УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 157, кн. 1 Физико-математические науки *2015*

УДК 517.98

ОБ ИДЕАЛАХ C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННОЙ СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ

А.Ю. Кузнецова, Е.В. Патрин

Аннотация

В работе рассмотрена C^*-подалгебра алгебры всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве l^2, порожденная алгеброй мультипликаторов и семейством операторов частичных изометрий, удовлетворяющих некоторым соотношениям. Исследованы идеалы как в исследуемой алгебре, так и в факторалгебре по компактным операторам. Показано, что факторалгебра представима в виде прямой суммы двух главных идеалов и обладает нетривиальным центром.

Ключевые слова: C^*-алгебра, частичная изометрия, главный идеал, центральный проектор, алгебра Калкина.

Введение

В настоящей работе мы продолжаем исследовать свойства алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, конструкция которой была предложена в [12]. Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является операторной алгеброй, порожденной семейством частичных изометрий и мультипликаторами, или, что то же, полугруппой (с некоторой системой соотношений на образующие) и максимальной коммутативной подалгеброй. Отправной точкой является заданное на произвольном счетном множестве отображение, которое определяет на пространстве l^2 семейство частичных изометрий, чьи проекторы на начальные и конечные подпространства удовлетворяют определенным соотношениям.

В работе [1] Кунц впервые начал исследовать операторную алгебру $\mathcal{O}_n$, $n \in (\mathbb{N} \setminus \{1\}) \bigcup \{\infty\}$, порожденную семейством некоммутирующих изометрий, чьи проекторы на конечное подпространство в сумме дают единицу. С этой работы начались исследования алгебр, порожденных как изометриями, так и частичными изометриями, удовлетворяющими некоторым соотношениям. В качестве примера можно привести алгебры Кунца – Кригера [2], Кунца – Пимзнера [3], алгебры, ассоциированные с операторами подсдвига [4, 5].

Алгебру $\mathfrak{M}_\varphi$ можно в некотором смысле отнести к алгебрам, порожденным с помощью частичных изометрий с соотношениями на проекторы на начальные и конечные подпространства, причем эти соотношения определяются с помощью заданного на множестве отображения.

С другой стороны, алгебру $\mathfrak{M}_\varphi$ можно рассматривать как модификацию алгебры Арзуманяна – Вершика [6, 7], которая определяется как регулярное представление алгебры, порожденной бициклической полугруппой и некоторой коммутативной алгеброй с фиксированными коммутационными соотношениями.

В [12] было показано, что алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является ядерной $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй, причем подалгебра, отвечающая нулю, является индуктивным пределом лиминальных C^*-алгебр.

В настоящей работе мы описываем семейства собственных идеалов алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, а также центр и семейства главных идеалов факторалгебры по компактным операторам (аналог алгебры Калкина). Приводятся примеры алгебр $\mathfrak{M}_\varphi$ для инъективного отображения.

1. Необходимые сведения

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ – отображение некоторого счетного множества в себя. Мы предполагаем, что для любого элемента мощность прообраза под действием отображения φ ограничена. Кроме этого, предполагается, что на X отсутствуют циклические для φ элементы, то есть не существует такого $x \in X$, что $\varphi^n(x) = x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $E_y^k = \{x \in X : \varphi^k(x) = y\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. В частности, $E_y^0 = \{y\}$, $E_y^1 = E_y = \{x \in X : \varphi(x) = y\}$ – полный прообраз элемента $y \in X$. Элемент $y \in X$, для которого $E_y = \emptyset$, назовем *φ-начальным* (или просто *начальным*). Очевидно, что если $y_1 \neq y_2$, то $E_{y_1}^k \bigcap E_{y_2}^k = \emptyset$, и для каждого k множество X можно представить в виде дизъюнктного объединения $\coprod\limits_{y \in X} E_y^k$.

Семейство функций $\{e_x\}_{x \in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ ($\delta_{x,y}$ – символ Кронекера), образует естественный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $l^2(X) = \{f : X \to \mathbb{C} : \sum\limits_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty\}$. При каждом фиксированном k гильбертово пространство $l^2(X)$ можно представить в виде прямой суммы конечномерных подпространств, $l^2(X) = \bigoplus\limits_{y \in X} l^2(E_y^k)$. Отображение φ индуцирует оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X), \quad T_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Нетрудно проверить, что сопряженный к T_φ оператор вычисляется по формуле

$$(T_\varphi^* f)(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in E_y} f(x), & \text{если} \quad E_y \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если} \quad E_y = \emptyset. \end{cases}$$

Легко увидеть, что на базисных элементах $T_\varphi^* e_x = e_{\varphi(x)}$.

Оператор T_φ, очевидно, определен на $P(X)$ – пространстве всех конечных линейных комбинаций базисных функций. Область определения T_φ^* плотна, то есть T_φ является сопряженным к плотно определенному оператору, следовательно, допускает замыкание.

Если же мощность прообраза ограничена в совокупности, то оператор T_φ является ограниченным на $l^2(X)$.

В [11] было показано, что операторы $T_\varphi^* T_\varphi$ и $T_\varphi T_\varphi^*$ являются в существенном самосопряженными. Говоря о неограниченных операторах T_φ, $T_\varphi^* T_\varphi$ и $T_\varphi T_\varphi^*$, мы будем подразумевать их замыкания.

Имеем, что $T_\varphi^* T_\varphi = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} k P_k$, где P_k – проектор из $l^2(X)$ на $l^2(X_k) = \{f \in l^2(X) : T_\varphi^* T_\varphi f = kf\}$ и $l^2(X) = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} l^2(X_k)$ (если $X_k = \emptyset$, то полагаем $l^2(X_k) = \{0\}$).

Аналогично, $T_\varphi T_\varphi^* = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} k Q_k$, где Q_k – проектор на $l_k^2 = \{f \in l^2(X) : T_\varphi T_\varphi^* f = kf\}$ для всех $k \neq 0$. Определив l_0^2 как ортогональное дополнение ко всем остальным l_k^2, получим $l^2(X) = \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} l_k^2$.

Заметим, проекторы P_k и Q_k являются эквивалентными и в общем случае не коммутируют друг с другом.

Соответствующий оператор частичной изометрии U_k, $k \neq 0$, определяется следующим образом:

$$U_k e_y = \begin{cases} g_y, & \text{если} \quad y \in X_k, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin X_k. \end{cases}$$

Соответственно,

$$U_k^* g_y = \begin{cases} e_y, & \text{если} \quad y \in X_k, \\ 0, & \text{если} \quad y \notin X_k. \end{cases}$$

Здесь семейство функций $g_y = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{x \in E_y} e_x$ при $y \in X_k$ образует ортонормированный базис в пространстве l_k^2 при $k \neq 0$.

Тогда оператор $T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \dots + \sqrt{m}U_m + \cdots$. Заметим, что для всех k $U_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}} Q_k T_\varphi$ и выполняются равенства:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} U_k U_k^* = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} Q_k = Q : l^2(X) \longrightarrow \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} l_k^2, \\ \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} U_k^* U_k = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} P_k = P : l^2(X) \longrightarrow \bigoplus\limits_{k \in \mathbb{N}} l^2(X_k). \end{cases}$$

Операторная алгебра, порожденная таким семейством частичных изометрий, изучалась в работах [8–11], в них можно также найти подробное изложение всех приведенных выше сведений.

Пусть $C_b(X)$ – алгебра всех ограниченных функций на X. Каждая функция f из $C_b(X)$ порождает оператор

$$M_f : l^2(X) \longrightarrow l^2(X), \quad M_f g = fg,$$

где $g \in l^2(X)$, и $(M_f)^* = M_{\overline{f}}$. Обозначим через $\mathrm{M}(X)$ C^*-алгебру, порожденную всеми операторами M_f (мультипликаторами), $f \in C_b(X)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ C^*-подалгебру $B(l^2(X))$, порожденную алгеброй $\mathrm{M}(X)$ и операторами частичной изометрии $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Любое конечное произведение операторов из семейства $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{U_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$ и мультипликаторов назовем мономом. Очевидно, что линейные комбинации мономов плотны в $\mathfrak{M}_\varphi$. Указанная алгебра была введена в работе [12], где были исследованы ее основные структурные свойства.

2. Идеалы в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$

Сначала сформулируем критерий неприводимости алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ в терминах отображения φ. Это отображение порождает направленный граф $(X, \varphi[X])$ с вершинами в точках x множества X и ребрами $(x, \varphi(x))$.

Теорема 1. *Если граф $(X, \varphi[X])$ связный, то алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ неприводима.*

Доказательство. Алгебра $\mathrm{M}(X) \subset \mathfrak{M}_\varphi$ содержит все проекторы вида $\{P_Y := M_{\chi_Y}\}_{Y \subset X}$, где χ_Y – индикатор подмножества $Y \subset X$, в частности одномерные проекторы $P_{\{x\}} := M_{\chi_{\{x\}}}$. Это означает, что если для фиксированной функции f для некоторого e_x выполняется $(f, e_x) \neq 0$, то $e_x \in \mathfrak{M}_\varphi f$. Отсюда и из связности графа следует, что $\mathfrak{M}'_\varphi = \mathbb{C}I$, где $I = \mathrm{id}_{l^2(X)}$, а значит, $\mathfrak{M}_\varphi$ неприводима. $\square$

Заметим, что алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является унитальной.

Следствие 1. *Если граф* $(X, \varphi[X])$ *связный, то* $\mathfrak{M}_\varphi$ *содержит идеал компактных операторов* $K(l^2(X))$.

В дальнейшем будем предполагать граф $(X, \varphi[X])$ связным.

Отображение φ задает частичный порядок на множестве X. Будем записывать $x \prec y$, если существует такой $m \in \mathbb{Z}_+$, что $\varphi^m(y) = x$. Распространим отношение порядка на естественный базис $\{e_x\}_{x \in X}$ пространства $l^2(X)$, полагая $e_x \prec e_y$, если $x \prec y$. Введенное отношение транзитивно, то есть если $e_x \prec e_z$ и $e_z \prec e_y$, то $e_x \prec e_y$. Из $(U_k e_x, e_y) \neq 0$ следует $e_x \prec e_y$, а из $(U_k^* e_x, e_y) \neq 0$ – $e_y \prec e_x$.

Обозначим $\mathcal{E}_x = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} E_x^k$. Пусть $\mathcal{P}_x$ – проектор на подпространство $\mathcal{H}_x$ с базисом $\{e_y : y \in \mathcal{E}_x\}$. Очевидно, что $\mathcal{P}_x \in \mathfrak{M}_\varphi$ для любого x, поскольку $C_b(X)$ содержит индикатор множества $\mathcal{E}_x$.

Заметим, что если $x \prec y$, то из определению множества $\mathcal{E}_x$ следует, что $\mathcal{E}_y \subset \mathcal{E}_x$, следовательно $\mathcal{P}_y < \mathcal{P}_x$. Если же элементы x и y несравнимы, то $\mathcal{E}_y \cap \mathcal{E}_x = \emptyset$. Отсюда следует

Предложение 1. *Если* e_x *и* e_y *– базисные элементы и*
1) $e_x \prec e_y$, *то* $\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y = \mathcal{P}_y \mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y$;
2) e_x *и* e_y *несравнимы, то* $\mathcal{P}_x \mathcal{P}_y = 0$.

Сформулируем теперь основную лемму.

Лемма 1. *Пусть* x *– произвольный элемент множества* X. *Тогда имеет место включение*

$$\mathcal{P}_x A - A \mathcal{P}_x \in K(l^2(X)) \quad \forall\, A \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для операторов из семейства $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Рассмотрим действие оператора $\mathcal{P}_x U_j - U_j \mathcal{P}_x$ на базисных элементах. Предположим, что $U_j e_y \neq 0$ и $y \in \mathcal{E}_x$. Тогда, очевидно, $(\mathcal{P}_x U_j - U_j \mathcal{P}_x) e_y = 0$. Если $y \notin \mathcal{E}_x$ и $e_y \neq e_{\varphi(x)}$, то опять $(\mathcal{P}_x U_j - U_j \mathcal{P}_x) e_y = 0$. Если же $e_y = e_{\varphi(x)}$, то

$$(\mathcal{P}_x U_j - U_j \mathcal{P}_x) e_y = \mathcal{P}_x U_j e_y = \frac{1}{\sqrt{j}}\, \mathcal{P}_x \sum_{z \in E_{\varphi(x)}} e_z = \frac{1}{\sqrt{j}}\, e_x,$$

то есть оператор $\mathcal{P}_x U_j - U_j \mathcal{P}_x$ является оператором конечного ранга. Для любого монома V оператор $\mathcal{P}_x V - V \mathcal{P}_x$ будет являться оператором конечного ранга. Из плотности линейных комбинаций мономов в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$, вытекает утверждение леммы. □

Поскольку для любого $x \in X$ $\quad l^2(X) = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{H}_x^\perp$, то справедливо аналогичное утверждение.

Лемма 2. *Пусть* x *– произвольный элемент множества* X. *Тогда имеет место включение*

$$(I - \mathcal{P}_x) A - A (I - \mathcal{P}_x) \in K(l^2(X)) \quad \forall\, A \in \mathfrak{M}_\varphi.$$

Теорема 2. *Множества* $\big\{\mathcal{P}_x \mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))\big\}_{x \in X}$, *так же как и* $\big\{(I - \mathcal{P}_x) \mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))\big\}_{x \in X}$, *образуют семейства замкнутых собственных идеалов в* $\mathfrak{M}_\varphi$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из лемм 1 и 2. □

Предложение 2. *Если* $x \prec y$, *то* $\mathcal{P}_y \mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subseteq \mathcal{P}_x \mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$.

Доказательство. Доказательство следует из предложения 1. Случай $\mathcal{P}_y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) = \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$ возможен, когда $\mathcal{E}_x \setminus \mathcal{E}_y$ – конечное множество. Для определенности предположим, что $y \in E_x^l$. Тогда для любого $z \in E_x^l$ (возможно, исключая y) найдется такой $k \in \mathbb{Z}_+$, что $E_z^k = \emptyset$, то есть множество $\mathcal{E}_x \setminus \mathcal{E}_y$ состоит из начальных элементов и их образов. В этом случае $\mathcal{P}_x - \mathcal{P}_y$ – конечномерный проектор. Очевидно, если φ – сюръекция, то $\mathcal{P}_y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subset \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$. □

Теперь рассмотрим другие проекторы в $\mathfrak{M}_\varphi$, удовлетворяющие соотношению из леммы 1. Пусть χ_Y – характеристическая функция некоторого множества Y и P_Y – соответствующий проектор. Каким условиям должно удовлетворять Y, чтобы $P_Y A - AP_Y \in K(l^2(X))$ для любого $A \in \mathfrak{M}_\varphi$?

Лемма 3. *Пусть $Y \subset X$ – некоторое подмножество и*
1) *либо* $\varphi[Y] \subset Y$, *либо* $\operatorname{card}\varphi[Y] \setminus Y = M < \infty$;
2) *либо* $\varphi^{-1}[Y] \subset Y$, *либо* $\operatorname{card}\varphi^{-1}[Y] \setminus Y = M' < \infty$.
Тогда $P_Y A - AP_Y \in K(l^2(X))$ *для любого* $A \in \mathfrak{M}_\varphi$.

Доказательство. Сразу предположим, что Y – счетное множество, то есть P_Y – бесконечномерный проектор, иначе утверждение выполняется автоматически. Как и раньше, достаточно доказать лемму для операторов $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Очевидно, что операторы $P_Y U_k - U_k P_Y \neq 0$ только на базисных векторах $\{e_x\}_{x\in\varphi[Y]\setminus Y}$, если $\varphi^{-1}[Y] \subset Y$, или на $\{e_x\}_{x\in\varphi[Y]\setminus Y} \bigcup \{e_x\}_{\varphi^{-1}[x]\subset\varphi^{-1}[Y]\setminus Y}$. Заметим, что при этом k принимает конечный набор значений, зависящий от множеств $\varphi[Y] \setminus Y$ и $\varphi^{-1}[Y] \setminus Y$. Так же очевидно, что размерность образа $P_Y U_k - U_k P_Y$ не превосходит $\max\big\{\{\operatorname{card} E_{\varphi(z)} : z \in \varphi[Y]\setminus Y\} \bigcup \{\operatorname{card} E_z : \varphi^{-1}[z] \subset \varphi^{-1}[Y]\setminus Y\}\big\} \cdot \max\{M, M'\}$. □

Очевидно, что любой такой проектор порождает в $\mathfrak{M}_\varphi$ идеал вида $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$.

Заметим, что приведенные в лемме 3 условия на множество Y в общем случае не являются необходимыми. Но для отображения с ограниченной в совокупности мощностью прообраза можно сформулировать следующий критерий.

Теорема 3. *Пусть φ – отображение с ограниченной в совокупности мощностью прообразов и $Y \subset X$ – некоторое подмножество. Множество Y порождает идеал $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$ в $\mathfrak{M}_\varphi$ тогда и только тогда, когда*
1) *либо* $\varphi[Y] \subset Y$, *либо* $\operatorname{card}\varphi[Y] \setminus Y = M < \infty$;
2) *либо* $\varphi^{-1}[Y] \subset Y$, *либо* $\operatorname{card}\varphi^{-1}[Y] \setminus Y = M' < \infty$.

Доказательство. Нам нужно только показать, что условия на Y являются необходимыми. Действительно, если $\sup\limits_{y\in X} \operatorname{card}\varphi^{-1}[y] = m < \infty$, то оператор $T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m \in \mathfrak{M}_\varphi$, и если $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$ – идеал, то операторы $P_Y T_\varphi - T_\varphi P_Y$ и $P_Y T_\varphi^* - T_\varphi^* P_Y$ должны быть компактными. Области определения операторов $\{U_k\}_{k=1}^m$ различны, и компактность оператора $P_Y T_\varphi - T_\varphi P_Y$ (и $P_Y T_\varphi^* - T_\varphi^* P_Y$) означает компактность оператора $P_Y U_k - U_k P_Y$ ($P_Y U_k^* - U_k^* P_Y$) для любого $k = 1, 2, \ldots, m$, а это невозможно при нарушении условий 1), 2). □

Теорема 4. *Пусть $Y \subset X$ – такое подмножество, что $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$ – идеал в $\mathfrak{M}_\varphi$. Тогда найдется такой элемент $x \in X$, что*

$$P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subseteq \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \quad \textit{либо}$$

$$P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subseteq (I - \mathcal{P}_x)\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)).$$

Доказательство. Предположим, что найдется такой элемент x, что $x \prec y$ для любого $y \in Y$. Тогда $\mathcal{E}_x$ является минимальным множеством, содержащим подмножество Y. Тогда, очевидно, $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subseteq \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$. Заметим, что если множество Y такое, что граф $(Y, \varphi[Y])$ связен и $\varphi^{-1}[Y] \subset Y$, то $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) = \mathcal{P}_x\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$.

Если же такого элемента x не существует, то рассмотрим множество $X \setminus Y$. Из условий леммы 3 на множество Y видно, что тогда найдется x, что $x \prec y$ для любого $y \in X \setminus Y$. В этом случае $P_Y\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X)) \subseteq (I - \mathcal{P}_x)\mathfrak{M}_\varphi + K(l^2(X))$. $\square$

3. Факторалгебра $\mathfrak{M}_\varphi$

Прежде чем переходить к изучению факторалгебры для $\mathfrak{M}_\varphi$, сформулируем следующее простое утверждение.

Предложение 3. *Подалгебра* $\mathrm{M}(X)$ *является максимальной коммутативной подалгеброй в* $B(l^2(X))$.

Доказательство. Коммутативность алгебры $\mathrm{M}(X)$ очевидна. Допустим, что найдется такой оператор $A \in B(l^2(X))$, что $AP = PA$ для любого $P \in \mathrm{M}(X)$. Но $C_b(X)$ содержит характеристические функции любого элемента $x \in X$, значит, $\mathrm{M}(X)$ содержит все одномерные проектора. Так как A коммутирует со всеми одномерными проекторами, он является линейной комбинацией одномерных проекторов, то есть $A \in \mathrm{M}(X)$. $\square$

Очевидно, что $\mathrm{M}(X)$ изоморфна алгебре диагональных матриц и является максимальной коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{M}_\varphi$.

Приведем важный результат [13, 14], которым воспользуемся в дальнейшем. Напомним, что факторалгебра алгебры $B(H)$ по алгебре компактных операторов $K(H)$ называется алгеброй Калкина $\mathcal{C}$.

Теорема 5 [13]. *Если* $\mathfrak{A} \subseteq B(H)$ *– максимальная коммутативная подалгебра и* π *– фактор-отображение, то* $\pi(\mathfrak{A})$ *– максимальная коммутативная подалгебра в алгебре Калкина* $\mathcal{C}$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi = \mathfrak{M}_\varphi / K(l^2(X))$ – факторалгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ по компактным операторам, $[\mathcal{P}_x]$ – класс эквивалентности проектора $\mathcal{P}_x$. Очевидно, что $[\mathcal{P}_x]$ – проектор в $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$. Напомним, что главным идеалом называется идеал, порожденный одним элементом.

Теорема 6. *Для любого* $x \in X$ *множество* $[\mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$, *так же как и* $[I - \mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ *является главным идеалом в* $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$.

Доказательство. Доказательство следует из лемм 1 и 2. $\square$

Следующее утверждение вытекает из лемм 3 и 1.

Теорема 7. *Пусть задано такое отображение* $\varphi : X \longrightarrow X$, *что существует* $Y \subset X$, *причем*

1) P_Y *и* $P_{X \setminus Y}$ *– бесконечномерные проекторы;*
2) *либо* $\varphi[Y] \subset Y$, *либо* $\operatorname{card} \varphi[Y] \setminus Y = M < \infty$;
3) *либо* $\varphi^{-1}[Y] \subset Y$, *либо* $\operatorname{card} \varphi^{-1}[Y] \setminus Y = M' < \infty$.

Тогда факторалгебра $\widehat{\mathfrak{M}_\varphi}$ *обладает нетривиальным центром.*

Доказательство. Если P_Y – бесконечномерный проектор, то $[P_Y] \neq 0$, так же как и $[I-P_Y] \neq 0$. Поскольку для любого $A \in \mathfrak{M}_\varphi$ (лемма 3) имеем $P_Y A - AP_Y \in \in K(l^2(X))$, то в факторалгебре $[P_Y][A] - [A][P_Y] = 0$, то есть $[P_Y] \in \mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi)$, где $\mathrm{Z}(\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi)$ – центр факторалгебры $\mathfrak{M}_\varphi$. Таким образом, $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ обладает нетривиальным центром. □

Заметим, что теорему 7 можно сформулировать и следующим образом:

Теорема 8. *Пусть задано такое отображение $\varphi : X \longrightarrow X$, что существует элемент $x \in X$, для которого множество $\mathcal{E}_x$ счетно. Тогда факторалгебра $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ обладает нетривиальным центром.*

Доказательство. Все проекторы $\{[\mathcal{P}_x]\}_{x\in X}$ лежат в центре $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ при условии, что $\mathcal{E}_x$ – счетное множество (лемма 1).

Если же найдется множество Y, удовлетворяющее условиям теоремы 7, то по теореме 4 найдется такой $x \in X$, что $Y \in \mathcal{E}_x$ либо $X \setminus Y \in \mathcal{E}_x$. Таким образом, обе формулировки равносильны. □

Теорема 9. *Пусть φ – отображение с ограниченной в совокупности мощностью прообразов и пусть $[P]$ – центральный проектор в $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$. Тогда любой элемент из класса $[P]$ имеет вид $P_Y + K(l^2(X))$, где $Y \subset X$ удовлетворяет условиям теоремы 3.*

Доказательство. Поскольку $[P]$ – центральный проектор, он содержится в максимальной коммутативной подалгебре факторалгебры. Согласно теореме 5 прообраз $[P]$ лежит в $\mathrm{M}(X)$, а значит, имеет вид P_Y, где Y – подмножество в X, очевидно, удовлетворяющее соответствующим условиям. Из теоремы 3 следует, что других центральных проекторов быть не может. □

Далее предполагается, что условие теоремы 7 выполнено.

Предложение 4. *Для любых $x, y \in X$ выполнены следующие условия:*
1) *если $x \prec y$, то $[\mathcal{P}_y]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi \subseteq [\mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$;*
2) *если x и y несравнимы, то $[\mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi \cap [\mathcal{P}_y]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi = \{0\}$.*

Доказательство. Первое утверждение, очевидно, является аналогом предложения 2. Второе сразу следует из предложения 1, поскольку из $\mathcal{P}_x\mathcal{P}_y = 0$ следует $[\mathcal{P}_x][\mathcal{P}_y] = 0$. □

Следствие 2. *Факторалгебра $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ представима в виде прямой суммы двух главных идеалов.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi = [\mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi \oplus [I - \mathcal{P}_x]\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$. □

Заметим, что если φ – инъекция, то в алгебре $\widehat{\mathfrak{M}}_\varphi$ может не быть главных идеалов ($[\mathcal{P}_x] = I$) и разложение становится вырожденным. Такой пример рассмотрен в следующем разделе.

4. Примеры

В качестве примера рассмотрим случай, когда алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ порождается оператором правого сдвига и мультипликаторами, то есть задано

$$\varphi : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{Z}_+, \quad \varphi(n) = n + 1.$$

Обозначим полученную алгебру через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{T}}$. В данном случае алгебра порождается одним коизометричным оператором (см. [9]) $T_\varphi = U$, $UU^* = I$ и мультипликаторами. Оператор U, согласно теореме Кобурна, порождает алгебру Теплица, в которой все бесконечномерные проектора имеют конечномерное дополнение до единицы. Однако алгебра $\mathrm{M}(X)$ содержит бесконечномерные проектора P_Y, где Y – любое счетное множество. Таким образом, факторалгебра $\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{T}}}$ не будет коммутативна.

Предложение 5. *Центр факторалгебры* $\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{T}}}$ *является тривиальным.*

Доказательство. В данном случае для отображения правого сдвига существует начальный элемент – 0. Соответственно, для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ множество $\mathcal{E}_n$ будет иметь конечную размерность, а именно $n+1$. Отсюда все проекторы $\mathcal{P}_n$ будут операторами конечного ранга. Отсюда же и все проекторы P_Y, если $\mathrm{card}(\varphi[Y] \setminus Y) < \infty$, тоже будут операторами конечного ранга. Из теоремы 9 также следует, что других центральных проекторов в $\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{T}}}$ быть не может. □

Заметим, что в данном случае в алгебре $\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{T}}}$ нет главных идеалов.

Рассмотрим еще один пример. Теперь в качестве заданного отображения рассмотрим двусторонний сдвиг, то есть теперь задано

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad \varphi(n) = n+1.$$

Таким образом, алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ порождается унитарным оператором U и мультипликаторами, обозначим ее через $\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}$. Алгебра, порожденная только унитарным оператором, изоморфна алгебре функций, непрерывных на окружности.

Предложение 6. *Центр факторалгебры* $\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}}$ *порождается двумя элементами.*

Доказательство. В отличие от предыдущего случая, рассматриваемое отображение является сюръекцией. Любой проектор $\mathcal{P}_n$ будет бесконечномерным и удовлетворять условиям теоремы 7. Очевидно, что $\mathcal{P}_{n+m} - \mathcal{P}_n \in K(l^2(X))$ для любого m. Для любого проектора вида P_Y, где Y удовлетворяет условиям теоремы 7, найдется такой $n \in \mathbb{Z}$, что $\mathcal{P}_n - P_Y \in K(l^2(X))$ (см. теорему 4). Таким образом, любые два бесконечномерных проектора вида $\mathcal{P}_n$ и $I - \mathcal{P}_n$, а также два бесконечномерных проектора вида P_{Y_1} и P_{Y_2} (где Y_1, Y_2 удовлетворяют условиям теоремы 7), дополняющих друг друга до единицы с точностью до компактного оператора, перейдут при фактор-отображении в одни и те же элементы, обозначим их для определенности $[\mathcal{P}_+]$ и $[\mathcal{P}_-]$, $[\mathcal{P}_+] + [\mathcal{P}_-] = [I]$. □

Таким образом, факторалгебра $\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}}$ имеет единственное разложение,

$$\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}} = [\mathcal{P}_+]\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}} \oplus [\mathcal{P}_-]\widehat{\mathfrak{M}_{\mathfrak{C}}}.$$

Summary

A.Yu. Kuznetsova, E.V. Patrin. On the Ideals of C^*-Algebra Generated by a Family of Partial Isometries and Multipliers.

C^*-subalgebra of the algebra of all bounded operators on the Hilbert space l^2 generated by the multiplier algebra and a family of partial isometries satisfying some relations is covered in the paper. The ideals of the algebra under study, as well as the ideals of the quotient algebra, are considered over compact operators. It is demonstrated that the quotient algebra can be represented as a direct sum of two principal ideals and has nontrivial center.

Keywords: C^*-algebra, partial isometry, principal ideal, central projection, Calkin algebra.

Литература

1. *Cuntz J.* Simple C^*-algebras generated by isometries // Commun. Math. Phys. – 1977. – V. 57, No 2. – P. 173–185.
2. *Cuntz J., Krieger W.* A class of C^*-algebras and topological Markov chains // Invent. Math. – 1980. – V. 56, No 3. – P. 251–268.
3. *Pimsner M.V.* A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz–Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$ // Free Probability Theory, Fields Inst. Commun. – Providence, RI: Am. Math. Soc., 1997. – V. 12. – P. 189–212.
4. *Matsumoto K.* On C^*-algebras associated with subshifts // Int. J. Math. – 1997. – V. 8, No 3. – P. 357–374.
5. *Matsumoto K.* Relation among generators of C^*-algebras associated with subshifts // Int. J. Math. – 1999. – V. 10, No 3. – P. 385–405.
6. *Exel R., Vershik A.* C^*-algebras of irreversible dynamical systems: arXiv:math/0203185v1 [math.OA]. – 2002. – 19 p.
7. *Арзуманян В.А.* Операторные алгебры, ассоциированные с несингулярными эндоморфизмами пространства Лебега // Изв. АН АрмССР. – 1986. – Т. 21, № 6. – С. 596–616.
8. *Grigoryan S., Kuznetsova A.* C^*-algebras generated by mappings// Lobachevskii J. Math. – 2008. – V. 29, No 1. – P. 5–8.
9. *Григорян С.А., Кузнецова А.Ю.* C^*-алгебры, порожденные отображениями // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 5. – С. 694–703.
10. *Grigoryan S., Kuznetsova A.* On a class of nuclear C^*-algebras // An Operator Theory Summer: Proc. 23rd Int. Conf. on Operator Theory. – Bucharest: Theta Foundation, 2012. – P. 39–50.
11. *Кузнецова А.Ю.* Об одном класе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий // Изв. НАН Армении. Матем. – 2010. – Т. 45, № 16. – С. 51–62.
12. *Кузнецова А.Ю., Патрин Е.В.* Об одном классе C^*-алгебр, порожденных частичными изометриями и мультипликаторами // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 6. – С. 44–55.
13. *Johnson B.E., Parrot K.S.* Operators commuting with a von Neumann algebra modulo the set of compact operators // J. Funct. Anal. – 1972. – V. 11, No 1. – P. 39–61.
14. *Shelan S., Steprans J.* Masas in the Calkin algebra without the continuum hypothesis // J. Appl. Anal. – 2011. – V. 17, No 1. – P. 69–89.

Поступила в редакцию
16.01.15

Кузнецова Алла Юрьевна – кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *alla.kuznetsova@gmail.com*

Патрин Евгений Владимирович – ассистент кафедры теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *evgeniipatrin@mail.ru*