

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ

44.04.01 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ «ИНФОРМАЦИОННЫЕ
ТЕХНОЛОГИИ В ФИЗИКО - МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ»

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ НА ТЕМУ

«КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОСМОЛОГИЧЕСКОГО
РАСШИРЕНИЯ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКОЙ СКАЛЯРНО ЗАРЯЖЕННОЙ
ПЛАЗМЫ

с помощью пакета программ
Maple XVII»

Работа завершена:

студент группы 05-314

« ____ » _____ 2015 г. _____

Сафиуллина Л.М.

Работа допущена к защите в ГАК:

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, профессор

« ____ » _____ 2015 г. _____

Игнатъев Ю.Г.

Заведующий кафедрой

доктор физико-математических наук,
профессор

« ____ » _____ 2015 г. _____

Ю.Г. Игнатъев

Казань 2015 год

Оглавление

Введение	3
I Математическая модель	5
I.1 Математическая модель ультрарелятивистской скалярно заряженной плазмы	5
I.2 Космологическая модель	7
I.3 Макроскопические скаляры для ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем.	8
I.4 Макроскопические скаляры для Больцмановской двухкомпонентной плазмы	10
I.5 функции Бесселя мнимого аргумента	12
II Численное моделирование	17
II.1 Численное решение задачи Коши	17
II.2 Размерность физических величин в космологической модели	18
II.3 Нормальная система уравнений для газа Ферми	19
II.4 Нормальная система дифференциальных уравнений	20
III Результаты численного моделирования	23
III.1 Численное решение математической модели в пакете Maple.17	23
III.2 Результаты моделирования	26
Заключение	27
Литература	29

Введение

Цель работы: С помощью методов численного моделирования в прикладном математическом пакете построить и проанализировать численные модели космологической эволюции при изменении параметров плазмы и скалярного взаимодействия.

Предмет исследования:

1. релятивистская кинетика
2. фантомные скалярные поля
3. космологическое ускорение
4. математическая система Maple.

Актуальность работы

В связи с революционными открытиями в области космологии: открытием тёмной энергии, Хиггсовых бозонов, современного ускорения Вселенной актуальными становятся задачи математического компьютерного моделирования космологической эволюции плазмы со скалярным взаимодействием частиц.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть модель космологической эволюции ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем.
2. Построить алгоритмы решения задачи Коши о космологической эволюции ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем.
3. Провести численное моделирование системы дифференциальных уравнений математической модели с помощью пакета Maple.17

Квалификационная работа состоит из Введения, 3-х глав, Заключения и Списка использованной литературы. Первая глава посвящена обзору математической модели ультрарелятивистской заряженной плазмы. Вторая глава посвящена численному моделированию. В третьей, оригинальной главе, представлены результаты численного моделирования в виде графиков. В Заключении кратко сформулированы основные результаты. Текст квалификационной работы набран при помощи издательской системы $\text{LaTeX}2\epsilon$.

Глава I

Математическая модель

I.1 Математическая модель ультррелятивистской скалярно заряженной плазмы

В предыдущих статьях были сформулированы математическая модель статистической системы скалярно заряженных частиц, основанная на микроскопическом описании процедуре перехода к кинетической теории. Строгими макроскопическими следствиями кинетической теории являются уравнения переноса, в том числе закон сохранения некоторого векторного тока, соответствующего микроскопическому закону сохранения в реакциях некоторого фундаментального заряда e (если таковой закон сохранения имеется) –

$$\nabla_i \sum_a e_a n_a^i = 0 \quad (\text{I.1})$$

Законы сохранения энергии - импульса статистической системы:

$$\nabla_i T_{pl}^{ik} = \nabla_i \sum_a T_a^{ik} = \sigma \nabla^i \Phi \quad (\text{I.2})$$

где n_a^i – числовой вектор, а T_a^{ik} – тензор энергии импульса (МЕТ) “а” - го сорта частиц; σ – плотность скалярного заряда (определения см. в [3]). В условиях локального термодинамического равновесия (LTE) статистическая система является изотропной, и ее макроскопические моменты принимают вид соответствующих моментов идеальной жидкости [4]:

$$n_a^i = n_a u^i \quad (\text{I.3})$$

$$T_a^{ik} = (\varepsilon_a + \rho_a) u^i u^k - \rho_a g^{ik} \quad (\text{I.4})$$

где u^i – единичный времени подобный вектор динамической скорости статистической системы

$$(u, u) = 1 \quad (\text{I.5})$$

Из соотношения нормировки (II.5) вытекает известное тождество:

$$u^k{}_{,i} u_k \equiv 0. \quad (\text{I.6})$$

С учетом (I.4) – (I.6) законы сохранения (I.2) можно привести к виду:

$$(\varepsilon_{pl} + \rho_{pl}) u^i{}_{,k} u^k = (g^{ik} - u^i u^k) (\rho_{pl,k} + \sigma \Phi_{,k}); \quad (\text{I.7})$$

$$\nabla_k (\varepsilon_{pl} + \rho - pl) u^k = (\rho_{pl,k} + \sigma \Phi_{,k}) u^k, \quad (\text{I.8})$$

а закон сохранения фундаментального заряда e (I.1) переписывается:

$$\nabla_k n_e u^k = 0, n_e \equiv \sum_a e_a n_a. \quad (\text{I.9})$$

Формально на три макроскопические скалярные функции ε, ρ, n_e и три независимые компоненты вектора скорости u^i макроскопические законы сохранения дают пять независимых уравнений (I.7) – (I.9). Но не все указанные макроскопические скаляры функционально независимы, так как все они определяются локально равновесными функциями распределения:

$$f_a^0 = \frac{1}{e^{(-\mu_a + (u,p))/\theta}} \pm 1, \quad (\text{I.10})$$

где μ_a – химический потенциал, θ – локальная температура. При разрешенной серии условий химического равновесия, когда независимым остается лишь один химический потенциал, разрешенном уравнении массовой поверхности и заданных скалярном потенциале и масштабном факторе четыре макроскопические скаляры, $\varepsilon, \rho, n_e, \sigma$ определяются двумя скалярами – некоторым химическим потенциалом μ и локальной температурой θ [1,3]:

$$n_a = \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch} x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (\text{I.11})$$

Из уравнения (I.11) n – есть

$$\varepsilon_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x \text{ch}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad \rho_{pl} = \sum_a \frac{2S+1}{6\pi^2} m_*^4 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^4 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch} x} \pm 1}; \quad (\text{I.12})$$

$$T_\rho = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} m_*^2 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch } x} \pm 1}; \quad (\text{I.13})$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S+1}{2\pi^2} q(m + q_a \Phi)^3 \int_0^\infty \frac{\text{sh}^2 x dx}{e^{-\gamma_a + \lambda_* \text{ch } x} \pm 1}, \quad (\text{I.14})$$

где

$$\lambda_* = \frac{m_*}{\theta}; \quad \gamma_a = \frac{\mu_a}{\theta}. \quad (\text{I.15})$$

Система уравнений (I.7) – (I.9) оказывается полностью определенной.

I.2 Космологическая модель

Применим выше сформулированную математическую модель к космологической ситуации для пространственно - плоской модели Фридмана:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

Именно в этом случае все термодинамические функции зависят только от времени. Можем заметить что $u^i = \delta_4^i$ обращает уравнения (I.7) в тождества, а система уравнений (I.8) – (I.9) сводятся к двум уравнениям:

$$\dot{\varepsilon}_{pl} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon_{pl} + \rho_{pl}) = \sigma\dot{\Phi} \quad (\text{I.16})$$

$$\dot{n}_e + 3\frac{\dot{a}}{a}n_e = 0 \quad (\text{I.17})$$

В этом случае остаются два дифференциальных уравнения относительно двух термодинамических функций μ и θ .

ТЭИ скалярного поля также принимает вид ТЭИ идеальной изотропной жидкости:

$$T_s^{ik} = (\varepsilon_s + \rho_s)v^i v^k - \rho_s g^{ik}, \quad (\text{I.18})$$

Причём

$$\varepsilon_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + \varepsilon_2 m_s^2 \Phi^2); \quad (\text{I.19})$$

$$\rho_s = \frac{\epsilon_1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - \varepsilon_2 m_s^2 \Phi^2), \quad (\text{I.20})$$

так, что

$$\varepsilon_s + \rho_s = \frac{\epsilon_1}{4\pi}\dot{\Phi}^2. \quad (\text{I.21})$$

Уравнение скалярного поля в метрике Фридмана принимает вид:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a} + \varepsilon_2 m_s^2 \Phi = -4\pi\epsilon_1\sigma(t) \quad (\text{I.22})$$

Добавим нетривиальное уравнение Эйнштейна к этим уравнениям:

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\varepsilon \quad (\text{I.23})$$

где ε – суммарная плотность энергии плазмы и скалярного поля. Эта система уравнений описывает замкнутую математическую модель космологической эволюции ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем. (см. [3]).

I.3 Макроскопические скаляры для ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем.

Исследование ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем обусловлено как максимальной простотой математической модели, так и возможностью интерпретации такой системы как космологической темной (холодной) материи. А так же мы не будем налагать каких-либо ограничений

на величину скалярного заряда частиц, рассматривая ситуации, когда эта величина может быть больше единицы. В условиях полного вырождения:

$$\theta \rightarrow 0 \quad (I.24)$$

локально равновесная функция распределения фермионов (I.10) принимает вид ступенчатой функции [4]:

$$f^0(x, P) = \chi_+(\mu - \sqrt{m_*^2 + p^2}), \quad (I.25)$$

где $\chi_+(z)$ есть ступенчатая функция Хевисайда. В этом случае результат интегрирования макроскопических плотностей (I.11) – (I.15) выражается в элементарных функциях [4]:

$$n = \frac{1}{\pi^2} p_F^3; \quad (I.26)$$

$$\varepsilon_{pl} = \frac{m_*^4}{8\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (1 + 2\psi^2) - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (I.27)$$

$$\rho_{pl} = \frac{m_*^4}{24\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} (2\psi^2 - 3) - 3 \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (I.28)$$

$$\sigma = q \frac{m_*^3}{2\pi^2} [\psi \sqrt{1 + \psi^2} - \ln(\psi + \sqrt{1 + \psi^2})]; \quad (I.29)$$

где ψ -безразмерная функция

$$\psi = p_F / m_*, \quad (I.30)$$

равная отношению импульса Ферми, p_F , к эффективной массе фермиона. При переходе к пределу $\mu \rightarrow 0$ или $\theta \rightarrow 0$ получается систему двух уравнений на одну функцию, получаем противоречивость этих уравнений, эта проблема не зависит от наличия скалярного поля. Ниже мы убедимся, что на самом деле никаких противоречий в системе уравнений (I.17) – (I.18) не возникает и в случае вырожденной Ферми-системы. Действительно, дифференцируя плотность энергии Ферми-системы (I.18) и учитывая тождество:

$$\varepsilon(pl) + \rho(pl) \equiv \frac{m_*^4}{3\pi^2} \psi^3 \sqrt{1 + \psi^2}, \quad (\text{I.31})$$

приведем закон сохранения энергии для Ферми-системы (I.17) к виду уравнения:

$$\frac{d}{dt} \ln m_* \psi a = 0. \quad (\text{I.32})$$

Учитывая определение функции ψ (I.31) получаем:

$$ap_F = \text{Const}. \quad (\text{I.33})$$

А так же учитывая (I.27) получаем закон сохранения числа фермионов:

$$a^3 n = \text{Const}. \quad (\text{I.34})$$

Несмотря на кажущуюся сложность уравнения (I.17), решение его находится легко — закон сохранения энергии вырожденной Ферми-системы сводится к закону сохранения числа фермионов. Для исследования космологической эволюции вырожденной Ферми - системы нужно проинтегрировать одно уравнение Эйнштейна и одно полевое уравнение.

I.4 Макроскопические скаляры для Больцмановской двухкомпонентной плазмы

Рассмотрим теперь Больцмановскую плазму, далекую от вырождения; это означает, во-первых, что приведенные химические потенциалы являются малыми функциями –

$$\gamma_a(t) \rightarrow 0 \quad (\text{I.35})$$

и, во-вторых, что можно пренебречь в знаменателях (I.11)–(I.15) статистическими факторами ± 1 . Интегрируя (I.11)–(I.15), получим:

$$n_a = \frac{2S + 1}{\pi^2} m_*^3 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a} e^{-\gamma_a}; \quad (\text{I.36})$$

$$\varepsilon_{pl} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S + 1) m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_a)}{\lambda_a} - \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a^2} \right); \quad (\text{I.37})$$

$$\rho_{pl} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_a (2S + 1) m_*^4 \frac{K_2(\lambda_a)}{\lambda_a^2}; \quad (\text{I.38})$$

$$\sigma = \sum_a \frac{2S + 1}{2\pi^2} q_a (m + q_a \Phi)^3 \frac{K_1(\lambda_a)}{\lambda_a}, \quad (\text{I.39})$$

где

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^n}{2^n \Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2n} t dt \quad (\text{I.40})$$

– функции Бесселя мнимого аргумента (см., например, [5]), $\Gamma(z)$ – гамма-функция. В этой статье для простоты мы рассмотрим идеализированную двухкомпонентную плазму, состоящую только из скалярно заряженных частиц и античастиц:

$$m_+ = |m + q\Phi|; \quad m_- = |m - q\Phi|, \quad (\text{I.41})$$

у которых в условиях ЛТР суммарный химический потенциал равен нулю:

$$\gamma + \tilde{\gamma} = 0 \Rightarrow \tilde{\gamma} = -\gamma. \quad (\text{I.42})$$

Предположим, что этим частицам соответствует также некоторый сохраняющийся фундаментальный заряд e , тогда согласно (1.18) в случае зарядово симметричной по этому заряду плазмы должен выполняться закон сохранения:

$$m_+^3 \frac{K_2(\lambda_+)}{\lambda_+} e^\gamma - m_-^3 \frac{K_2(\lambda_-)}{\lambda_-} e^{-\gamma} = 0 \Rightarrow e^{2\gamma} = \frac{m_-^3 \lambda_+ K_2(\lambda_-)}{m_+^3 \lambda_- K_2(\lambda_+)} \quad (\text{I.43})$$

Таким образом, химический потенциал определяется полностью при заданных значениях локальной температуры плазмы, θ , и скалярного потенциала, Φ . В частности, при

$$m_- = m_+ \quad (\text{I.44})$$

из (1.44) получим точное решение, которое получается лишь в двух крайних случаях:

$$m_- = m_+ = m_* \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0; & m_* = |q\Phi| \\ q = 0, & m_* = m. \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

В этих и только в этих случаях скалярно заряженные частицы и античастицы являются симметричными, – в других случаях их эффективные массы покоя должны быть разными. Мы рассмотрим случай симметричной Больцмановской плазмы (1.46), когда частицы и античастицы имеют одинаковую массу (1.45). В этом случае в качестве искомой функции удобно выбрать $\lambda_*(t) = \lambda_- = \lambda_+$ вместо размерной функции $\theta(t)$. Выражения для макроскопических скаляров (1.38)–(1.40) принимают вид:

$$\varepsilon_{pl} = \frac{2}{\pi^2} m_*^4 \left(\frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*} - \frac{K_2 \lambda_*}{\lambda_*^2} \right); \quad (\text{I.46})$$

$$\varepsilon_{pl} + \rho_{pl} = \frac{2}{\pi^2} m_*^4 \frac{K_3(\lambda_*)}{\lambda_*^3}; \quad (\text{I.47})$$

$$\sigma = \frac{2q^2}{\pi^2} \Phi \frac{K_1(\lambda_*)}{\lambda_*} (3m^2 + q^2 \Phi^2). \quad (\text{I.48})$$

I.5 Функции Бесселя мнимого аргумента

Вместе с функциями Бесселя тесно связаны две часто встречающиеся функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$, которые для z , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и произвольного ν , определяются при помощи формул:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi \quad (\text{I.49})$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin \nu\pi}, \quad |\arg z| < \pi, \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{I.50})$$

и при целом $\nu = n$

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} K_\nu(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{I.51})$$

$I_\nu(z)K_\nu(z)$ представляют регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty; 0)$ и целые функции ν . Рассматриваемые функции просто связаны с функциями Бесселя от аргумента $z\epsilon^{\pm\frac{\pi}{2}\iota}$. Действительно, предположим, что $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Тогда $-\frac{\pi}{2} < \arg z\epsilon^{\frac{\iota\pi}{2}} < \pi$ и из

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, |\arg z| < \pi \quad (\text{I.52})$$

следует:

$$J_\nu(z\epsilon^{\pm\frac{\pi}{2}\iota}) = \epsilon^{\frac{\iota\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)(k+\nu+1)} = \epsilon^{\pm\frac{\pi}{2}\iota} I_\nu(z), \quad (\text{I.53})$$

откуда

$$I_\nu(z) = \epsilon^{-\frac{\pi}{2}\iota} J_\nu(z\epsilon^{\frac{\iota\pi}{2}}), \quad (\text{I.54})$$

для всех $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$. Аналогично из формул:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{J_{-\nu}(z) - \epsilon^{-\iota\nu\pi} J_\nu(z)}{\iota \sin \nu\pi}, \quad (\text{I.55})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{\epsilon^{\iota\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\iota \sin \nu\pi} \quad (\text{I.56})$$

получаем из таких же z

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z\epsilon^{\frac{\iota\pi}{2}}) &= \frac{J_{-\nu}(z\epsilon^{\frac{\iota\pi}{2}}) - \epsilon^{-\iota\nu\pi} J_\nu(z\epsilon^{\frac{\iota\pi}{2}})}{\iota \sin \nu\pi} = \\ &= \frac{\epsilon^{\iota\nu\pi} I_{-\nu}(z) - \epsilon^{-\iota\nu\pi} I_\nu(z)}{\iota \sin \nu\pi} = \frac{2}{\pi\iota} \epsilon^{-\iota\pi\nu} K_\nu(z), \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

Для значений $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ могут быть выражены через функции Бесселя от аргумента $z\epsilon^{-\frac{\iota\pi}{2}}$. Мы имеем

$$I_\nu(z) = \epsilon^{\frac{\iota\pi\nu}{2}} J_\nu(z\epsilon^{-\iota\pi} 2), \quad K_\nu(z) = -\frac{\pi\iota}{2} H_\nu^{(2)}(z\epsilon^{-\iota\pi} 2) \quad (\text{I.58})$$

для всех $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$.

На основании полученных соотношений функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ называются функциями Бесселя мнимого аргумента. Функция $K_\nu(z)$ известна в литературе также под названием функции Макдональда. Из выведенных формул непосредственно следует, что рассматриваемые функции представляют собой линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0, \quad (\text{I.59})$$

которое отличается от уравнения Бесселя только знаком одного члена и переходит в него при подстановке $z = \pm it$. Уравнение (I.59) часто встречается в математической физике. Общий интеграл этого уравнения при произвольном ν может быть записан в виде:

$$u = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z). \quad (\text{I.60})$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = \frac{-2\nu}{z} K_\nu(z), \\ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(z) = z^\nu I_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) = -z^\nu K_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} I_\nu(z) = z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} K_\nu(z) = -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z), \end{array} \right. \quad (\text{I.61})$$

Рекуррентные формулы, содержащие функции $I_\nu(z)$, доказываются подстановкой в них ряда (I.49). Соответствующие формулы для функций $K_\nu(z)$ при ν , отличном от целого числа, проверяются путем подстановки в них выражения (I.50) и использования формул первой группы. Справедливость последних соотношений при целом ν следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку. Укажем ещё на две полезные

формулы:

$$\begin{cases} I_{-n}(z) = I_n(z), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ K_{-\nu}(z) = K_\nu(z), \end{cases} \quad (\text{I.62})$$

первая из которых вытекает из (I.49), если принять во внимание, что при $\nu = -n$ первые n членов разложения обращаются в нуль. в то время как вторая является прямым следствием определения функции Макдональда (I.50). Разложение функции $K_n(z)$ при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ может быть получено из (I.51). Приведем окончательный результат вычисления:

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \quad (\text{I.63})$$

$$+ \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k!(k+n)!} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \right. \quad (\text{I.64})$$

$$\left. \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right\}, n = 0, 1, 2, \dots; |\arg z| < \pi. \quad (\text{I.65})$$

Из (I.63) вытекает, что асимптотическое поведение функции $K_n(z)$ при $z \rightarrow 0$ определяется формулами

$$K_0(z)|_{z \rightarrow 0} \ln \frac{2}{z}; \quad (\text{I.66})$$

$$K_n(z)|_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, n = 1, 2, \dots, \quad (\text{I.67})$$

поэтому $K_n(z)|_{z \rightarrow 0} \infty$.

Непосредственно для решения нашей системы необходимы:

$$K_1(\lambda_*) = \frac{1}{\lambda_*}, K_2(\lambda_*) = \frac{2}{\lambda_*^2}, K_3(\lambda_*) = \frac{8}{\lambda_*^3} \quad (\text{I.68})$$

Подставляя функции Бесселя в выражения (I.46-I.48) получим:

$$\varepsilon_{pl} = \frac{12q^4 \Phi^4}{\pi^2 \lambda_*^4} \quad (\text{I.69})$$

$$\varepsilon_{pl} + \rho_{pl} = \frac{16q^4 \Phi^4}{\pi^2 \lambda_*^4} \quad (\text{I.70})$$

$$\sigma = \frac{8q^4\Phi^4}{\pi^2\lambda_*^2} \quad (\text{I.71})$$

Если $\lambda_* = \left|\frac{q\Phi}{\theta}\right|$, то получим:

$$\varepsilon_{pl} = \frac{12\theta^4}{\pi^2} \quad (\text{I.72})$$

$$\varepsilon_{pl} + \rho_{pl} = \frac{16\theta^4}{\pi^2} \quad (\text{I.73})$$

$$\sigma = \frac{8\theta^4}{\pi^2} \quad (\text{I.74})$$

Глава II

Численное моделирование

II.1 Численное решение задачи Коши

С учетом закона сохранения числа частиц задача о космологической эволюции статистической системы скалярно заряженных частиц сводится к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений: уравнения первого порядка (I.24) – уравнения Эйнштейна и уравнения второго порядка (I.23) – уравнения поля. Для постановки задачи Коши для системы (I.23) – (I.24) необходимо задать начальные условия для величин $a(t_0)$, $\Phi(t_0)$, $\dot{\Phi}(t_0)$, $\theta(t_0)$. Будем полагать в дальнейшем:

$$t = 0; \quad a(0) = 1; \quad \dot{\Phi}(0) = 0. \quad (\text{II.1})$$

В космологическом сценарии, соответствующем начальным условиям (II.1), в момент времени $t = 0$ кинетическая энергия скалярного поля обращается в нуль, а уравнение состояния скалярного поля принимает вид:

$$\rho_s(0) + \varepsilon_s(0) = 0. \quad (\text{II.2})$$

Заметим, что выбор начального момента времени t_0 произволен, а второе из условий (II.2) фактически определяет лишь единицу масштаба и всегда реализуемо. Поэтому, фактически, необходимо задать лишь начальные условия для одной искомой потенциальной функции $\Phi(0)$, а также определить константу в соотношении (I.35). В случае Больцмановской системы «частицы - античастицы» эта константа равна нулю, что приводит к решению (I.44), а в случае вырожденной однокомпонентной Ферми-системы эту константу можно определить с помощью отношения (I.34), которое с учетом (II.1) принимает вид:

$$\rho_F(0) = p_0 \quad (\text{II.3})$$

Однако, задание в качестве начальных условий размерных функций p_0 (или θ_0 – для Больцмановской плазмы) и Φ_0 не очень удобно для численного моделирования. Вместо них мы зададим две безразмерные скалярные функции, имеющие явный физический смысл:

$$p_l = \frac{\rho_{pl}(t)}{\varepsilon_{pl}(t)} \Rightarrow p_l^0 = p_l(0) \in [0, 1/3]; \quad (\text{II.4})$$

$$\eta_s = \frac{\varepsilon_s(t)}{\varepsilon_{pl}(t)} \Rightarrow \eta_s^0 \in (-\infty; +\infty). \quad (\text{II.5})$$

Задавая отношение p_l^0 , мы можем определить начальный импульс Ферми p_0 (либо 0), а задавая затем η_s^0 , мы можем определить. Введем также необходимые для анализа безразмерные скалярные функции ε :

$$\rho = (\varepsilon)\varepsilon \Rightarrow (\rho_s + \rho_{pl}) = (\varepsilon)(\varepsilon_s + \varepsilon_{pl}) \quad (\text{II.6})$$

– суммарный коэффициент баротропы и $\Omega(\varepsilon)$:

$$\Omega = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2}(1 + 3) \quad (\text{II.7})$$

– инвариантное космологическое ускорение. В такой постановке задача определяется четырьмя независимыми начальными условиями – неизменяемыми вторым и третьим условиями (II.1), изменяемыми (II.4) и (II.5), а также тремя параметрами – фундаментальными константами: m, q, m_s . Таким образом, в задаче 5 произвольных констант.

II.2 Размерность физических величин в космологической модели

Из определения эффективной массы, а также из определения плотности энергии скалярного поля следует размерность этих величин в единицах комптоновской длины

$$[t] = l/c \rightarrow l_i[m] = [\mu] = \hbar/lc \rightarrow l^{-1}$$

$$[\varepsilon] \rightarrow l^{-4}; [\Phi] = [m] = [\mu] \rightarrow l^{-1}; [q] \rightarrow 1 \quad (\text{II.8})$$

В обычных единицах $[m, l, t]$ заряд q имеет размерность $m^{1/2}l^{3/1}t^{-1}$, а потенциал скалярного поля – $\Phi = m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$. В планковских единицах

II.3. Нормальная система уравнений для газа Ферми

значение $q\Phi \sim 1$ соответствует эффективной массе скалярно заряженных частиц порядка планковской массы. Предварительно необходимо масштабировать задачу и вместо масштабного фактора введём безразмерную функцию:

$$\Lambda = \ln a(t); \Lambda(0) = 0, \quad (\text{II.9})$$

так что:

$$\dot{\Lambda} = \frac{\dot{a}}{a} = H(t) \quad (\text{II.10})$$

есть постоянная Хаббла, а инвариантное космологическое ускорение выражается через Λ следующим образом:

$$\Omega = 1 + \frac{\ddot{\Lambda}}{\dot{\Lambda}^2} \equiv 1 + \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (\text{II.11})$$

Заметим, что часто используемое в космологических моделях приближение медленного скатывания, которое мы здесь нигде не используем:

$$|\dot{H}| \ll H^2, \quad (\text{II.12})$$

можно записать в виде с учетом (II.11):

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \equiv |\Omega - 1| \ll 1 \Rightarrow \rightarrow -1 \quad (\text{II.13})$$

II.3 Нормальная система уравнений для газа Ферми

С помощью введённых безразмерных переменных выражение для функции ψ в модели вырожденной Ферми-системы можно записать в виде:

$$\psi = \frac{p_0}{m_*} e^{-\lambda}. \quad (\text{II.14})$$

Приведём систему дифференциальных уравнений к нормальному виду для численного интегрирования:

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{\varepsilon_{pl} + \varepsilon_s} \quad (\text{II.15})$$

$$\dot{\Phi} = Z \quad (\text{II.16})$$

$$\dot{Z} = -3\dot{\Lambda}Z - \epsilon_2 m_s^2 \Phi - 4\pi\epsilon_1 \sigma \quad (\text{II.17})$$

в уравнении (II.15) которой необходимо поставить выражения для плотности энергии Ферми-системы (II.17) и скалярного поля (II.19) с учётом определения функции ψ (II.14) и уравнения (II.16), а в уравнение (II.17) подставить выражение для $\dot{\Lambda}$ из полученного уравнения (II.15) и выражение для σ из соотношения (I.30)

II.4 Нормальная система дифференциальных уравнений

После необходимых вычислений, получим нормальную систему уравнений:

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \sqrt{\frac{12q^4\Phi^4}{\pi^2\lambda_*^2} + \frac{\epsilon_1}{8\pi} (Z^2 + \epsilon_2 q^2 \Phi^4)}; \quad (\text{II.18})$$

$$\dot{Z} = -Z\sqrt{24\pi} \sqrt{\frac{12q^4\Phi^4}{\pi^2\lambda_*^4} + \frac{\epsilon_1}{8\pi} (Z^2 + \epsilon_2 q^2 \Phi^4)} - \epsilon_2 q^2 \Phi^2 - \epsilon_1 \frac{32q^4\Phi^3}{\pi\lambda_*^2}; \quad (\text{II.19})$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (\text{II.20})$$

$$\dot{\lambda}_* = \left(\frac{\lambda_*}{1 + \frac{\lambda_*^2}{12}} \dot{\Lambda} + \frac{1}{q^3\Phi^4 \left(\frac{24+2\lambda_*^2}{\lambda_*^6} \right)} \dot{\Phi} \right) \left[4q^3\Phi^3 \left(\frac{48}{\lambda_*^4} - \frac{1}{\lambda_*^2} \right) \right], \quad (\text{II.21})$$

где в уравнение (II.21) необходимо подставить выражение для $\dot{\Lambda}$ из уравнения (II.18). Необходимо, однако, помнить, что рассматриваемая здесь симметричная задача может быть реализована лишь в двух случаях (I.46). Рассмотрим их подробнее. Второй случай описывает модель с минимальным взаимодействием.

Упростим полученную систему уравнений переписав учитывая, что $\lambda_* =$

$$\left| \frac{q\Phi}{\theta} \right|:$$

$$\dot{\Lambda} = -4\sqrt{\frac{2q^2\Phi^2\theta^2}{\pi} + 3\epsilon_1(Z^2 + \epsilon_2q^2\Phi^4)}; \quad (\text{II.22})$$

$$\dot{Z} = -12Z\sqrt{\frac{2\theta^4}{\pi} + 3\epsilon_1(Z^2 + \epsilon_2q^2\Phi^2)}; \quad (\text{II.23})$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (\text{II.24})$$

$$(\text{II.25})$$

Учитывая асимптотику функции Бесселя, в случае $q = 0$ в уравнений (II.19) $m_{\pm} = m$, $\lambda_{\pm} = \lambda$, а уравнения (II.20) и (II.22) упрощаются:

$$\dot{Z} = -12Z\sqrt{\frac{2\theta^4}{\pi} + 3\epsilon_1Z^2}; \quad (\text{II.26})$$

$$\ln \lambda_* = \dot{\Lambda} \left[1 + \frac{q^2\Phi^2}{12\theta^2} \right]^{-1}. \quad (\text{II.27})$$

следует:

$$\ln \lambda_* = \Lambda \Rightarrow \lambda_* \sim a(t) \Rightarrow \theta \sim a^{-1}(t) \quad (\text{II.28})$$

-закон космологической эволюции температуры в ультрарелятивистской плазме. При $m = 0$, в случае $m_{\pm} = |q\Phi|$, $\lambda_{\pm} = \left| \frac{q\Phi}{\theta} \right|$ уравнения (II.20) и (II.22) будут следующими:

$$\dot{Z} = -12Z\sqrt{\frac{2\theta^4}{\pi} + 3\epsilon_1(Z^2 + \epsilon_2q^2\Phi^2)} - \epsilon_2q^2\Phi^2 - \epsilon_1\frac{32q^2\theta}{\pi}; \quad (\text{II.29})$$

$$\dot{\Phi} = Z; \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{d \ln \lambda_*}{dt} = \frac{d \ln(a|\Phi|)}{dt} \frac{1}{1 + \frac{3q\Phi}{4\theta}}. \quad (\text{II.31})$$

В общем случае уравнение (II.32) также решается в квадратурах:

$$\int_0^{\lambda} \left[1 + \frac{zK_2(z)}{3K_3(z)} \right] \frac{dz}{z} = a\Phi. \quad (\text{II.32})$$

Учитывая далее рекуррентные соотношения между функциями Бесселя

$$\frac{d}{dz}K_n(z)z^n = -K_{n-1}(z)z^n,$$

можно вычислить интеграл (II.33) и получить:

$$K_3(\lambda_*) = (a\Phi - \Phi_0)^{-3}K_3\lambda_*^0 \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{8}{\lambda_*} = (a\Phi - \Phi_0)^{-3}\frac{8}{\lambda_*^0}, \quad (\text{II.34})$$

алгебраическую связь между функциями $a(t)$, $\theta(t)$, $\Phi(t)$. При этом, как и в случае вырожденной Ферми-системы, остаются нерешенными лишь 2 дифференциальных уравнения (три для нормальной системы). Заметим, что из (II.34) в ультрарелятивистском пределе получается асимптотически точное решение:

$$\lambda_* \approx \lambda_0(a\Phi - \Phi_0) \Rightarrow \frac{|\Phi|}{\theta} \approx \frac{|\Phi_0|}{\theta_0}(a\Phi - \Phi_0), \quad (\text{II.35})$$

которое при достаточно больших значениях масштабного фактора снова дает ультрарелятивистский закон эволюции обратной температуры (II.29):

Глава III

Результаты численного моделирования

III.1 Численное решение математической модели в пакете Maple.17

Рассмотрим решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (II.16-II.18) с помощью пакета Maple.17. Где $Y(t)$ - квадрат температуры, $Z(t)$ - производная скалярного потенциала, $F(t)$ - скалярный потенциал.

```
restart;  
read "YuDifEquat.m";  
#theta^2=Y  
Eqs:=(q,epsilon1,epsilon2)->{D(F)(t)=Z(t),  
D(Y)(t)=-4*sqrt((2*Y(t)*F(t)^2*q^2  
+3*epsilon1*(Z(t)^2 \\  
+epsilon2*q^2*F(t)^4)),  
D(Z)(t)=-12*Z(t)*sqrt(2*Y(t)^2/Pi+  
3*epsilon1*(Z(t)^2+epsilon2*q^2*F(t)^4))};
```

$$Eqs := (q, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \rightarrow D(F)(t) = Z(t),$$

$$D(Y)(t) = -4\sqrt{2Y(t)F(t)^2q^2 + 3\varepsilon_1Z(t)^2 + \varepsilon_2q^2F(t)^4} \quad (\text{III.1})$$

$$D(Z)(t) = -12Z(t)\sqrt{\frac{2Y(t)^2}{\pi} + 3\varepsilon_1Z(t)^2 + \varepsilon_2q^2F(t)^4}$$

Рассмотрим частный случай решения системы при $q=0.01$:

```
EQS:=Eqs(0.01,1,1);
```

$$EQS := D(F)(t) = Z(t),$$

$$D(Y)(t) = -4\sqrt{0.0002Y(t)F(t)^2 + 3Z(t)^2 + 0.0003F(t)^4}, \quad (III.2)$$

$$D(Z)(t) = -12Z(t)\sqrt{\frac{2Y(t)^2}{\pi} + 3Z(t)^2 + 0.0003 - 3F(t)^4}$$

Зададим начальные условия:

$$\text{Inits} := \{F(0)=0.1, Y(0)=1, Z(0)=0\};$$

$$\text{Inits} := F(0) = 0.1, Y(0) = 1, Z(0) = 0 \quad (III.3)$$

Если исходная система дифференциальных уравнений содержала уравнения второго или более порядков, в последовательности решений будут содержаться также и значения производных включительно до n-1 порядков. В этом случае в численном решении будут содержаться n-1 последовательность, и для извлечения производных i-го порядка необходимо применять процедуру вида Solve(i), где Solve - последовательность численных решений:

$$\text{SDS1} := \text{DifEq}[\text{NumDsolve}](EQS, \text{Inits}, \text{rosenbrock});$$

$$\text{SDS1} := [[\text{proc}(t)...\text{endproc}, \text{proc}(t)...\text{endproc}, \text{proc}(t)...\text{endproc}]]$$

$$\text{SDS1}(0);$$

$$[[.1000000000000000, 1., 0.]]$$

$$\text{SDS1}(0.5);$$

$$[[.1000000000000000, .997152438633364, 0.]]$$

$$\text{SDS1}(2);$$

$$[[.1000000000000000, .988633754496620, 0.]]$$

Процедура $\text{DifEq}[\text{SysOdenConvNorm}](EQS)$ удобна для извлечения различной информации об исходной системе дифференциальных уравнений и начальных условий. Вывод решений осуществляется в виде упорядоченного списка вложенными в него Mп упорядоченными списками (Mп - максимальный порядок уравнений в системе ОДУ). При этом первый список содержит численные значения n искомым функции: $[X[1](t), \dots, X[n](t)]$, где n - число уравнений системы ОДУ. (т.е. число неизвестных функции).

Порядок записи значений функции совпадает с порядком записи дифференциальных уравнений системы. Второй упорядоченный список содержит значения первых производных тех функции производные которых не ниже второго порядка содержатся в системе ОДУ. Третий упорядоченный список содержит значения первых производных тех функции, производные которых не ниже третьего порядка содержатся в системе ОДУ. Порядок записи значений вторых производных функции в списке совпадает с порядком записи дифференциальных уравнений системы - при этом пропускаются значения вторых производных тех функции, производные выше второго порядка которых не содержатся в системе ОДУ и т.д.

DifEq[SysOden_ConvNorm] (EQS) ;

$$[3, [F(t) = X_1(t), Y(t) = X_2(t), Z(t) = X_3(t), t = t], [\frac{d}{dt}X[1](t) = X_3(t),$$

$$\frac{d}{dt}X_2(t) = -4\sqrt{0.0002X_2(t)X_1(t)^2 + 3X_3(t)^2 + 0.0003X_1(t)^4},$$

$$\frac{d}{dt}X_3(t) = -12X_3(t)\sqrt{\frac{2X_2(t)^2}{\pi} + 3X_3(t)^2 + 0.0003X_1(t)^4},$$

SDS1 [1] [1] (1) ;

0.1000000000000000

sqrt (SDS1 [1] [2] (1)) ;

0.997150378453096

Theta := (t) -> evalf (sqrt (sqrt (SDS1 [1] [2] (t)))) ;

$$\Theta := t \rightarrow evalf \left(\sqrt{\sqrt{SDS1_{[1][2]}(t)}} \right)$$

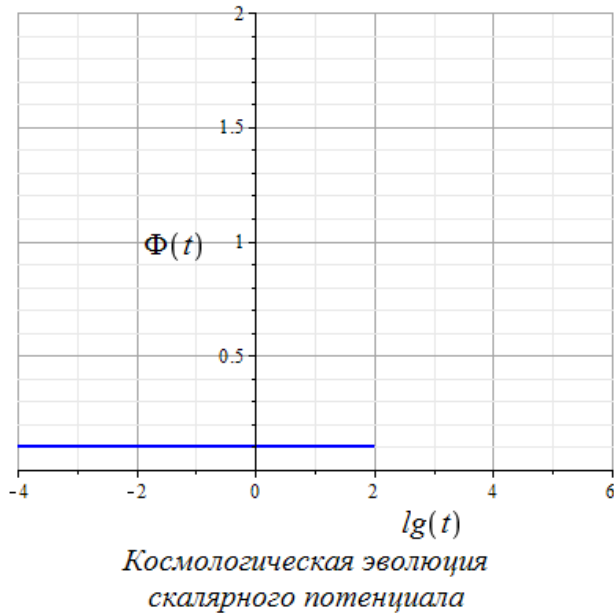
Theta(10) ;

В следующем разделе приведена визуализция решений данной системы.

III.2 Результаты моделирования

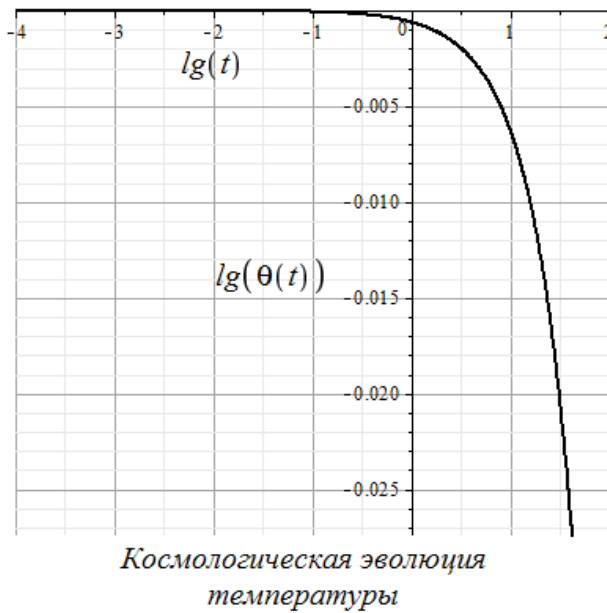
Изобразим фазовую траекторию системы в двумерной плоскости:

```
plot((SDS1[1][1])(10^t),t=-4..2,  
caption='Космологическая эволюция скалярного потенциала',  
captionfont=[TIMES,ROMAN,16],labels=[lg(t),Phi(t)],  
labelfont=[TIMES,ROMAN,16],numpoints=5000,view=[-4..2,0..2],  
gridlines,thickness=2,color=blue);
```



```
plot(log10(Theta(10^t)),t=-4..2,  
caption='Космологическая эволюция температуры',  
captionfont=[TIMES,ROMAN,16],labels=[lg(t),lg(theta(t))],  
labelfont=[TIMES,ROMAN,16],numpoints=1000,  
gridlines,thickness=2,color=black);
```

III.2. Результаты моделирования



```
plot((SDS1[1])[3](10^t),t=-8..2,-0.1..0.1,  
caption='Космологическая эволюция производной скалярного потенциала',  
captionfont=[TIMES,ROMAN,16],labels=[lg(t),diff(Phi(t),t)],  
labelfont=[TIMES,ROMAN,16],numpoints=100,  
gridlines,color=black,thickness=2);
```



Заключение

Таким образом, в данной работе решены следующие задачи:

1. Рассмотрена модель космологической эволюции ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем.
2. Построены алгоритмы решения задачи Коши о космологической эволюции ультрарелятивистской Больцмановской плазмы скалярно взаимодействующих частиц с массивным фантомным скалярным полем.
3. Проведено численное моделирование системы дифференциальных уравнений математической модели с помощью пакета Maple.17

Таким образом, задачи, поставленная в квалификационной работе, выполнены.

Литература

- [1] Л.Д.Ландау. *Механика*. Москва: “Наука”, – 1988. Том 1, – 214 с.
- [2] Л.Э.Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения*, Москва, Гостехиздат, 1958.
- [3] С.А. Агафонов, *Дифференциальные уравнения*, Москва, “МГТУ им. Н.Э. Баумана”, 2004. – 348 с.
- [4] Н.П.Еругин. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений*, Минск, “Наука и техника”, 1979. –744 с.
- [5] Игнатьев Ю.Г. *Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр*. Компьютерная версия, Казань, 2002.
- [6] В.К. Романко, Н.Х. Агаханов, В.В. Власов, Л.И. Коваленко. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению*, Москва, “ЮНИМЕДИАСТАЙЛ”, 2002. –256с.
- [7] В.Н. Говорухин, В. Г. Цибулин *Введение в Maple. Математический пакет для всех*. -Москва: Мир, 1997.
- [8] Матросов А. *Maple 6. Решение задач высшей математики и механики*. Изд-во “БХВ-Петербург”, Санкт-Петербург, 2001.
- [9] Р. В. Загретдинов, Ф. М. Аблаев, Т. М. Гаврилова, С. Н. Перфилов: *Издательская система LaTeX* . - Казань, 1994.
- [10] С. Львовский: *TEX* - Москва, 1996.
- [11] Yu.G. Ignat’ev. Relativistic Kinetics of Nonequilibrium Processes in a Gravitation Fields. – Kazan: Foliant Publ. – 2010; <http://rgs.vniims.ru/books/const.pdf>.
- [12] D. Galtsov and E.Davidov. In : Quantum Theory and Cosmology. Sankt-Peterburg. Freedman Laboratory. -2009. – pp. 25-44. (in Russian

- [13] Yu.G. Ignat'ev, R.F. Miftakhov. // Trudi ii-Rossijskoj shkoli "Actual Theoretical Problems of Gravitation and Cosmology" (Gracos-2009). – 2009. – Kazan, Russia. Publ. "Foliant". – pp. 76-83.



¹© Оформление: *LaTeX* - стиль *B^LB₁L₁O* профессора Ю.Г. Игнатъева

Заключительный лист

Подпись автора работы _____

Дата _____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защищена в ГАК с оценкой

" _____ "

Дата _____

Секретарь _____ ГАК
