе [15] доказана

**Теорема 1.**

$$B(t) > \frac{t^2}{5}, \quad 0 < t \leq \frac{2}{5}.$$

Интересным следствием результатов, полученных Х. Хеденмальмом, С. Шимориным, Й. Фенгом и Т. МакГрегором, является

**Предложение.** Для любых  $t \in \mathbb{R}$  имеет место неравенство

$$B(t) \leq \frac{9}{4}t^2.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда  $t = 2/3$  либо  $t = 0$ .

**Доказательство.** Из результатов Х. Хеденмальма и С. Шиморина следует, что

$$B(t) < \frac{9}{4}t^2 \quad \text{при } t \in (-\infty, 2/5].$$

Поэтому для доказательства предложения достаточно рассмотреть случай  $t > 2/5$ . В этом интервале можно применить результат Й. Фенга и Т. МакГрегора:

$$B(t) = 3t - 1, \quad t \in [2/5, \infty).$$

Очевидное неравенство  $(3t/2 - 1)^2 \geq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , со знаком равенства при  $t = 2/3$  дает нужную оценку  $3t - 1 \leq \frac{9}{4}t^2$ ,  $t \in [2/5, \infty)$ .

□

## 2. Закон повторного логарифма для конформных отображений и его связь со спектром интегральных средних

Интегральные средние производных конформных отображений тесно связаны с законом повторного логарифма для однолистных функций, доказанного Н.Г. Макаровым в 1985 г.

Предположим, что функция  $f$  аналитична и однолистна в круге  $\mathbb{D}$ . Н.Г. Макаров [16] доказал, что существует положительная постоянная  $C$  такая, что

$$L(f; r, \zeta) \leq C \|\log f'\|_{\mathbb{B}} \quad (1)$$

для почти всех  $\zeta$  на окружности  $|\zeta| = 1$ , где

$$L(f; r, \zeta) = \limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{|\log(1-r)| \log \log |\log(1-r)|}}.$$

Здесь

$$\|\log f'\|_{\mathbb{B}} = \sup_{|z| < 1} (1 - |z|^2) \left| \frac{f''}{f'}(z) \right|$$

есть стандартная полунорма Блоха.

Х. Поммеренке [9, с. 186] показал, что неравенство (1) верно при  $C = 1$ , но существует аналитическая и однолистная в круге  $\mathbb{D}$  функция, для которой это неравенство перестает быть верным при  $C \leq 0.685$ . Таким образом, результат Н.Г. Макарова является точным в смысле порядка.

Ф. Прзытички, М. Урбаньски и А. Здуник [17, 18] установили, что для некоторых классов областей с фрактальными границами на самом деле выполняется равенство с константой (зависящей от функции)  $C = \sigma$  в правой части (1), где

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\int_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^2 d\theta}{|\log(1-r)|}$$

есть асимптотическая дисперсия. Отметим, что в статье [17] авторы использовали другое определение асимптотической дисперсии, которое фактически эквивалентно указанному выше определению.

Нашей целью является получение точной формы закона Н.Г. Макарова повторного логарифма для локально однолистных функций, то есть функций  $f$ , для которых  $f'(z) \neq 0$ ,  $z \in \mathbb{D}$ .

Пусть функция  $f$  локально однолистна в единичном круге  $\mathbb{D}$ , и пусть  $p$  – произвольное комплексное число. Для всех  $\delta > 0$  определим

$$\beta_{\delta}(p) = \sup_{r \in [0, 1)} \frac{\log \left[ \delta \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta \right]}{|\log(1-r)|}.$$

Это определение эквивалентно тому, что  $\beta_{\delta}(p)$  – минимальное число, для которого выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{1-r} \right)^{\beta_{\delta}(p)}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Если  $p$  вещественно, то

$$\beta_\delta(p) \rightarrow \beta(p) \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

где  $\beta(p)$  – спектр интегральных средних. Докажем этот факт. Поскольку

$$\beta_\delta(p) = \sup_{r \in [0,1)} \frac{\log \left[ \delta \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| d\theta \right]}{|\log(1-r)|},$$

то

$$\beta_\delta(p) \geq \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \left[ \delta \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| d\theta \right]}{|\log(1-r)|} = \beta(p).$$

С другой стороны, в силу определения  $\beta_\delta(p)$  ясно, что либо  $\beta_\delta(p) = \beta(p)$ , либо существует  $r_\delta$  такое, что

$$\beta_\delta(p) = \frac{\log \left[ \delta \int_0^{2\pi} |f'(r_\delta e^{i\theta})^p| d\theta \right]}{|\log(1-r_\delta)|},$$

причем  $r_\delta \rightarrow 1$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$  заключаем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta_\delta(p) \leq \beta(p).$$

Результаты, полученные X. Поммеренке [9], Н.Г. Макаровым [11], Л. Карлесоном и П. Джонсом [6], устанавливают существование связи между граничным поведением конформных отображений и спектром интегральных средних. С другой стороны, Н.Г. Макаровым [16] показано, что закон повторного логарифма тесно связан с граничными свойствами конформных отображений. Отсюда вытекает естественный вопрос: *существует ли явная связь между законом повторного логарифма для конформных отображений и спектром интегральных средних?*

Возможным ответом на этот вопрос является следующий результат, который доказан в нашей работе [19].

**Теорема 2.** *Предположим, что функция  $f$  локально однолистна и аналитична в круге  $\mathbb{D}$ . Тогда*

$$L(f; r, \zeta) \leq \inf \sigma(\delta) \quad \text{при } \delta > 0 \tag{2}$$

для почти всех  $\zeta$  на  $|\zeta| = 1$ , где

$$\sigma^2(\delta) = 4 \limsup_{p \rightarrow 0} \frac{\beta_\delta(p)}{|p|^2}.$$

Отметим, что результат X. Поммеренке с константой  $C = 1$  легко следует из теоремы 1, поскольку хорошо известно [20], что если  $\log f'$  – функция Блоха, то  $\sigma^2(0+) \leq \|\log f'\|_{\mathbb{B}}^2$ .

Следующая лемма может быть выведена из приведенного в книге X. Поммеренке [9, с. 186] доказательства закона повторного логарифма для конформных отображений, полученного Н.Г. Макаровым [16].

**Лемма 1.** Пусть  $C_k$  – последовательность положительных чисел таких, что

$$C_k^{1/k} \rightarrow 1 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Если найдется такое наименьшее положительное число  $M$ , что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n} d\theta \leq C_n n! M^{2n} \log^n \frac{1}{1-r}$$

для всех натуральных  $n$  и всех  $r \in [1 - \exp(-\exp e^n), 1)$ , то

$$L(f; r, e^{i\theta}) \leq M$$

для почти всех  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Доказательство теоремы 2.** Зафиксируем числа  $\delta > 0$  и  $\varepsilon > 0$ . Тогда находится  $p_0 = p_0(\delta, \varepsilon) > 0$  такое, что

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^p| d\theta \leq \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma^2(\delta)+\varepsilon)|p|^2/4}$$

при  $|p| < p_0$ . Полагая  $p = te^{i\varphi}$  и интегрируя это неравенство по  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^{te^{i\varphi}}| d\varphi d\theta \leq \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma^2(\delta)+\varepsilon)t^2/4}, \quad t \in (0, p_0).$$

Применяя теорему Фубини заключаем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^{te^{i\varphi}}| d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})^{te^{i\varphi}}| d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[t(\cos \varphi \log |f'(re^{i\varphi})| - \sin \varphi \arg f'(re^{i\varphi}))] d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[t|\log f'(re^{i\varphi})| \cos(\varphi + \gamma_f(r, \theta))] d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[t|\log f'(re^{i\varphi})| \cos \varphi] d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} I_0(t|\log f'(re^{i\theta})|) d\theta. \end{aligned}$$

Здесь

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(x \cos \varphi) d\varphi$$

есть модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} I_0(t|\log f'(re^{i\theta})|) d\theta \leq \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma^2(\delta)+\varepsilon)t^2/4}, \quad t \in (0, p_0).$$

Пользуясь известным разложением [21]

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!^2} \left( \frac{x^2}{4} \right)^k,$$

заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n} d\theta \leq \frac{4^n}{t^{2n}} n!^2 \int_0^{2\pi} I_0(t|\log f'(re^{i\theta})|) d\theta \leq \frac{4^n}{t^{2n}} n!^2 \frac{1}{\delta} \left( \frac{1}{1-r} \right)^{(\sigma^2(\delta)+\varepsilon)t^2/4}.$$

Полагая

$$t^2 = \frac{4n}{(\sigma^2(\delta) + \varepsilon)|\log(1-r)|}$$

и используя тождество

$$e = \left( \frac{1}{1-r} \right)^{1/\log(1/(1-r))},$$

получаем

$$\int_0^{2\pi} |\log f'(re^{i\theta})|^{2n} d\theta \leq \frac{1}{\delta} n!^2 e^n \frac{1}{n^n} (\sigma^2(\delta) + \varepsilon)^n |\log(1-r)|^n$$

для  $r$ , близких к 1. Здесь мы еще использовали тот факт, что по условию леммы  $1, n \leq \log \log |\log(1-r)|$ , и, следовательно,  $t$  попадает в интервал  $(0, p_0)$  для  $r$ , близких к 1.

Применяя лемму 1, получаем

$$L(f; r, \zeta) \leq \sqrt{\sigma^2(\delta) + \varepsilon}$$

для почти всех  $\zeta$  на окружности  $|\zeta| = 1$  и для всех  $\delta > 0, \varepsilon > 0$ . Доказательство теоремы завершаем предельным переходом при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ .  $\square$

### 3. Метрические свойства гармонической меры на жордановых кривых

Закон повторного логарифма Н.Г. Макарова эквивалентен тому, что существует абсолютная положительная постоянная  $C$  такая, что

$$L(f; r, \zeta) \leq C \tag{3}$$

для почти всех  $\zeta$  на окружности  $|\zeta| = 1$ . Из результатов, полученных Х. Поммеренке, следует, что данное неравенство справедливо при  $C = 6$ . Используя неравенство (2), в работе [22] мы доказываем, что этот закон верен при  $C = 2\sqrt{3}$ . Это позволяет уточнить метрические свойства образов подмножеств единичной окружности положительной меры при конформных отображениях круга на области, ограниченные жордановой кривой.

Пусть  $\Omega$  – односвязная область на комплексной плоскости, ограниченная жордановой кривой. Тогда по теореме Римана существует конформное отображение  $f$  круга  $\mathbb{D}$  на  $\Omega$ .

Основная проблема: *Пусть  $A$  – множество положительной линейной меры на  $\partial\mathbb{D}$ . Требуется охарактеризовать метрические свойства  $f(A)$ .*

Классическая теорема Рисса–Привалова утверждает, что если область  $f(\mathbb{D})$  имеет спрямляемую границу, то линейная мера  $f(A)$  также положительна. М.А. Лаврентьевым было показано, что в общем случае этот результат неверен.

Введем некоторые понятия, необходимые для формулировки результатов об исказении граничных множеств при конформных отображениях. Пусть  $\varphi$  – некоторая непрерывная, положительная, строго возрастающая функция на интервале  $[0, +\infty)$ , причем  $\varphi(0) = 0$ . Пусть  $A$  – множество на комплексной плоскости.

Назовем  $\varphi$ -мерой Хаусдорфа множества  $A$  величину

$$\Lambda_\varphi(A) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{B_k} \varphi(\text{diam } B_k),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным покрытиям  $B_k$  множества  $A$  таким, что  $\text{diam } B_k < \varepsilon$ . В том случае, когда  $\varphi(t) = t^\alpha$ , вместо  $\Lambda_{t^\alpha}$  будем пользоваться обозначением  $\Lambda_\alpha$ . Л. Карлесоном [23] в 1973 г. была доказана

**Теорема А.** *Пусть  $f$  – конформное отображение круга  $\mathbb{D}$  на односвязную область  $\Omega$ . Предположим, что множество  $A \subset \partial\mathbb{D}$  имеет положительную линейную меру. Тогда найдется  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\Lambda_{1/2+\varepsilon}(f(A)) > 0$ .*

В 1985 г. Н.Г. Макаров [16] показал, что в качестве  $\varepsilon$  можно взять любое положительное число из интервала  $(0, 1/2)$ . Более того, им была доказана

**Теорема В.** *Предположим, что  $A$  – борелевское множество положительной линейной меры на окружности  $\partial\mathbb{D}$ . Тогда найдется константа  $C > 0$  такая, что,  $\Lambda_\varphi(f(A)) > 0$ , где*

$$\varphi(t) = t \exp \left( C \sqrt{\log \frac{1}{t} \log \log \log \frac{1}{t}} \right).$$

В 1992 г. Х. Поммеренке [9] показал, что в качестве константы  $C$  можно взять число 30. Мы понижаем эту константу до  $6\sqrt{3}$ . Отметим важность константы  $C$ : при различных ее значениях получаются не эквивалентные меры Хаусдорфа.

Справедлива

**Теорема 3.** *Пусть  $f$  – однолистная в круге  $\mathbb{D}$  функция, отображающая его на область с жордановой границей. Предположим, что  $A$  – борелевское множество положительной линейной меры на окружности  $\partial\mathbb{D}$ . Тогда  $\Lambda_\varphi(f(A)) > 0$ , где*

$$\varphi(t) = t \exp \left( 6\sqrt{3}(1 + \varepsilon) \sqrt{\log \frac{1}{t} \log \log \log \frac{1}{t}} \right),$$

а  $\varepsilon$  – произвольное положительное число.

Аккуратный анализ доказательства аналогичной теоремы с константой 30 [9, с. 229] вместо  $6\sqrt{3}$  показывает, что константа в теореме 2 есть константа из теоремы 1, умноженная на 3 плюс произвольное положительное число.

Этот результат может быть сформулирован на языке гармонической меры следующим образом.

Пусть  $\Omega$  – односвязная область на плоскости, ограниченная жордановой кривой  $\partial\Omega$ . Пусть  $E$  – произвольное борелевское множество на этой кривой. Через  $\omega_z(E)$  обозначим гармоническую меру множества  $E$  относительно точки  $z \in \Omega$ . Зафиксируем точку  $z_0 \in \Omega$  и будем рассматривать функцию  $\omega(E) = \omega_{z_0}(E)$  как функцию на борелевских множествах кривой  $\partial\Omega$ . Полученная таким образом мера  $\omega$  не зависит от выбора точки  $z_0 \in \Omega$ . Теорема 3 фактически утверждает, что гармоническая мера  $\omega$  абсолютно непрерывна относительно меры Хаусдорфа  $\Lambda_\varphi$ .

В работе [24] константа  $6\sqrt{3}$  понижена до 3.7. Это было сделано за счет понижения константы  $C$  из неравенства (3) до 1.23. Кроме того, в этой же работе показано, что константа  $C$  не может быть ниже, чем 0.91. Оценка снизу для константы получается из примера конформного отображения  $f$ , для которого справедливо неравенство  $\beta_f(t) > t^2/5$  при малых  $t$  (см. [15]). В качестве функции  $f$  берется предел

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_q \circ f_{q^2} \circ f_{q^3} \circ \cdots \circ f_{q^n}(z).$$

Здесь

$$f_m(z) = \sqrt[m]{g(z^m)}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$g(z) = \frac{z}{K} \exp \int_0^z \frac{\exp \{(a/b) \operatorname{sh}(bt)\} - 1}{t} dt,$$

$$a = 1.906, \quad b = 1.246,$$

$$K = \exp \int_0^1 \frac{\exp \{(a/b) \operatorname{sh}(bt)\} - 1}{t} dt = 73.677030\dots$$

#### 4. Гипотеза Бреннана

Одной из наиболее интригующих проблем интегральных средних однолистных функций является гипотеза Бреннана. Пусть  $\Omega$  – односвязная область на плоскости, не совпадающая с ней, и  $\varphi$  – конформное отображение единичного круга  $\mathbb{D}$  на  $\Omega$ . Й. Бреннаном [25] была высказана гипотеза о том, что  $\varphi' \in L_p(\Omega)$ ,  $4/3 < p < 4$ , то есть

$$\int_{\Omega} |\varphi'|^p dx dy < \infty, \quad 4/3 < p < 4.$$

Если  $\Omega$  – плоскость с разрезом по некоторому лучу, то при  $p \notin (4/3, 4)$

$$\int_{\Omega} |\varphi'|^p dx dy = \infty.$$

Обозначим  $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$  – конформное отображение единичного круга  $\mathbb{D}$  на  $\Omega$ . В [9] показано, что гипотеза Бреннана эквивалентна соотношению

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} d\theta = O\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad r \rightarrow 1-,$$

что равносильно неравенству

$$\beta_f(t) \leq |t| - 1, \quad t \leq -2,$$

где  $\beta_f(t)$  – спектр интегральных средних.

Неравенство (12) было установлено Л. Карлесоном и Н.Г. Макаровым [26] для достаточно больших  $|t|$ .

Д. Бертильсон в своей диссертации [10] исследовал локальную версию гипотезы Бреннана для функций, близких к функции Кебе.

Из концепции интегральных средних [6, 11] следует, что гипотезу Бреннана достаточно проверить для областей с фрактальными границами. Эвристически этот факт можно объяснить тем, что если граница области достаточно хороша, то интегрирование по окружности уменьшает порядок роста производной на 1. Первый шаг в этом направлении был сделан К. Бааньски, А. Вольбергом и А. Здуник [27]. Они доказали эту гипотезу для всех односвязных областей притяжения бесконечности квадратичных полиномов.

Другой важный класс фракталов состоит из конформных отображений  $f$ , для которых  $\log f'$  представим в виде лакунарного ряда Адамара, то есть когда

$$\log f' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q > 1.$$

Такие отображения оказались весьма полезны для получения нижних оценок спектра интегральных средних [13, 16, 28–30], [9, с. 188]. С другой стороны, нетрудно показать, что если существует абсолютная положительная постоянная  $C$  такая, что неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|f'(re^{i\theta})|^2} d\theta \leq \frac{C}{1-r}$$

выполнено для всех функций из этого класса, то гипотеза Бреннана верна в общем случае.

В работе автора [31] эта гипотеза доказана для всех  $q \geq 15$ .

Достоверность гипотезы Бреннана также установлена и в случае, когда тейлоровские коэффициенты функции  $\log(zf'/f)$  неотрицательны. В работе [32] доказана

**Теорема 4.** *Предположим, что аналитическая функция  $f$  однолистна в круге  $\mathbb{D}$ ,  $f(0) = 0$ . Если тейлоровские коэффициенты функции  $\log(zf'/f)$  неотрицательны, то  $\beta_f(-2) \leq 1$ , что эквивалентно достоверности гипотезы Бреннана в рассматриваемом случае. Равенство  $\beta_f(-2) = 1$  достигается, например, для функции Кебе  $f = z/(1-z)^2$ .*

Автор выражает благодарность Ф.Г. Авхадиеву за ряд сделанных полезных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00523).

### Summary

*I.R. Kayumov.* The integral means spectrum and the law of the iterated logarithm for conformal mappings.

The present survey paper is described most important results about estimates of the integral means for derivatives of conformal maps of the unit disk into simply connected domains on the complex plane. Detailed description of the results connected with estimates of the integral means spectrum near the origin and also near the point  $t = -2$  is given. Results connected with Makarov's law of the iterated logarithm are described. A connection between the integral means spectrum and the law of iterated logarithm is shown. On this basis metrical properties of harmonic measure on Jordan curves are improved.

### Литература

1. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
2. Prawitz H. Über die Mittelwerte analytischer Funktionen // Arkiv Mat. Astr. Fys. – 1927–1928. – V. 20. – P. 1–12.
3. Littlewood J. On inequalities in the theory of functions // Proc. London Math. Soc. – 1925. – V. 23. – P. 481–519.
4. Feng J., MacGregor T.H. Estimates of integral means of the derivatives of univalent functions // J. Analyse Math. – 1976. – V. 29. – P. 203–231.
5. Makarov N.G. A note on the integral means of the derivative in conformal mapping // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – V. 96. – P. 233–236.
6. Carleson L., Jones P. On coefficient problems for univalent functions // Duke math. J. – 1992. – V. 66, No 2. – P. 169–206.
7. Makarov N.G. Conformal mapping and Hausdorff measures // Ark. Mat. – 1987. – V. 25. – P. 41–89.
8. Pommerenke Ch. On boundary size and conformal mapping // Complex Variables. – 1989. – V. 12. – P. 231–236.
9. Pommerenke Ch. Boundary Behaviour of Conformal Maps. – Berlin: Springer-Verlag, 1992.
10. Bertilsson D. On Brennan's conjecture in conformal mapping: Doctoral Thesis. – Royal Inst. of Tech., Stockholm, 1999.
11. Makarov N.G. Fine structure of harmonic measure // St. Petersbg. Math. J. – 1999. – V. 10, No 2. – P. 217–268.
12. Hedenmalm H., Shimorin S. On the universal integral means spectrum of conformal mappings near the origin // Proc. Amer. Math. Soc. – To appear.
13. Rohde S. Hausdorffmas und Randverhalten analytischer Functionen: Thesis. – Berlin: Technische Universität, 1989.
14. Kraetzer Ph. Experimental bounds for the universal integral means spectrum of conformal maps // Complex Variables. – 1996. – V. 31. – P. 305–309.
15. Kayumov I.R. Lower estimates for integral means of univalent functions // Arkiv för matematik. – To appear.
16. Makarov N.G. On the distortion of boundary sets under conformal mappings // Proc. London Math. Soc. – 1985. – V. 51, No 3. – P. 369–384.
17. Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A. Harmonic, Gibbs, and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. I // Ann. of Math. – 1989. – V. 2. – P. 1–40.
18. Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A. Harmonic, Gibbs, and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. II // Studia Math. – 1991. – V. 97. – P. 189–225.
19. Kayumov I.R. The law of the iterated logarithm for locally univalent functions // Ann. Acad. Sci. Fennicae. – 2002. – V. 27. – P. 357–364.
20. Clunie J., Pommerenke Ch. On the coefficients of univalent functions // Michigan Math. J. – 1967. – V. 14. – P. 71–78.
21. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
22. Каюмов И.Р. К закону повторного логарифма для конформных отображений // Матем. заметки. – 2006. – Т. 79, Вып. 1. – С. 150–153.

23. *Carleson L.* On the distortion of sets on a Jordan curve under conformal mapping // Duke Math. J. – 1973. – V. 40, No 3. – P. 547–559.
24. *Hedenmalm H., Kayumov I.R.* On the Makarov law of the iterated logarithm // Proc. Amer. Math. Soc. – To appear.
25. *Brennan J.E.* On the integrability of the derivative in conformal mapping // J. London Math. Soc. – 1978. – V. 18. – P. 261–272.
26. *Carleson L., Makarov N.G.* Some results connected with Brennan's conjecture // Ark. Mat. – 1994. – V. 32. – P. 33–62.
27. *Barański K., Volberg A., Zdunik A.* Brennan's conjecture and the Mandelbrot set // Int. Math. Res. Notice. – 1998. – V. 12. – P. 9–600.
28. *Gnuschke-Hauschild D., Pommerenke Ch.* On Bloch functions and gap series // Reine Angew. Math. – 1986. – V. 367. – P. 172–186.
29. *Kayumov I.R.* Lower estimates for the integral means spectrum // Complex Variables. – 2001. – V. 44. – P. 165–171.
30. *Kayumov I.R.* Lower estimate for the integral means spectrum for  $p = -1$  // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 130, No 4. – P. 1005–1007.
31. *Каюмов И.Р.* Спектр интегральных средних и модифицированная функция Бесселя нулевого порядка // Алгебра и Анализ. – 2005. – Т. 17, № 3. – С. 107–123.
32. *Каюмов И.Р.* О гипотезе Брэннана для специального класса функций // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, Вып. 4. – С. 537–541.

Поступила в редакцию  
25.04.06

---

**Каюмов Ильгиз Рифатович** – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *ikayumov@ksu.ru*