Лекция 1.

«Занятия совсем общими полуфилософскими размышлениями у меня самого заняли больше времени и энергии, чем, может быть, кажется издали. В такой выработке совсем общих взглядов итог усилий заключается не в формулировке точно фиксированных результатов, а в общей перестройке собственного сознания и размещения всего в надлежащей перспективе»

А. Н. Колмогоров

«Научный метод... - это совокупность правил, иногда общих, иногда частных, которые помогают исследователю в пути в джунгли поначалу разрозненных, противоречащих друг другу фактов. Научное исследование – это искусство, а правила в искусстве, если они слишком жесткие, приносят больше вреда, чем пользы»

Д. П. Томсон

§1. Объекты, явления, процессы в природе, на которые направлено наше мышление или касается, будем называть одним словом «объекты». Гроза, водопад, рождение человека, распад атома, лев, электрон – все это объекты.

Мы умеем отождествлять и различать объекты. Но это вызвано объективными обстоятельствами и сущностными свойствами объектов (в этом некий трансцендентализм), например, устойчивостью в бытии, повторяемостью.

Объект обладает фундаментальной двойственностью: предметное бытие – идеальное бытие. Пример: деньги. Их предметное бытие – бумажная купюра или металлическая монета. Их идеальное бытие есть та роль, какую они играют в организации жизни общества, товарооборота.

Впоследствии мы приведем в рамках математики фундаментальную двойственность к фундаментальной математической двойственности: пространство – величина. Пространство обусловлено взаиморасположением родственных данному объектов. Величина связана с операторной ролью объекта, его организующей ролью во внешнем (идеальном) бытии, хотя бы в рамках рода.

Отношение объекта и субъекта (мыслящего «я») характеризуется через язык: словами, предложениями. Последние формируют понятие об объекте. Понятие словесно характеризует объект, является символом и паспортом объекта и более или менее однозначно возвращает нас к реальности объекта.

Понятие тройственно:

1. Оно выступает как имя, и через это представлена символьно целостность предложения, его характеризующего.

2. Оно имеет реальный носитель (денотат), созданный в природе или интеллектуальной жизни общества.

3. Оно имеет смысл (концепт денотата), вызывающий в частности процесс его понимания.

Обратимся к известным словарям.

Словарь философских терминов. М. 2004 (МГУ посвящается)

«ОБЪЕКТ – 1) в онтологическом смысле самостоятельный центр бытийной активности; 2) в гносеологическом смысле – то, на что направлена активность субъекта. Объект представляет собой выделенный, относительно обособленный фрагмент реальности, самостоятельно организующий и поддерживающий себя посредством имманентных механизмов воспроизводства (онтологическая трактовка), либо конструируемый познающим субъектом в ходе познавательной деятельности»

Философский словарь. Перевод с немецкого. М. 2003.

«ПОНЯТИЕ – простейший акт мышления в противоположность суждению и умозаключению, которые состоят из понятий. По Зигварту, понятие есть «представление, содержащее в себе требование постоянности, совершенной определенности, всеобщего признания, однозначного языкового выражения».

Кроме самого акта мышления при рассмотрении понятия следует различать следующие моменты: содержание мышления (то, что относится к понятию) и предмет понятия (независимый от мышления объект), затем – объем понятия (совокупность вещей, которые охватываются данным понятием) и содержание понятия (совокупность объединенных в нем признаков одного или нескольких предметов)».

Мы приводим эти выдержки, чтобы усилить восприятие сказанного нами. Есть различия между нашими определениями и приведенными из словарей, но отправляемся мы от наших определений.

К определению понятия сделаем следующие замечания.

1. Смысл определяющего предложения не определяется смыслами отдельных слов только. Есть смысловая целостность самого предложения. Предложение само формирует смыслы слов (изменяет, дополняет их);

2. С этим связано, что понятие находится в развитии – в «реке Гераклита» («Все течет, все меняется. На входящего в воду набегают все новые воды. И смертной сущности нельзя прикоснуться дважды», (перевод Плеханова)). Деятельность человека обогащает понятие все новым содержанием. Наглядный пример – понятие числа. Вначале это понятие охватывало только класс целых положительных чисел, потом проявились числа нуль и отрицательные, числа рациональные, вещественные, комплексные, нестандартные. Число можно воспринимать как код, как гёделевский номер целых теорий и т.д.;

3. Предложение, определяющее понятие, достаточно определено, чтобы удерживать денотат понятия как центр нашего внимания, удерживать объект как «одно». Но в то же время любое предложение имеет необходимую неопределенность, допускающую развитие содержания понятия «вовне». Фиксируя определенное предложение, мы обрубаем многие связи объекта с внешним, в идеальном его бытии. «Но концы этих связей должны торчать».

   Приведем, как пример, замечательное высказывание известного математика и механика Трусделла о силе: «Мы не знаем, что такое сила. Но мы знаем, что можно с ней делать».

   Это прямое указание на относительность понятия «сила»; со временем мы устанавливаем (в ходе экспериментов, практики) все новые факты и законы физики, которые меняют содержание понятия «сила»;

4. Развитие понятия необходимо приводит к противоречиям. «Всякая истина – это еще не доказанная ложь» (Леонид Андреев).

   Пример. Развитие евклидовой геометрии привело к возможности выбора одного из двух противоречащих друг другу аксиом: пятого постулата о параллельных линиях или его отрицания. Как следствие появились неевклидовы пространства.

   Идут параллельно два процесса: обогащается содержание понятия – по-новому формируется денотат, носитель понятия. Следствие развития понятия – неполнота понятия («философский» аналог теоремы Гёделя) и перестройка отношений между основными элементами понятия, включая замену некоторых положений на противоположные.

   В эволюции понятия должны сохраняться преемственность, не отрицание, эквивалентное разрушению, а перестройка с сохранением фундамента;

5. «Глубокое изучение Имманентной Реальности приводит к выводу, что он покоится на трех столпах: на Языке, на Логике и на Науке»

Антонино Дзикини. «Творчество в науке» УРСС. Москва – 2001.

Язык – это предмышление, необходимая среда существования понятий. Точная, сжатая, близкая к полноте передача сущности определенного понятия – это одно из основных требований к языку науки. Иногда не логический строй предложения, а метафора точнее передает смысл понятия. Контекст, в котором передается, развивается метафорическое мышление, это литература, поэзия.

§2. Предметом большей части наших лекций будет математическое мышление. Сразу отметим, что нет отделенного («в чистом» виде) ни математического, ни философского, ни какого-то экспериментального физического мышления. Есть просто мышление – деятельность субъекта, направленная на организацию фактов, такую организацию, которая продуктивна для действия. Но направленное на изучение определенной области естествознания мы можем характеризовать его по этой направленности, как математическое или иное мышление в силу специфических форм мышления, вызываемых особенностями более узкой области размышлений.

В целом же мышление проявляет себя как силлогистическое, доказательное или как ассоциативное, образное. Основу доказательных рассуждений образуют силлогистическая (классическая) логика, сформировавшаяся усилиями ораторов, философов-математиков, завершенная Аристотелем, использованная Евклидом. Именно в Древней Греции была осознана необходимость проводить свои рассуждения в виде строго выделенных форм умозаключения – силлогизмов, отправляясь от максимально очевидных исходных положений – аксиом.

Отметим факторы, обусловившие возникновение современной математики (и науки в целом) именно в Древней Греции:

1. Др. Греция не была единым государством в большее время своей жизни. По крайней мере до А. Македонского Др. Греция представляла объединенные общим племенным происхождением, языком, географическим положением города – государства, политически самостоятельные; многие из них имели в основном

демократическое устройство, но во всех были выборные должности. Политическая самостоятельность и выборность обусловили соревновательность: люди стремились утвердить свой город, как лучший (например, в спорте) или обосновать свои кандидатуры на выборах;

2. Относительная экономическая свобода граждан (не рабов!), свобода (относительная) выбора профессии;

3. Географическое положение, обширные торговые и культурные связи с внешним миром;

4. «Не угнетающая» религия, оформленная как мифологические сюжеты, отражающие скорее реальную историю развития Греции. Боги были сотворены как люди (Гомер), только бессмертны. Это не строго все регламентирующая религия Вавилона или Египта. Религия греков для людей оставляла достаточно свободы, чтобы возникали вопросы:

   (a) Что первоначально, первооснова всего? (Не боги)

   (b) Что такое истина, что делает истинными наши рассуждения? (Не религия)

Пути философии и математики начались с Фалеса и Пифагора, пути осознанного мышления. Силлогистическая логика (классическая) оформилась благодаря их размышлениями над первоосновами, трудам софистов, дававшим уроки, развивавшие искусство убеждать; благодаря приемам ораторов на народных собраниях, стремящихся склонить мнение толпы в определенную сторону. Этот период становления классической логики завершился оформлением ее как науки в трудах Аристотеля, и фундаментальным ее использованием математиком Евклидом (и школой им представляемой).

Аксиомы и правила вывода, сформулированные, например, в «Началах» Евклида – результат схватывания общности в разрозненных актах мышления и абстрагирования от частностей обсуждаемого. Коллективная мысль Древних Греков уловила общее в частностях.

Классическая логика возникла не благодаря исключительно чистому созерцанию области мышления (в таком случае она скорее возникла бы у индийцев-йогов), а благодаря практике. В основании своем силлогизмы отражают не фигуры мышления, а простейшие физические законы. Человек, можно сказать, экспериментально шел к абстрактной форме – фигуре умозаключения. Наблюдая: если явление A вызывает явление B, а за явлением B следует явление C, то всегда после A последует B. Если рык издается тигром, и за спиной раздался рык, то надо спасаться (ибо за спиной тигр). Нечто подобное, многократно повторяющееся было «праматерией» силлогизмов.

Еще одно важное замечание. Если какую-то область мышления (схваченную как понятие!) мы формализуем, то никакая формализация не есть полное представление этой области!

Если «племя» натуральных чисел формализовалось в аксиомах Пеано, то есть еще много другого у чисел, чего нельзя извлечь, пользуясь только формальной арифметикой. Все это многое лежит в метаарифметике, в нумерологии, в чем-то еще, что приходит извне.

Живое мышление не тождественно доказательству. Доказательство есть только один из продуктов мышления, аргументированный силлогизмами способ изложения результатов мышления. Избавленное от всего, от чего можно избавиться, силлогистическое изложение приводит к формальной системе.

После Древней Греции следующий глобальный скачок в математическом мышлении произошел благодаря переходу к единому основанию во всех математических дисциплинах - к теории множеств, заложенной в трудах Кантора. Труды Н. Бурбаки показали формализуемость всех известных классических дисциплин в рамках аксиоматической теории множеств.

Всё же формальные системы – это скорее способ изложения (доказательный) достигнутых результатов, а в получении сложных теорем и развитии теории исследователь пользуется не только (вернее не столько) классическими силлогизмами и правилами вывода классической логики, а и рациональными принципами, большей частью не формализованными в какой-то системе, но организующими рассуждения по поиску идей, путей доказательства или развития теории. Мы назовем эти принципы рациональными принципами метаматематики и постараемся изучить их как содержательную систему в последующих лекциях. Но предварительно изложим как формальную систему арифметику и теорию множеств.

Литература.

1. Эдвард де Боно. Серьезное творческое мышление.

2. Нурали Латыпов. Основы интеллектуального тренинга.
   Издательство «Питер», 2005.

3. И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М. «Наука», 1983.

4. А. Б. Мигдал. От догадки до истины. М. «Просвещение», 2008.

Лекция 2. Формальная арифметика.

Формальную систему образуют:

1. Формальные символы
2. Правила образования формул (определенных конечных последовательностей символов). Перечень аксиом.
3. Правила вывода. Определение формального доказательства (определенных конечных последовательностей формул).

Арифметика как формальная система.

1. Формальные символы (определенные знаки, относительно которых утверждается, что мы можем различать и отождествлять их вхождения):

1. Символы переменных: $x, y, z, ...x_1, ..., a, b, c, ...a_1, ...$;
2. Символы констант: 0;
3. Пропозициональные буквы $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, ..., \mathscr{A}_{12}, ...\mathscr{X}, ...$ (используем заглавные курсивные буквы латинского алфавита, индексируемые или нет натуральными числами).

   Предикатные буквы с предикатными переменными: $\mathscr{A}(a), \mathscr{A}(a, b)...\mathscr{C}_{12}(a, b, c)$,... (переменные в скобках различны). Символ конкретного предиката := (равняется).
4. Логические символы: $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$;
5. Скобки: (,);
6. Символы арифметических операций: $'$ (содержательно обозначает взятие следующего натурального числа: $a' = a + 1$), $+$, $\cdot$;

2. Формулы:

Определенные конечные последовательности формальных символов выделяются как формулы. При интерпретации, формулы соответствуют обычным предложениям.

Другие последовательности формальных символов могут быть содержательно интерпретированы как числа, - такие выражения называются **термами.**

Пример: Последовательность формальных символов $((a) + (b))$ содержательно интерпретируются как число, т.е. это - терм.

Определение терма и формулы дается по индукции. Приведем определенные формулы.

Определение:

1. Если t_1, t_2 - термы, то $(t_1) = (t_2)$ является формулой; Если $P(x_1, x_2, ...x_n)$ - предикатная буква с предикатными переменными, $t_1, ...t_n$ - термы, то $P(t_1, t_2, ...t_n)$ - формула.
2. Если A, B - последовательности формальных символов, которые мы объявили формулами, то следующие последовательности тоже являются формулами:

   $(A) \supset (B), (A)\&(B), (A) \vee (B), \neg(A), \forall x(A), \exists x(B)$, где x - любая переменная;

3. Никаких других формул, кроме получаемых через 1) и 2) нет.

Формулы будем обозначать печатными заглавными латинскими буквами A, B, C, X...

Перечень аксиом и правил вывода (вместе образуют постулаты).

I. Постулаты исчисления высказываний:

1. $A \supset (B \supset A)$. [1]
2. $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$

   1, 2 - аксиомы импликации.
3. $A\&B \supset A$

   $A\&B \supset B$
4. $A \supset (B \supset A\&B)$

   3, 4 - аксиомы конъюнкции.
5. $A \supset A \vee B$

   $B \supset A \vee B$
6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

   6,7 - аксиомы дизъюнкции.
7. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$;
8. $\neg(\neg A) \supset A$

   7,8 - аксиомы отрицания;
9. Правило вывода: $\frac{A, A \supset B}{B}$ черточку можно интерпретировать как слово "дает"(A и $A \supset B$ дают B);

II. Постулаты исчисления предикатов (t - терм, x - переменная), t свободен для x в Ax, то есть переменные входящие в t не попадают под действие соответствующих кванторов, когда t заменяет x .

1. $A(t) \supset \exists x A(x)$;
2. $\forall x A(x) \supset A(t)$;
3. Правило вывода: если C не содержит x свободно[2], то $\frac{C \supset A(x)}{C \supset \forall x A(x)}$;
4. Правило вывода: $\frac{A(x) \supset C}{\exists x A(x) \supset C}$, где C не содержит x свободно;

III. Постулаты формальной арифметики - аксиомы Пеано:

[1]Первую аксиому правильнее было бы записать так: $((A) \supset ((B) \supset (C)))$. Для простоты записи примем соглашение: часть скобок опускать, если их можно однозначно восстановить. В ряду символов $\supset, \&, \vee, \neg, \forall, \exists$ каждый предшествующий символ обладает более высоким рангом, чем последующий, и при восстановлении скобок, в первую очередь восстанавливаются скобки для символа самого высокого ранга, приписывая ему самую большую зону действия.

[2]Формула содержит x связно, если замена переменной на другую не влияет на смысл выражения, например как в записи интеграла: $\int f(x)dx \equiv \int f(y)dy$. Проще можно считать, что в данном случае C не содержит x вообще.

1. $A(0)\&\forall x(A(x) \supset A(x')) \supset \forall x A(x)$ (принцип математической индукции);

2. $a' = b' \supset a = b$;

3. $\neg(a' = 0)$;

4. $a = b \supset ((a = c) \supset (b = c))$;

5. $a = b \supset (a' = b')$;

6. $a + 0 = a$;

7. $a + b' = (a + b)'$;

8. $a \cdot 0 = 0$;

9. $a \cdot b' = a \cdot b + a$;

3. Конечные последовательности формул.

Выделим классы конечных последовательностей формул - формальные выводы и формальные доказательства.

Пусть дано множество формул Γ. Последовательность формул $A_1, A_2, ...A_n$ называется **формальным выводом** из Γ и обозначается следующим образом:

$\Gamma \vdash A_1, A_2, ...A_n$, или короче: $\Gamma \vdash A_n$, если каждая формула последовательности является аксиомой, либо принадлежит Γ, либо следует из предыдущих формул последовательности по одному из трех правил вывода. Если множество Γ пусто, то последовательность называется **формальным доказательством**, а последняя формула A_n - **формальной теоремой** и обозначается $\vdash A_n$.

Пример: (формального вывода)

Докажем формальную теорему: $\vdash a = a$

1. $(a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))$ - аксиома III.4;

2. $(0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))$ - аксиома I.1.

3. $((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) \supset (((0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))) \supset ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))))$ - аксиома I.1;

4. $((0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))) \supset ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$ - правило вывода I.9: $\frac{1.,3.}{4.}$;

5. Используем три раза правило вывода II.3 для 4., каждый раз подставляя вместо $\forall x \to \forall a, \forall b, \forall c$. Тогда в итоге получим:

   $((0 = 0) \supset ((0 = 0) \supset (0 = 0))) \supset \forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$

6. $\forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c)))$ - правило вывода I.9: $\frac{2.,5.}{6.}$

7. Используем три раза аксиому II.2 и правило вывода I.9. В первый раз в качестве t берем $a + 0$ для формулы 6.

   $\forall a\ \forall b\ \forall c\ ((a = b) \supset ((a = c) \supset (b = c))) \supset \forall b\ \forall c\ (((a + 0) = b) \supset (((a + 0) = c \supset (b = c)))$;

8. $\forall b\ \forall c\ (((a + 0) = b) \supset (((a + 0) = c) \supset (b = c)))$ - правило вывода I.9: $\frac{6.,7.}{8.}$;

9. В качестве t подставляем a на места вхождений b в формуле 8:

   $\forall b\ \forall c\ (((a+0)=b) \supset (((a+0)=c) \supset (b=c))) \supset \forall c\ (((a+0)=a) \supset (((a+o)=c) \supset (a=c));$

10. $\forall c\ (((a+0)=a) \supset (((a+0)=c) \supset (a=c)))$ - правило вывода I.9: $\frac{8.,9.}{10.}$;

11. В качестве t подставляем a на места вхождений c в формуле 10, используем аксиому II.2:

    $\forall c\ (((a+0)=a) \supset (((a+0)=c) \supset (a=c))) \supset (((a+0)=a) \supset (((a+0)=a) \supset (a=a)));$

12. $((a+0)=a) \supset (((a+0)=a) \supset \ (a=a))$ - правило вывода I.9: $\frac{10.,11.}{12.}$;

13. $a+0=a$ - аксиома III.6; дважды используя правило вывода I.9, получаем:

14. $a=a$;

Мы сформулировали конкретную формальную систему-арифметику. В самом общем плане формальная система - это система подчиненная неким жестким, однозначно заданным правилам. Соответственно, "формализацию"можно определить как процедуру, цель которой - дать предельно четкое, однозначное и исчерпывающее описание объекта, подлежащего формализации. Для достижения этой цели, прежде всего, используется символическая форма записи тех правил, которым подчинена данная система. Сформулируем несколько общих требований к формализациям.

I). Необходимо, чтобы было формализовано как можно больше содержательных утверждений.

Проверим, что в формальной арифметике могут быть формализованы отношение порядка и отношение "быть остатком от деления a на b". Действительно $a<b \Leftrightarrow \exists c(a+c=b \& \neg(c=0))$, $rm(a,b)=c \Leftrightarrow \exists d(bd{+}c=a \& c<b)$, где $rm(a,b)$ - остаток от деления a на b. Напомним, что $a,b,c...$ интерпретируются как целые положительные числа. Насколько сильна наша формализация показывает следующая теорема.

Теорема: Существует арифметическое высказывание $\beta(c,d,i)$, представимое формулой нашей формализованной арифметики, такое. что для всякой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^n$, $a_i \in N, \exists c,d : \beta(c,d,i)=a_i$ при $i=0,1,...n$.

Доказательство: Введем в рассмотрение следующие функции:
$S=max\{n,a_0,a_1,...,a_n\}$; $d=S!$; $\delta(d,i)=(i+1)d+1, i\in\{0,1,...,n\}$

Отметим свойства этих функций:

1) $\delta(d,i)\equiv d_i>a_i$

2) d_i - взаимно простые числа.

Если p делит d_i,d_j $i\neq j, j>i$, то $p|(d_j-d_i)=((j-i)S!)$. Следовательно, p делит d, что невозможно.

Рассмотрим наборы из *n+1* значений функции $rm(c,d)$, когда c фиксировано, а d пробегает множество из *n+1*, попарно простых чисел $d_0,...,d_n$. Пусть c последовательно принимает значения 0,1,2,3,... Для примера берем $n=1, d_0=3, d_1=4$, получим следующие наборы:

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$rm(c,3)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	...
$rm(c,4)$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...

Мы видим, что когда c изменяется от 0 до 11, пара остатков $rm(c,3), rm(c,4)$ пробегает всевозможные 12 упорядоченных пар чисел a_0,a_1, где $a_0<3, a_1<4$. Чтобы установить это в общем случае, допустим, что $rm(c, d_0), rm(c, d_1), ..., rm(c, d_n)$ принимают соответственно значения $a_0, a_1, ..., a_n$ при $c = j$ и еще при $c = j + k (k > 0)$. Так как j и $j+k$ дают один и тот же остаток a_i при делении на $d_i (i = 0, ..., n)$ их разность k должна делиться на d_i; пусть $k = b_i d_i$. Итак, $k = b_0 d_0 = b_1 d_1 = ... = b_n d_n$, то есть k содержит в качестве множителя каждое из $d_0, d_1, ..., d_n$. Так как по условию $d_0, d_1, ...d_n$ попарно просты, то, по основной теореме арифметики, k должно делиться на их произведение $d_0 \cdot d_1 \cdot ... \cdot d_n$.

Поэтому упорядоченный набор чисел $rm(c, d_0), rm(c, d_1), ..., rm(c, d_n)$ может снова совпасть с любой данной последовательностью чисел $a_0, a_1, ..., a_n$, не раньше, чем c возрастет на $d_0 \cdot d_1 \cdot ...d_n$. При этом получается как раз $d_0 \cdot d_1 \cdot ...d_n$ различных последовательностей чисел $a_0, a_1, ..., a_n$. Но последовательностей $a_0, a_1, ..., a_n$ таких, что $a_0 < d_0, a_1 < d_1, ..., a_n < d_n$ тоже $d_0 \cdot d_1 \cdot ...d_n$. Поэтому каждая такая последвательность должна встретиться однажды в нашей таблице. В качестве требуемой теоремой формулы можно взять $\beta(c, d, i) = rm(c, \delta(d, i))$.

Пример.

$$a^b = c \Leftrightarrow \exists p \exists q\ (\beta(p, q, 0) = 1) \& \forall i (b \geq i \geq 1 \supset \beta(p, q, i+1) = \beta(p, q, i) a \& \beta(p, q, b) c)$$

II). Формальная система должна быть непротиворечива. Замкнутые формулы (это формулы, которые не имеют свободных переменных) могут быть истинными или ложными (с содержательной точки зрения). Естествено потребовать, чтобы формализованная математическая теория включала в себя только содержательно истинные формулы в качестве формальных теорем. Если ограничиться только постулатами группы I, получаем формальную систему, называемую исчислением высказываний.

Имеет место

Теорема. Формула исчисления высказываний формально доказуема тогда и только тогда, когда отвечающая ей пропозициональная функция равна тождественно единице.

(БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА)

Пропозициональная функция получается естественным образом, если интерпретировать значения букв как 1 (истина) или как 0 (ложь). При этом значение формулы есть ее истинность как обычного предложения.

III) Формальная система должна быть богата теоремами.

Определение. Формальная система называется полной, если для всякой ее формулы A, не содержащей свободных переменных либо сама A доказуема, либо ¬A доказуема.

Принципиально важный результат. Теорема Геделя. Всякая формальная система, которая содержит в себе как часть формальную арифметику, является неполной. Всегда существуют высказывания, представляемые в этой формальной системе, которые содержательно истинны, но не доказуемы.

Рассмотрение общей схемы доказательства теоремы Геделя начнем с описания понятия **геделевской нумерации**.

Гедель изобрел способ, который позволил однозначным образом приписать некоторый номер (натуральное число) каждому элементарному символу, формуле или доказательству данной формальной системы, при этом соответствующий формальный объект однозначно восстанавливается по номеру.

1-я группа. Формальные символы.

k-му символу ставится в соответствие k-е простое число:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 5 & 7 & 11 & 13 & 17 & 19 & 23 & 29 & 31 & 37 & 41 & 43 & 47 & \\ \supset, & \&, & \vee, & \neg, & \forall, & \exists, & +, & \cdot, & ', & =, & 0, & (, &), & a, & b, & ,...,x,y,z,... \end{matrix})$$

Таким образом k-му символу ставится в соответствие k-е простое число $p_k > 1$

2-я группа. Формулы.

Берется произведение последовательных простых чисел в степенях, которые являются номерами символов, составляющих формулу. Например:

Пусть A есть формула: $(a = b) \vee (a = 0)$. Тогда ее номер есть $n(A) = 2^{37} \cdot 3^{43} \cdot 5^{29} \cdot 7^{47} \cdot 11^{41} \cdot 13^{5} \cdot 17^{37} \cdot 19^{43} \cdot 23^{29} \cdot 29^{31} \cdot 31^{41}$.

3-я группа. Формальные доказательства.

Доказательство, представленное последовательностью формул $A_1, ..., A_p$ получает в соответствие число:

$2^{n(A_1)} \cdot 3^{n(A_2)} \cdot 5^{n(A_3)} \cdot ... \cdot p_p^{n(A_p)}$, где $n(A_i)$ - номер, поставленный в соответствие формуле A_i.

Если даны натуральные числа n и m, можно конструктивно проверить истинность $A(n, m)$, утверждающего, что m - это номер доказательства формулы с номером n.

Теорема Геделя.

Рассмотрим предикат $\mathscr{A}(a, b)$, a - геделевский номер формулы, обозначенной далее как $A_a(x)$, b - геделевский номер доказательства этой формулы, где вместо x подставлено a, т.е. формулы $A_a(a)$. Предикат $\mathscr{A}(a, b)$ - арифметическое высказывание о числах a и b.

1. $\mathscr{A}(a, b)$ - нумерически выразимое суждение, что означает существование формулы $A(a, b)$ со свойствами:

$\mathscr{A}(a, b) = \text{И} \Rightarrow \mapsto A(a, b)$,

$\mathscr{A}(a, b) = \text{Л} \Rightarrow \mapsto \neg A(a, b)$.

Для доказательства этого факта включим рассматриваемое арифметическое высказывание в более организованный и более общий класс объектов, как рядовой элемент. Это удастся, если мы на более высоком уровне откроем свойство исследуемого объекта, которое как родство повяжет элементы будущего класса.

Так, формулу $A(a, b)$ рассмотрим как числовую функцию $\varphi(a, b) \in \{0, 1\}$ и определим следующий класс функций.

Определение. Функция $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется примитивно рекурсивной, если она имеет один из следующих видов:

1) $x' \equiv x + 1$,

2) $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = const$,

3) $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i, i \in \{1, ..., n\}$,

4) $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \chi(x_1, x_2, ..., x_n, g_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ - где $\chi, g_1, ..., g_n$ уже определены как примитивно рекурсивные.

5) $\varphi(0, x_2, ..., x_n) = g_2(x_2, ..., x_n)$, и для любого y выполняется равенство $\varphi(y, x_2, ..., x_n) = \chi(\varphi(y - 1, x_2, ..., x_n), x_2, ..., x_n)$, g, χ - примитивно рекурсивны.

Пошаговое описание класса дает возможность параметризации каждого элемента класса, сопоставляя каждой функции число так, как, например, мы получаем геделевский номер для формального доказательства. Для доказательства свойств идивида, можем применить метод математической индукции по этому параметру. В частности показывается, что описанный выше предикат $\mathscr{A}(a,b)$ определяет примитивно рекурсивную функцию $\varphi(a,b)$. А для примитивно рекурсивных функций $\varphi(x_1,x_2,...,x_n)$ по шагам их построения индукцией доказывается нумерическая представимость предиката $\varphi(x_1,x_2,...,x_n) = y$ при этом существенно используется функция Геделя $\beta(c,d,i)$.

2. Рассмотрим формулу $\forall b\ \neg A(a,b)$, пусть эта формула имеет геделевский номер $p \leftrightarrow A_p(a) \equiv \forall b\ \neg A(a,b)$. Содержательная интерпретация означает, что $A_p(p)$ утверждает о своей не доказуемости.

Дадим несколько определений.

Определение: Формальная система непротиворечива, если в ней не доказуемы одновременно A и $\neg A$.

Определение: Формальная система ω-непротиворечива, если в ней не доказуемы одновременно $\mapsto A(0); \mapsto A(1); ...; \mapsto A(n); ...; \mapsto \neg\forall x\ A(x)$, ни для какой формулы A.

Теорема. Если формальная система, содержащая формальную арифметику в качестве подсистемы непротиворечива и ω-непротиворечива, то найдется геделевский номер формулы q такой, что в этой системе одновременно недоказуемы $A_q(q)$ и $\neg A_q(q)$.

Доказательство

ссмотрим $A_p(p)$, построенную по высказыванию $\mathscr{A}(a,b)$. Пусть $\mapsto A_p(p) \Rightarrow \exists$ геделевский номер доказательства этой формулы - q. Следовательно $\mathscr{A}(p,q) = true$, т.к. $A(p,q)$ нумерически выражает наше высказывание $\Rightarrow\mapsto A(p,q) \Rightarrow \exists b\ A(p,b) \Rightarrow\mapsto \neg\forall b\ \neg A(p,b) \equiv \neg A_p(p)$. Получается, что доказуемы одновременно и $A_p(p)$, и $\neg A_p(p)$, т.е. система оказывается противоречивой. Допущение $\mapsto A_p(p)$ неверно.

Поскольку $\forall b\ \neg\mathscr{A}(p,b)$ истинно, то по определению нумерической выразимости:

$\mapsto \neg A_p(0), \mapsto \neg A_p(1), \mapsto \neg A_p(n), ...\forall n \in N$.

В силу ω-непротиворечивости неверно, что $\mapsto \neg\forall b \neg A(p,b) \equiv \neg A_p(p)$, т.е. недоказуема и формула $\neg A_p(p)$.

Замечание. Немного усложняя доказательство, можно условие ω-непротиворечивости из предпосылок теоремы убрать.

Ретроспективнй взгляд
и восхождение к абстрактно-всеобщему.

Мы можем интерпретировать теорему Геделя следующим образом. Пусть у нас есть какое-то правило или конструкция, систематическое (т.е. оформлена система) применение которого приводит к неоспоримо справедливому утверждению, тогда столь же неоспоримо, что существует справедливое утверждение, которое нельзя доказать при помощи этого правила.

Например, возьмем за правило принцип математической индукции. Тогда рассуждения, сходные с проведенными при доказательстве теоремы Геделя ппоказывают, что существует теорема, которая не доказуема математической индукцией, и которой, например, является удивительная

Теорема Гудстейна.

ть этой теоремы поясним на конкретном числе.

Возьмем, например, число 581 (можно взять и любое другое). Представим, пользуясь двоичным исчислением только через числа, не большие чем 2: $2^{2^{2+1}+1} + 2^{2^2+2} + 2^2 + 1 = 581$.

Новое число получаем, если число 2 везде увеличиваем на 1 и от того, что получится, отнимем единицу. Получим: $3^{3^{3+1}+1} + 3^{3^3+3} + 3^3$. Далее продолжаем по аналогии: переходим от 3 к 4, получаем: $4^{4^{4+1}+1} + 4^{4^4+4} + 4^4 - 1 = 4^{4^{4+1}+1} + 4^{4^4+4} +$

$3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$). Переходим от 4 к 5, пользуясь той же процедурой. Это приводит к числу $5^{5^{5+1}+1} + 5^{5^5+5} + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$. Теорема утверждает, что в результате последовательного осуществления этих двух операций получается в конце концов 0.

Подробнее о рассмотренной интерпретации и теореме Гудстейна см [2].

Теорема Геделя тесно связана с вопросом алгоритмической разрешимости (а так же с тем, что понятие истины не формализуемо). Допустим, что для формальной системы отсутствует алгоритм, который для любой формулы показывает доказуемость формулы или доказуемость ее отрицания (система алгоритмически неразрешима).

Если эта система полна: $\forall A, \mapsto A$, либо $\mapsto \neg A$, то расположим все формальные доказательства в виде последовательности (в силу счетности множества формальных доказательств). Перебирая все формальные доказательства, найдем то, которое оканчивается либо на A, либо на $\neg A$. Так получаем алгоритм распознавания: доказуема формула или нет. Следовательно, система не полна.

Список литературы

[1] С. Клини. Введение в метаматематику. М., Изд-во ИЛ., 1957г.

[2] Р. Пенроуз. Новый ум короля. М., Изд-во УРСС, 2003г.

Лекция 3. Формализация теории множеств по Бурбаки.

Знаки и знакосочетания.

Следующие формальные символы используются, и предполагается относительно них только то, что мы умеем различать и отождествлять их вхождения в наших конструкциях:

1) Логические знаки: $\square, \tau, \vee, \neg$.

2) Прописные заглавные и строчные латинские буквы, со штрихами или без них: $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'', \ldots, a, b, \ldots, x, y, \ldots$

3) Специальные знаки: $=, \in, \sqsupset, -$.

Знакосочетание теории есть последовательность знаков этой теории, написанных рядом друг с другом, причем некоторые знаки, отличные от букв, могут быть соединены линиями, идущими над строкой и называемыми связями. Пример знакосочетания:

$$\overline{\overline{\tau \vee \neg \in \square} A' \in \square} A''$$

Таким образом, знакосочетание не есть простая последовательность, а есть структурированная связями последовательность (что-то близкое к графу).

Для часто употребляемых знакосочетаний используются специальные обозначения, которые являются уже не символами формальной системы, а сокращающими запись содержательно понимаемыми метасимволами. Например, метасимвол $\Rightarrow$ есть обозначение знакосочетания $\vee\neg$, своего рода имя для этого знакосочетания.

Далее теория строится путем выделения определенных классов знакосочетаний: термов, соотношения, теорем. Чтобы описать эти классы, примем соглашения:

1) Произвольно взятые знакосочетания и буквы будем обозначать прямым шрифтом (или "прямыми" буквами лат. алф.).

2) Пусть A - знакосочетание, x - буква. В последовательности знаков τA соединяем связью каждый экземпляр буквы x в A со знаком τ и, убирая x из A, каждое вхождение x заменяем символом $\square$. Так получаем новое знакосочетание, которое обозначается через $\tau_x(A)$ и не содержит x.
Пример. Символ $\tau_x(\in xy)$ изображает знакосочетание $\overline{\tau \in \square} y$.

3) Знакосочетание $(B|x)A$ получается заменой всех экземпляров быквы x в знакосочетании A на знакосочетание B.

4) Символ $A[x, y]$ означает знакосочетание A, в котором выделены вхождения букв x, y. Символ $A[B, C]$ обозначает знакосочетание, получаемое при одновременной замене буквы x знакосочетанием B и буквы y знакосочетанием C во всех местах их появления в A.

Специальные знаки подразделяюся на субстантивные и реляционные. Каждому специальному числу приписывается целое число, называемое его весом. Знаки $=, \in, \sqsupset$ имеют вес 2.

Знакосочетание называется знакосочетанием *первого рода*, если оно начинается со знака τ или с субстантивного знака или сводится к одной букве; в противном случае знакосочетание называется знакосочетанием *второго рода*.

Формативная конструкция теории $\mathcal{T}$ есть последовательность знакосочетаний, обладающая следующим свойством: для каждого знакосочетания A из последовательности выполняется одно из указанных ниже условий:

а) A есть буква;

б) В последовательности существует знакосочетание второго рода B, предшествующее A, такое, что A есть $\neg B$;

в) Существуют два законосочетания второго рода B и C, предшествующие A (различные или нет), такие, что A есть $\vee BC$;

г) Существует законосочетание второго рода B, предшествующее A и буква x, такие, что A есть $\tau_x(B)$;

д) Существует специальный знак s веса n из $\mathcal{T}$ и n знакосочетаний первого рода $A_1, A_2, \ldots, A_n$, предшествующие A, такие, что A есть $sA_1A_2 \ldots A_n$.

Мы называем *термами* (соответсвенно *соотношениями*) теории $\mathcal{T}$ знакосочетания первого рода (соответственно второго рода), *встречающиеся в формативных конструкциях теории* $\mathcal{T}$.

Пример. В теории множеств, в которой $\in$ есть реляционный знак веса 2, следующая последовательность является формативной конструкцией:

$$\begin{gathered} A \\ A' \\ A'' \\ \in AA' \\ \in AA'' \\ \neg \in AA'' \\ \vee\neg \in AA' \in AA'' \\ \tau \vee \neg \in \square A' \in \square A''. \end{gathered}$$

Чтобы облегчить чтение дальнейшего, мы будем писать отныне в случае, когда A - соотношение "Не (A)" вместо $\neg A$. Если A и B - соотношения, мы будем писать "(A) или (B)" вместо $\vee AB$ и (A) $\Rightarrow$ (B) вместо $\Rightarrow AB$. Иногда мы будем опускать скобки. Читатель сможет без труда определить в каждом случае, о каком знакосочетании идет речь.

Задание специальных знаков определяет термы и соотношения теории $\mathcal{T}$. Чтобы завершить построение теории $\mathcal{T}$, делают следующее:

1) Записывают сначала некоторое количество соотношений теории $\mathcal{T}$; эти соотношения называются *явными аксиомами* теории $\mathcal{T}$; буквы, встречающиеся в явных аксиомах - *константами* теории $\mathcal{T}$.

2) Задают одно или несколько правил, называемых *схемами* теории $\mathcal{T}$, которые должны обладать следующими особенностями:

   а) применение каждого такого правила $\Re$ дает соотношение теории $\mathcal{T}$;

   б) если T - терм теории $\mathcal{T}$, x - буква, R - соотношение теории $\mathcal{T}$, построенное применением схемы $\Re$, то соотношение $(T|x)R$ также может быть построено применением схемы $\Re$.

Всякое соотношение, образованное применением какой-либо схемы теории $\mathcal{T}$, называется *неявной аксиомой* теории $\mathcal{T}$.

Всякий *доказательный текст* теории $\mathcal{T}$ состоит из:

1) вспомогательной формативной конструкции из соотношений и термов теории $\mathcal{T}$.

2) *доказательства* теории $\mathcal{T}$, т.е. последовательности соотношений теории $\mathcal{T}$, встречающихся во вспомогательной фотрмативной конструкции, таких, что для каждого соотношения R этой последовательности выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

   а$_1$) R есть явная аксиома теории $\mathcal{T}$;

   а$_2$) R получается применением схемы теории $\mathcal{T}$ к термам или соотношениям, встречающимся во вспомогательной формативной конструкции;

   б) в упомянутой последовательности существуют два отношения S, T, предшествующие R, такие, что T есть $S \Rightarrow R$.

Теорема теории $\mathcal{T}$ есть соотношение, *встречающееся в каком-нибудь доказательстве теории* $\mathcal{T}$.

Вместо "теорема теории $\mathcal{T}$" говорят также "соотношение, *истинное (верное, справедливое)* в $\mathcal{T}$" или ("предложение" , "лемма" , "следствие" и т.д.) Пусть R - соотношение теории $\mathcal{T}$, x - буква, T - терм теории $\mathcal{T}$, если $(T|x)R$ есть теорема теории $\mathcal{T}$, говорят, что T *удовлетворяет в* $\mathcal{T}$ *соотношению* R (или что T есть некоторое *решение соотношения* R), когда R рассматривается как соотношение по (относительно) x.

Соотношение называется *ложным* в $\mathcal{T}$, если его отрицание есть теорема теории $\mathcal{T}$. Говорят, что теория $\mathcal{T}$ *противоречива*, когда можно написать соотношение, одновременно истинное и ложное в $\mathcal{T}$.

Нижеследующие схемы S1 - S4 неявные аксиомы (мы будем рассматривать в качестве $\mathcal{T}$ только теорию множеств):

S1. *Если A - соотношение теории $\mathcal{T}$, то соотношение (A или A) $\Rightarrow$ A есть аксиома теории $\mathcal{T}$.*

S2. *Если A и B - соотношения теории $\mathcal{T}$, то соотношение A $\Rightarrow$ (A или B) есть аксиома теории $\mathcal{T}$.*

S3. *Если A и B - соотношения теории $\mathcal{T}$, то соотношение (A или B) $\Rightarrow$ (B или A) есть аксиома теории $\mathcal{T}$.*

S4. *Если A, B и C - соотношения теории $\mathcal{T}$, то соотношение*

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \text{ или } A) \Rightarrow (C \text{ или } B))$$

есть аксиома теории $\mathcal{T}$.

Если R - знакосочетание и x - буква, то знакосочетание $(\tau_x(R)|x)R$ обозначается через "существует такое x, что R " , или через $(\exists x)R$. Знакосочетание "не $(\exists x)$ (не R)"обозначается через "для всякого xR" , или через "каково бы ни было x, R" , или через $(\forall x)R$. Сокращающие символы $\exists$ и $\forall$ называются соответсовенно *квантором существования* и *квантором общности*. Буква x не встречается в знакосочетании, обозначаемом символами $(\exists x)R$ и $(\forall x)R$.

В дальнейшем буквой C и следующим за ним натуральным числом будем обозначать дедуктивные критерии, которые устанавливают общий вид для того или иного класса теорем.

C2. *Пусть A - теорема теории $\mathcal{T}$, T - терм теории $\mathcal{T}$, x - буква. Тогда $(T \mid x)A$ есть теорема теории $(T \mid x)\mathcal{T}$.*

C26. *Пусть $\mathcal{T}$ - логическая теория, R - соотношение, x - буква. Соотношения $(\forall x)R$ и $(\tau_x(\neg R)|x)R$ эквивалентны в $\mathcal{T}$.*

В самом деле, $(\forall x)R$ тождественно с "не $(\tau_x($не $R)|x)($не $R)$" , а следовательно, и с "не не $(\tau_x($не $R)|x)R$".

C27. *Если R - теорема логической теории $\mathcal{T}$ и буква x не является константой этой теории, то $(\forall x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$.*

В самом деле, $(\tau_x($не $R)|x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$, согласно C2.

C28. *Пусть $\mathcal{T}$ - логическая теория, R - её соотношение и x - буква. Соотношения "не $(\forall x)R$" и $(\exists x)$(не R) эквивалентны $\mathcal{T}$.*

В самом деле, "не $(\forall x)R$" тождественно с "не не $(\exists x)($не $R)$".

Напомним, что буквой S обозначаются схемы аксиом.

S5. *Если R - соотношение теории $\mathcal{T}$, T - её терм и x - буква, то соотношение $(T|x)R \Rightarrow (\exists x)R$ есть аксиома.*

C29. *Пусть R - соотношение теории $\mathcal{T}$, а x -буква. Соотношения "не $(\exists x)R$" и $(\forall x)$(не R) эквивалентны в $\mathcal{T}$.*

C30. *Пусть R - соотношение теории $\mathcal{T}$, T - её терм и x - буква. Соотношение $(\forall x)R \Rightarrow (T|x)R$ есть теорема в $\mathcal{T}$.*

Если T и U - термы теории $\mathcal{T}$, то знакосочетание $= TU$ есть соотношение теории $\mathcal{T}$ (называемое *соотношением равенства*). Это соотношение обозначается через $T = U$ или $(T) = (U)$.

S6. *Пусть x - буква, T и U - термы теории $\mathcal{T}$ и $R[x]$ - соотношение в $\mathcal{T}$. Тогда соотношение $(T = U) \Rightarrow (R[T] \Leftrightarrow R[U])$ есть аксиома.*

S7. *Если R и S - соотношения теории $\mathcal{T}$, а x - буква, то соотношение $((\forall x)(R \Leftrightarrow S)) \Rightarrow (\tau_x(R) = \tau_x(S))$ есть аксиома.*

Отрицание соотношения $= TU$ обозначается через $T \neq U$ или через $(T) \neq (U)$ (где знак $\neq$ читается: "не равно" , "отлично от").

Теорема 1. $x = x$.

Доказательство. Обозначим через S соотношение $x = x$ теории $\mathcal{T}$. Согласно C27 при всяком соотношении R из $\mathcal{T}$ соотношение $(\forall x)(R \Leftrightarrow R)$ есть теорема в $\mathcal{T}$; следовательно согласно S7, соотношение $\tau_x(R) = \tau_x(R)$, т.е. $(\tau_x(R)|x)S$, есть теорема в $\mathcal{T}$. Принимая за R соотношение "не S" и учитывая C26, получим, что $(\forall x)S$ есть теорема в $\mathcal{T}$. Согласно C30, S поэтому есть теорема теории $\mathcal{T}$. $\square$

Если соотношение $(\forall y)(\forall z)(((y|x)R$ и $(z|x)R) \Rightarrow (y = z))$, где R - соотношение теории $\mathcal{T}$, x - буква, y, z - буквы, отличные друг от друга и от x и не встречающиеся в R, есть теорема, то говорят, что R *однозначно по* x.

C45. *Пусть R - соотношение теории $\mathcal{T}$, а x - буква, не являющаяся константой теории $\mathcal{T}$. Если R - однозначно по x в $\mathcal{T}$, то $R \Rightarrow (x = \tau_x(R))$ есть теорема теории $\mathcal{T}$. Обратно, если для некоторого терма T теории $\mathcal{T}$, не содержащего x, $R \Rightarrow (x = T)$ есть теорема в $\mathcal{T}$, то R однозначно по x.*

Пусть R - соотношение в $\mathcal{T}$. Соотношение "$(\exists x)R$ и существует самое большое одно x, такое, что R" обозначается словами "существует единственное x, такое, что R" . Если это соотношение является теоремой в $\mathcal{T}$, то говорят, что R есть соотношение, *функциональное* по x в $\mathcal{T}$.

Напомним, что теория множеств представляет собой теорию, в которой имеются реляционные знаки $=, \in$ и субстантивный знак $\sqsupset$ (все они имеют вес 2); кроме схем S1 - S7 она содержит также схему S8, которая вводится далее, и явные аксиомы A1, A2, A3, A4 и A5 (перечисляются далее).

Эти явные аксиомы не содержат букв; иначе говоря, теория множеств является теорией без констант.

Определение: Соотношение $(z)((z \in x) \Rightarrow (z \in y))$, в котором встречаются только буквы x и y, записывается одним из следующих способов: $x \subset y, y \supset x$, "x содержится в y " , "y содержит x" , "x есть часть (от) y" , "x есть подмножество (в) y" . Соотношение "не $(x \subset y)$" записывается как $x \not\subset y$ или $y \not\supset x$.

Аксиомой экстенсиональности называется следующая аксиома.

Аксиома экстенсинальности.

A 1. $(\forall x)(\forall y)((x \subset y$ *и* $(y \subset x) \Rightarrow (x = y))$.

Интуитивно эта аксиома означает, что два множества, имеющие одни и те же элементы, равны.

Для того, чтобы доказать $x = y$, достаточно, стало быть, доказать $z \in y$ в теории, получаемой присоединением гипотезы $z \in x$, и $z \in x$ в теории, получаемой присоединением гипотезы $z \in y$, где z буква, отличная от x и y и от констант.

C48. *Пусть R-соотношение, x - буква, y - буква, отличная от x и не встречающаяся в R. Соотношение $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ однозначно по y.*

В самом деле, пусть z - буква, отличная от x и не встречающаяся в R. Присоединим гипотезы $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ и $(\forall x)((x \in z) \Leftrightarrow R)$. Тогда последовательно получаются теоремы:

$$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R) \text{ и } ((x \in z) \Leftrightarrow R),$$
$$(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow (x \in z)), y \subset z, z \subset y.$$

Согласно A1, $y = z$. Это доказывает C48.

Коллективизирующие соотношения.

Пусть R - соотношение, x - буква. Если y и y' обозначают буквы отличные от x и не встречающиеся в R, то соотношения $(\exists y)(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$ и $(\exists y')(\forall x)((x \in y') \Leftrightarrow R)$ тождественны. Так определенное соотношение (которое не содержит x) обозначается символом $Coll_x R$.

Если $Coll_x R$ - теорема теории $\mathcal{T}$, то мы говорим, что соотношение R является коллективизирующим по x и $\mathcal{T}$. В этом случае можно ввести вспомогательную константу, отличную от констант теории $\mathcal{T}$ и не встречающуюся в R, с помощью вводящей аксиомы $(\forall x)((x \in a) \Leftrightarrow R)$, или - что то же самое, когда a не является константой в $\mathcal{T}$, - с помощью аксиомы $(x \in a) \Leftrightarrow R$.

С интуитивной точки зрения сказать, что R -коллективизирующее по x соотношение, значит сказать, что существует такое множество, что объекты, обладающие свойством R, суть в точности элементы из a.

Примеры.

1. Соотношение $x \in y$ очевидным образом является коллективизирующим по x.

2. Соотношение $x \notin x$ не является коллективизирующим по x.

C49. *Пусть R - соотношение, x - буква. Если R является коллективизирующим по x, то соотношение $(\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R)$, где y есть буква, отличная от x и не встречающаяся в R, является функциональным по y.*

Это сразу же вытекает из C48.

Очень часто в дальнейшем мы буем располагать теоремой вида $Coll_x R$. Тогда для изображения терма $\tau_y((\forall x)((x \in y) \Leftrightarrow R))$, не зависящего от выбора буквы y (отличной от x и не встречающейся в R), будет вводиться функциональный символ; мы будем использовать для этой цели символ $\mathcal{E}_x(R)$; соответствующий терм не содержит x. Именно об этом терме будет идти речь, когда мы будем говорить о "множестве (всех) таких x, что R" . По определению соотношение $(\forall x)((x \in \mathcal{E}_x(R)) \Leftrightarrow R)$ тождественно с $Coll_x R$; таким образом, соотношение R эквивалентно в этом случае соотношению $x \in \mathcal{E}_x(S)$.

C50. *Пусть R, S - два соотношения, а x - буква. Если R и S являются коллективизирующими по x, то соотношение $(\forall x)(R \Rightarrow S)$ эквивалентно с $\mathcal{E}_x(R) \subset \mathcal{E}_x(S)$, а соотношение $(\forall x)(R \Leftrightarrow S)$ эквивалентно с $\mathcal{E}_x(R) = \mathcal{E}_x(S)$.*

Аксиома двухэлементного множества.

A 2. $(\forall x)(\forall y) Coll_z(z = x \text{ или } z = y)$.

Определение: Множество $\mathcal{E}_x(z = x \text{ или } z = y)$, единственными элементами которого являются x и y, обозначается символом $\{x, y\}$.

Таким образом, соотношение $z \in \{x, y\}$ эквивалентно с "$z = x$ или $z = y$" .

Множество $\{x, x\}$, обозначаемое просто символом $\{x\}$, называется множеством, единственный элемент которого есть x (или множеством, состоящим из единственного элемента x, или множеством, сводящимся к единственному элементу x), соотношение $z \in \{x\}$ эквивалентно $z = x$, соотношение $x \in X$ эквивалентно $\{x\} \subset X$.

Схемой отбора и объединения называется следующая схема:

S8. *Пусть R - соотношение, x и y - различные буквы, X и Y - буквы, отличные от x и y и не встречающиеся в R.*

Соотношение
$(\forall y)(\exists X)(\forall x)(R \Rightarrow (x \in X)) \Rightarrow (\forall Y) Coll_x((\exists y)((y \in Y)$ и $R))$ есть аксиома.

C51. *Пусть P - соотношение, A - множество и x - буква, не встречающаяся в A. Соотношение "P и $x \in A$" является коллективизирующим по x.*

Теорема 2. *Соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ является функциональным по X.*

Доказательство. В самом деле соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ влечет $(\forall Y)(X \subset Y)$; стало быть, в силу аксиомы экстенсиональности соотношение $(\forall x)(x \notin X)$ является однозначным по X. С другой стороны, соотношение $(\forall x)(x \notin C_Y Y)$ верно, а это доказывает, что соотношение $(\exists X)(\forall x)(x \notin X)$ верно. Символ $C_A B$ означает дополнение B в A. □

Терм $\tau_X((\forall x)(x \notin X))$, соответствующий этому функциональному соотношению, изображается функциональным символом $\varnothing$, который называется пустым множеством.

Соотношение $(\forall x)(x \notin X)$, эквивалентное $X = \varnothing$, читается так: "множество пусто". Таким образом, терм, обозначаемый символом $\varnothing$ есть

$$\tau\neg\neg\neg \in \tau\neg\neg \in \square\square\square$$

Знак $\sqsupset$ является в теории множеств субстантивным знаком веса 2. Если T, U - термы, то, стало быть, знакосочетание $\sqsupset TU$ есть терм; этот терм обозначается обычно через (T, U). При таких обозначениях аксиомой пары называется следующая аксиома.

Аксиома пары.

А 3. $(\forall x)(\forall x')(\forall y)(\forall y')((x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x'$ *и* $y = y'))$.

Соотношение $(\exists x)(\exists y)(z = (x, y))$ обозначают словами "z есть пара". Если z - пара, то соотношение $(\exists y)(z = (x, y))$ и $(\exists x)(z = (x, y))$ являются функциональными по x и y соответсовенно. Термы $\tau_x((\exists y)(z = (x, y)))$ и $\tau_y((\exists x)(z = (x, y)))$ обозначаются соответственно символами $pr_1 z$ и $pr_2 z$ и называются соответственно первой и второй координатой z.

Определение: Говорят, что $\mathfrak{g}$ есть *график*, если каждый элемент в $\mathfrak{g}$ есть пара, или, иначе говоря, если справедливо соотношение:

$$(\forall z)(z \in \mathfrak{g}) \Rightarrow (z \text{ есть пара})).$$

Пусть $R[x, y]$ - соотношение, x и y - различные буквы. Пусть $\mathfrak{g}$ - буква, отличная от x и y и не встречающаяся в R. Если соотношение

$$(\exists \mathfrak{g})(\mathfrak{g} \text{ есть график и } (\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow ((x, y) \in \mathfrak{g}))$$

верно, то мы говорим, что R *обладает графиком по буквам* x и y. Тогда график $\mathfrak{g}$ единственный в силу аксиомы экстенционального и называется *графиком соотношения* R по x и y.

Ещё одно важное в построении формализации теории множеств определение. *Соответствием* между множеством A и множеством B называется тройка $\Gamma = (\mathfrak{g}, A, B)$, где $\mathfrak{g}$ - график, такой что $pr_1\mathfrak{g} \subset A$ и $pr_2\mathfrak{g} \subset B$. Мы говорим, что $\mathfrak{g}$ - есть график соответствия, Γ, A - область отправления и B - область прибытия соответствия.

Важно также следующее определение.

График F есть *функциональный* график, если для каждого x существует не более чем один объект, соответствующий этому x относительно F. Соответствие $f = (F, A, B)$ есть *функция*, если его график F есть функциональный график, а его область отправления A равна его области определения pr_1F.

В некоторых случаях функциональный график называтеся также семейством; область определения называется тогда множеством индексов, а область значений - множеством элементвов семейства.

Вот как, например, используется определение семейства.

Пусть $(X_i)_{i\in I}$ - семейство множеств. Множество $\mathcal{E}_x((\exists i)(i \in I$ и $x \in X_i))$, называется *объединением* этого семейства и обозначается символом $\bigcup_{i\in I} X_i$.

Сильно сжатое описание формализации теории множеств, данной Бурбаки, закончим приведением последних аксиом.

Аксиома множества частей.

А 4. $(\forall X)Coll_Y(Y \subset X)$

Говорят, что множество X *равномощно* множеству Y, если существует взаимнооднозначное отображение множества X на Y. Описанное соотношение между X и Y обозначается через $Eq(X, Y)$. Множество $\tau_z(Eq(X, Z))$ называется *кардинальным числом* множества X, или мощностью множества, обозначается $Card(X)$.

Натуральным числом называется кардинальное число n, для которого $n \neq n + 1$. Множество E конечно, если $Card(E)$ конечное (натуральное) число.

Последняя аксиома

А 5. *(аксиома бесконечности) Существует бесконечное (не являющееся конечным) множество.*

Общие замечания.

По сравнению с "привычными" нам аксиоматизациями (например, формальной арифметики) у Бурбаки в формальных предложениях, полностью расписанных, а не обозначенных с использованием принятых соглашений, нет:

а) Скобок. Сама последовательность знаков восстанавливает структуру получения формулы-предложения. Структура самого предложения "определяет скобки".

б) Предикатных букв с приданными переменными, типа $A(x, y)$, ...

в) Кванторов $\forall, \exists$ как исходных формальных символов. Вместо них символы τ и $\square$ своим "взаимодействием" порождают кванторы неявно.

г) Соответственно, нет связанных переменных.

д) Есть всего одно правило вывода.

Бурбаки шаг за шагом показывает, что в его формализации теории множеств знакомые нам по каноническому изложению теории теоремы и принципы рассуждения представимы формальными теоремами. Интересно, как интерпретируется в его формализации математики геделевкая формула $A_p(p)$, истинная при содержательной интерпретации, но недоказуемая и неопровержимая при данной формализации?

Руководящей идеей изложения Бурбаки можно считать стремление не представлять математические объекты предметно, а представлять их идеально, через их организующую математический материал роль. Сравните с замечанием Трусделла: "Мы не знаем, что они. Но мы знаем, что с ними можно делать".

Продолжение лекции 3. Теория множеств Цермело-Френкеля.

Прежде чем изложить аксиомы системы, мы опишем интуинитвную модель этой теории. С этой целью рассмотрим сначала в качестве исходных понятий нулевое (пустое) множество $\wedge$ и операцию P, порождающую множество всех подмножеств. Из определения P непосредственно следует, что

$$P(\wedge) \text{ есть } \{\wedge\}, P(\{\wedge\})\{\wedge,\{\wedge\}\},$$
$$P\{\wedge,\{\wedge\}\} \text{ есть } \{\wedge,\{\wedge\},\{\{\wedge\}\},\{\wedge,\{\wedge\}\}\} \text{ и т.д.},$$

где $\{x\}$ есть единичное множество, образованное объектом $x, \{x, y\}$ есть множество, единственными элементами которого являются x и y, и т.д. Пусть $p(k)$ обозначает k-е множество, полученное таким образом, отправляясь от $\wedge$, причем $p(0)$ есть $\wedge$, а $p(m)$ есть множество подмножеств $p(m-1)$. Продолжая этот процесс, для каждого конечного числа n можно получить множество с большим чем n числом членов, но никогда нельзя получить бесконечное множество. Поскольку для построения теории множеств необходимо наличие бесконечных множеств, мы введем новое предположение, что существует бесконечное множество I, которое содержит все входящие в $p(k)$, (k - конечное число) множества:

$$I = \{\wedge,\{\wedge\},\{\{\wedge\}\},\{\wedge,\{\wedge\}\},\ldots\}$$

Теперь к этому множеству мы можем применить операцию P и получить классы $P(I), P(P(I))$ и т. д. Мы будем обозначать k-е множество в этой последовательности множеств посредством $p(\omega+k)$. где $p(\omega)$ есть I, а $p(\omega+k)$ есть $P(p(\omega+k-1))$. Мы получаем, таким образом, бесконечную иерархию бесконечных множеств, упорядоченных по возрастанию их кардинальных чисел. Далее определяется пространство S как совокупность всех множеств $p(g)(g = 0, 1, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots)$. Постранство S дает модель теории множеств Цермело. Читатель сможет сам проверить, что это так.

Формальная система Цермело Z может быть описана следующим образом. Имеется только один вид переменных $x, y, \ldots$, представляющих множества, и первичный предикат $\in$, указывающий на отношение члена к классу ("принадлежит"). Атомарные предложения имеют только следующий вид: $x \in y, z \in \omega$. Отправляясь от них, посредством связок элементарной логики и кванторов строятся другие предложения; предполагается, что принимаются аксиомы и правила вывода элементарной логики. Собственно аксиомами системы Z являются следующие:

Z 1. Аксиома объемности. В этой аксиоме утвержается, что *всякое множество определяется своими элементами, т.е. если два множества имеют одни и те же* *члены, то все, что выполняется для одного множества, выполняется и для другого: $x = y$ определяется как более краткая запись выражения $(z).(z \in x \equiv z \in y)$, и аксиома тогда записывается следующим образом:*

$$x = y \supset (\omega).(x \in \omega \supset y \in \omega).$$

Z 2. Аксиома объединения. *Если даны два множества x и y, то $\{x, y\}$ также является множеством, т.е.*

$$(E\omega).(z).[z \in \omega \equiv (z = x \vee z = y)].$$

Z 3. Аксиома выделения (Aussonderungs-axiom). *Для любого множества z и предложения $F(x)$ системы Z существует подмножество z, содержащее все те и только те множества x, для которых $F(x)$ истинно.*

Символически:

$$(z).(Ey).(x).(x \in y \equiv [x \in z \ \& \ F(x)]),$$

где y не входит в $F(x)$.

Z 4. Аксиома множества подмножеств. *Для любого множества существует множество его подмножеств:*

$$(z).(Ey).(x).[x \in y \equiv (\omega).(\omega \in x \supset \omega \in z)].$$

Z 5. Аксиома множества-суммы. *Для каждого множества существует его множество-сумма:*

$$(z).(Ey).(x).[x \in y \equiv (E\omega).(x \in \omega \ \& \ \omega \in z)].$$

Z 6. Аксиома выбора (аксиома умножения). *Если x есть множество, элементы которого не пусты и не имеют общих членов, то его множество-сумма содержит по крайней мере одно подмножество u, имеющее в точности один общий элемент с каждым его членом:*

$$(x).[(y).(z).((y \in x \ \& \ z \in x) \supset [(E\omega).\omega \in y \ \& \ \sim (E\omega).(\omega \in y \ \& \ \omega \in z)])$$
$$\supset (Eu).y.(y \in x \supset (Ev).(t).[t = v \equiv (t \in u \ \& \ t \in y)])].$$

Z 7. Аксиома бесконечности. *Существует множество, которое содержит в качестве своего элемента нулевое множество и которое вместе с любым своим элементом x содержит единичное множество $\{x\}$.*

В символах:

$$(Ez).[\wedge \in z \ \& \ (x).(x \in z \supset \{x\} \in z)].$$

Основная идея этой аксиомы восходит к Дедекинду, но для доказательства этого принципа необходимо иметь понятие умножения объектов, понятие объектов, понятие понятий и т.д., и, следовательно, оно не может быть получено средствами систем, рассматриваемых здесь и в предыдущем разделе.

Z 8. Аксиома ограничения (Fundierungs-axiom). *Для всякого предложения $F(x)$ из системы Z, такого, что $(Ex)F(x)$, существует множество y, такое, что $F(y)$ истинно, но ни для какой его части Z $F(z)$ не является истинным.*

В символах:

$$(Ex).F(x) \supset (Ey).(F(y) \ \& \ (z) \sim [z \in y \ \& \ F(z)]).$$

Z 9. Аксиома подстановки (Ersetzungs-axiom). *Если одна из взаимнооднозначно соответствующих друг другу областей является множеством, то и другая также является множеством.*

Другими словами, *если дано такое предложение $F(u, v)$, что*

$$(x).(y).(z).(\omega).([F(x,y) \ \& \ F(z,\omega)] \supset [(x = z) \equiv (y = \omega)]),$$

и если существует множество всех множеств u таких, что $(Ev)F(u, v)$ истинно, то существует множество всех множеств v, таких, что $(Eu)F(u, v)$ истинно.

Список литературы

[1] Н. Бурбаки. Теория множеств. М. Издательство "Мир". 1965 г. 456с.

[2] Ван Хао, Р. Мак-Нотон. Аксиоматические системы теории множеств. М. "ИЛ". 1963 г.

Лекция 4. Рациональные принципы второго уровня.

§1.Самым замечательным из этого класса принципов является принцип математической индукции. Ввиду широкого его применения не приводим примеры.

Метод математической индукции развился в метод трансфинитной индукции; в теории вычислимых функций он развился в метод приоритета.

Ниже покажем первое: как «перерастает» математическая индукция в рамках самостоятельной дисциплины «упорядоченные пространства» в принцип трансфинитной индукции.

Некоторые результаты о частично упорядоченных множествах

Пусть дано множество X, частично упорядоченное отношением порядка $\leq$.

Определение.

Частично упорядоченное множество называется линейно упорядоченным или цепью, если любые два элемента его x и y сравнимы по порядку: $x \leq y$, либо $y \leq x$.

Определение.

$C \subseteq X$ называется максимальной цепью, если для $\forall z \in X - C$ множество $C \cup \{z\}$ не является цепью.

Определение.

Элемент m частично упорядоченного множества X называется максимальным (минимальным), если из $a \geq m (a \leq m)$ для некоторого $a \in X$ следует, что $a = m$.

Определение.

Элемент m частично упорядоченного множества X называется верхней гранью для подмножества $P \subseteq X$, если для $\forall x \in P, m \geq x$, соответственно называется нижней гранью, если $\forall x \in P, m \leq x$.

Теорема:

Следующие свойства частично упорядоченного множества X эквивалентны:

(1) Условие минимальности: всякое непустое подмножество множества X является частично упорядоченным множеством, содержащим минимальные элементы относительно этого подмножества.

(2) Условие индуктивности: любое свойство $\mathcal{E}(x)$ справедливо для всех элементов X, если оно выполняется для минимальных элементов X, а также для элементов a, у которых все предшественники этим свойством обладают (т.е. $x < a$ влечет $\mathcal{E}(x)$).

(3) Условие обрыва убывающих цепей: последовательность элементов из $X : a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \cdots$ содержит только конечное число элементов. Это равносильно тому, что, начиная с некоторого n, выполняется $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots$.

Доказательство:
Из (1) следует (2). Пусть $\mathcal{E}$ выполняется для минимальных элементов и для a, если выполняется для всех предшественников a. Предположим, что существует элемент $b \in X$, для которого $\mathcal{E}$ не выполняется. Рассмотрим собрание $\{b\} = B \subseteq X$ элементов, для которых $\mathcal{E}$ не выполняется. Это множество не пустое, там есть минимальный элемент m, минимальный в B, но не в X. Все предшественники m свойством $\mathcal{E}$ обладают, следовательно, и m им обладает. Противоречие говорит о том, что предположение $B = \varnothing$ не верно.
Из (2) следует (3). Пусть выполняется условие индуктивности. В качестве свойства $\mathcal{E}$ возьмем такое свойство: a обладает свойством $\mathcal{E}$, если любая убывающая цепь, начинающаяся с элемента a, конечна. Свойство верно для минимальных элементов, и пусть $\mathcal{E}$ выполняется для всех предшественников a. Рассмотрим любую убывающую цепь, начинающуюся с $a > a_1 > a_2 > \cdots$. Цепь, начинающаяся с a_1, конечна, потому конечна и рассматриваемая цепь. Отсюда следует, что $\mathcal{E}$ верна для всех элементов X. Следовательно, выполнено условие обрыва убывающих цепей.

Из (3) следует (1). Пусть выполнено условие обрыва убывающих цепей. Докажем, что верно условие минимальности. Пусть B подмножество X, и предположим, что B не содержит минимальных элементов. Берем любой элемент b_1 из B, найдется $b_2 \in B$ такой, что $b_2 < b_1$. Повторяя рассуждения, получим бесконечно убывающую цепочку $b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n \cdots$. Противоречие, следовательно, B содержит минимальные элементы.□

Аксиома выбора
Следующие утверждения эквивалентны:

(1) Аксиома выбора: если дано множество X, то существует функция φ, сопоставляющая каждому пустому подмножеству A из X один предельный элемент $\varphi(A)$ этого подмножества.

(2) Теорема Цермелло: всякое множество можно вполне упорядочить.

(3) Теорема Хаусдорфа: всякая цепь частично упорядоченного множества содержится в максимальной цепи.

(4) Теорема Куратовского-Цорна: если всякая цепь частично упорядоченного множества X обладает верхней гранью, то всякий элемент множества X предшествует максимальному элементу.

Доказательство:
Из (1) следует (2). Пусть дано произвольное множество X. На основании аксиомы выбора отметим в каждом его не пустом подмножестве M по одному элементу $\varphi(M)$. Отмеченным будем называть непустое множество $A \subseteq X$, если оно может быть вполне упорядоченным таким образом, что $\varphi(X - [a]) = a$ для всякого элемента $a \in A$. Через $[a]$ обозначим множество элементов A, которые предшествуют a, т. е. $x < a$ эквивалентно $X \in [a]$. Отмеченным является, например, множество, состоящее из одного элемента $\varphi(X)$.

Рассмотрим два отмеченных подмножества A и B. Пусть C - есть объединение всех совпадающих отрезков A и B, т. е. подмножеств M таких, что из $x \in M$ следует $y \in M$. Первый элемент множества $A - C$, если последнее не пусто, в порядке, определенном на A обозначим через a. Аналогично, b - есть первый элемент в множестве $B - C$. Имеем $a = \varphi(X - [a]) = \varphi(X - C); b = \varphi(X - [b]) = \varphi(X - C)$, следовательно, имеется общий отрезок $C \cup \{a\}$ множеств A и B, включающий C. Используя максимальность C, заключаем, что на самом деле или $A - C$, или $B - C$ пусто. Следовательно, одно из множеств, например, A, является отрезком другого. При этом порядок, индуцируемый множеством B на A, совпадает с рассматриваемым на A порядком.

Итак, все отмеченные подмножества линейно упорядочены по включению, и порядки на них согласованы. На их объединении D определен, поэтому естественный линейный порядок: $x, y \in D$ полагаем $x \leq y$, если $x \leq y$ в отмеченном множестве, которому оба x и y принадлежат. Объединение D удовлетворяет условию минимальности, поскольку всякая убывающая цепь элементов D лежит в вполне упорядоченном отмеченном подмножестве, содержащим первый элемент цепи. Следовательно, D вполне упорядочено. Легко видеть, что оно и допустимо, поскольку отрезок множества D является отрезком и в в одном из отмеченных множеств, из которых D слагается. Наконец, заметим, что D совпадает с X. Иначе, множество $\bar{D} = D \cup \{\varphi(X - D)\}$ было бы отмеченным и большим, чем D, если положить $\varphi(X - D)$ наибольшим элементом в $\bar{D}$. (1) $\rightarrow$ (2) доказано.

Из (2) следует (3). Пусть в частично упорядоченном множестве X взята произвольная цепь M. Если множество $X - M = B$ не пусто, вполне упорядочим B в порядке, который может отличаться от порядка в X. Отнесем первый элемент множества B к первому классу, если он в частичном порядке X сравним с каждым элементом из M; иначе отнесем его ко второму классу. Пусть b - есть произвольный элемент B, и каждый из элементов B, строго предшествующих b в порядке множества B, отнесен к одному из двух классов. Относим b к первому классу, если он сравним с каждым предшествующим элементом, уже входящий в первый класс или множество M; относим b ко второму классу в противном случае. Согласно условию индуктивности, B будет дизъюнктивной суммой этих двух классов: $B = B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2 = \varnothing$. Здесь элементы B_1 составляют первый класс. Остается заметить, что $M \cup B_1$ и будет максимальной цепью, содержащей цепь M.

Из (3) следует (4). Пусть дано частично упорядоченное множество X, в котором всякая цепь обладает верхней гранью. Если $a \in X$, то в качестве максимального элемента из X большего, чем a, можно взять верхнюю грань максимальной цепи, включающей в себя в качестве подцепи одноэлементное множество a.

Из (4) следует (1). Пусть дано произвольное множество X. Рассмотрим систему непустых подмножеств A такую, что на A можно определить функцию φ, относящую каждому подмножеству $M \in A$ элемент $\varphi(M) \in M$. Одно фиксированное подмножество, например, образует такую систему. Пусть A_1 и A_2 системы, обладающие отмеченным свойством, φ_1 и φ_2 соответствующие им функции. Полагаем $\varphi_1 \leq \varphi_2$, если A_1 подмножество A_2, и на элементах A_1 функция φ_1 совпадает с φ_2. Множество Φ введенных таким образом в рассмотрение функцией φ становится частично упорядоченным, удовлетворяющим условиям теоремы Куратовского-Цорна. Вследствие этого множество Φ обладает максимальным элементом ψ. Максимальность функции ψ влечет, что она определена на всех подмножествах множества X. Теорема доказана.$\Box$

Возможность вполне упорядочить рассматриваемое множество M позволяет доказывать справедливость утверждения $\mathcal{E}(x)$ для любого элемента $x \in M$ методом трансфинитной индукции. Т. е. доказываем $\mathcal{E}$ для наименьшего элемента вполне упорядоченного M, а затем доказываем справедливость $\mathcal{E}(x)$ при условии, что $\mathcal{E}$ имеет место для всех $y \leq x,\ y \in M$.

§2. Принцип смены контекста или размерности задачи

Поставьте поиск контекста проблемы, задачи как самостоятельную задачу - от широкого поиска в разделах математике перейдите к литературе, философии, искусству. Математика - это захват все новых территорий, во всех областях есть отражение интересующего вас вопроса.

На время «отодвиньтесь» от задачи и подумайте, что за область математики вы «эксплуатируете».

I. В самом широком смысле поле математических напряжений можно разделить на геометрическое и алгебраическое видение задачи. Алгебра и геометрия - вот две громадные территории, конечно, пересекающиеся, на которых возможно как «проживание» вашей задачи, так и ее решение. Есть другие «страны», где, возможно, встречается то, что вас интересует: вычислительная математика, комбинаторика, теория алгоритмов и т.п.

Этот принцип характеризует широту восприятия задачи. Нужно увеличить контекст, на котором воспринимается предмет. Можно взглянуть, например, с позиции оперирования символами, а можно ситуацию охватить геометрической схемой.

Пример 1

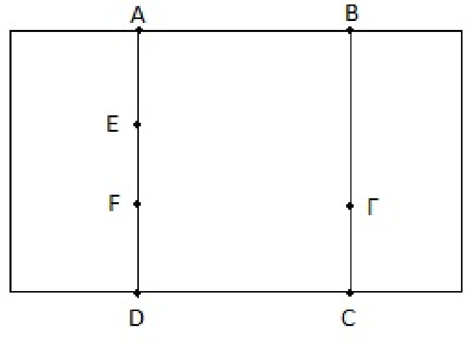
Пусть A и B - мухи на потолке, которые спускаются до пола и поднимаются обратно. B спускается в k раз быстрее, чем A и в k раз медленнее поднимается, $k>1$. Спрашивается, какая муха скорее вернется на свое место. Вот алгебраическое решение:

$$t_A = \frac{2s}{v}, \quad t_B = \frac{s}{kv} + \frac{ks}{v},$$

здесь $t_A(t_B)$ - полное время, затраченное мухой $A(B)$. Сравним t_A и t_B

$$\frac{2s}{v} < \frac{s}{kv} + \frac{ks}{v}, \quad \text{ибо} \quad 2 < \frac{1}{k} + k.$$

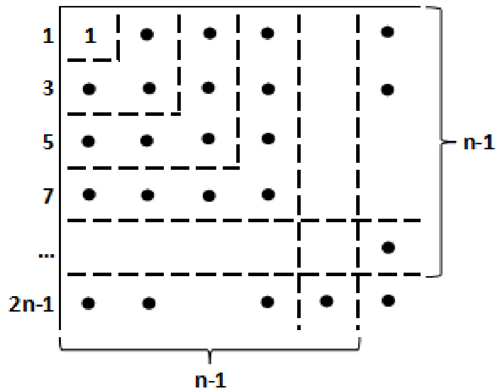
Муха A быстрее достигнет потолка, чем муха B.



А вот переход на геометрическую основу, и решение доступно ученику 3-го класса. Пусть в момент, когда муха B достигает пола в точке C, муха A окажется в точке E. Когда муха A, достигнув пола в точке D, поднимается вверх на отрезок DF, равные AE, где будет находиться муха B? Ответ в точке Г: $C\Gamma = AE = DF$. Муха A пройдет путь, равный высоте комнаты $DF + ED$, а муха B в k раз меньший, т.е. $C\Gamma = AE$. «Стартуя» с уровня точек F и Г, муха A достигнет потолка раньше.

Пример 2

«Геометрическое» решение задачи суммирования $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$. Легко усмотреть это равенство из «пифагоровых» геометрических построений квадратов из точек в количестве $1, 1 + 3, \ldots$.



Очень важно понятие размерности пространства (математического или физического). Понятие размерности имеет и глубокий философский смысл.
Приведем несколько примеров, когда решение достигается переходом на другую размерность пространства. Здесь важны советы:

(1) Осознайте размерность задачи, возможно, лучше ее повысить.

(2) Задача есть пространство взаимодействующих объектов. Подумайте, как четче определить это пространство. Есть самостоятельная теория подобных пространств?

(3) «Правильный выход состоит в расширении границ исследуемого объекта с целью использования информации о более крупной системе, частью которой он является.»

Пример 1: Даны три окружности с центрами в точках O_1, O_2, O_3 с радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно. К окружностям, взятым попарно, построены касательные. Касательные к окружностям с центрами в точках O_1, O_2 пересекаются в точке A, к окружностям с центрами в точках O_1, O_3 - в точке B, к окружностям с центрами в точках O_2, O_3 - в точке C. Требуется показать, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

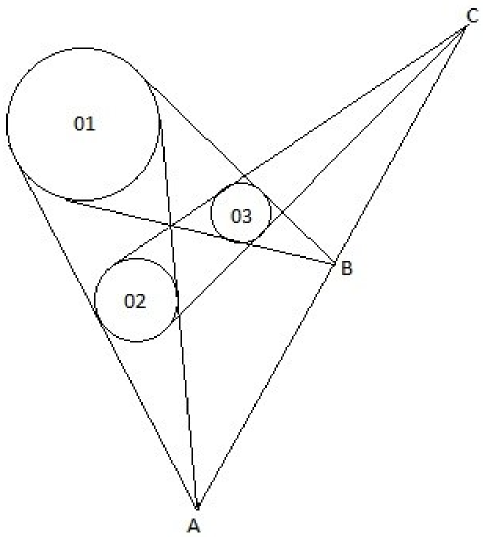


Рис. 1: иллюстрация к примеру 1

Решение: Задача поставлена на плоскости P, то есть пространстве размерности два. Мы же попробуем исходную задачу рассмотреть как стереометрическую. А именно на каждом круге радиусом r_i построим конус высоты r_i с вершинами S_i. Основания конусов лежат в одной плоскости, плоскости P. Через вершины конусов также можно провести некоторую плоскость P_1. Эти две плоскости пересекаются по некоторой прямой l. Покажем, что $A, B, C \in l$.

Предположим, что прямая $S_1S_2 \in P_1$ пересекает плоскость P в некоторой точке D. Рассмотрим проекцию конусов с вершинами S_1, S_2 (см. рис. 2) на плоскость, проходящую через S_1 и S_2 и перпендикулярную к P.

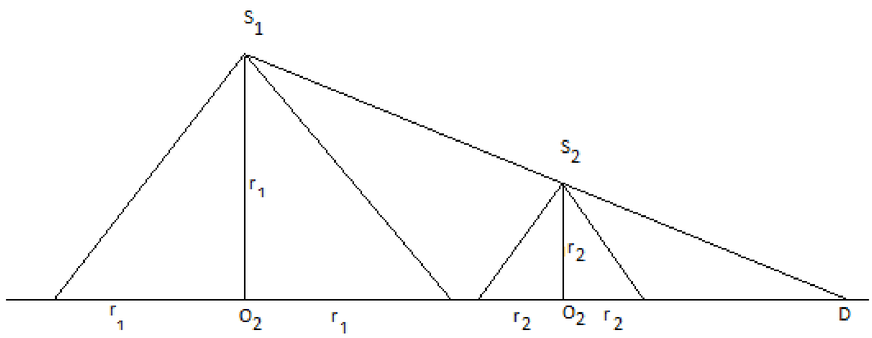


Рис. 2: проекции конусов с вершинами S_1, S_2

Из подобия треугольников DS_1O_1 и DS_2O_2 следует соотношение:

$$\frac{DO_2}{DO_1} = \frac{r_2}{r_1} \tag{1}$$

Теперь рассмотрим плоскость P основания конусов с центрами в точках O_1, O_2. Опустим из центров окружностей перпендикуляры O_1E_1, O_2E_2 к общей касательной. Проекция прямой S_1S_2 есть прямая, проходящая через O_1 и O_2.

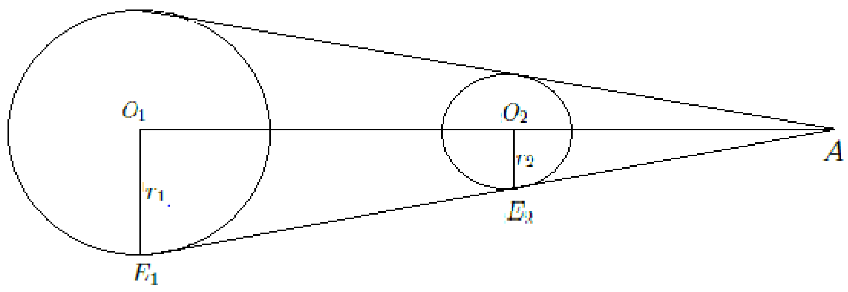


Рис. 3: плоскость P

Теперь из подобия треугольников AO_1E_1 и AO_2E_2 следует соотношение:

$$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r_2}{r_1} \tag{2}$$

Из полученных соотношений (2), (3) следует, что точка A совпадает с точкой D, то есть лежит на прямой l.

Воспользовавшись аналогичными рассуждениями для пар конусов с вершинами S_2, S_3 и S_1, S_3 можно показать, что точки B, C также лежат на прямойl. Задача решена.

Анализируя решение задачи, мы видим, что усложнение задачи, а именно переход из пространства размерности 2 к пространству размерности 3, помогло нам найти простое и красивое решение.

Пример 2: Дана последовательность x_n, которая определяется рекурентной формулой:

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$$

Надо получить явную формулу для x_n.

Решение: Вместо последовательности x_n рассмотрим последовательность векторов (опять повышаем размерность задачи!):

$$u_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = u_n$$

Запишем рекурентную формулу для u_n. Легко убедиться, что

$$u_{n+1} = Au_n, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_{n+1} = \begin{bmatrix} 2x_{n+1} + 3x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Применяя несколько раз реккурентную формулу, получим:

$$u_{n+1} = A^1 u_n = A^2 u_{n-1} = \dots = A^{n+1} u_0$$

Найдем общий вид оператора A^{n+1}. Для этого вычислим собственные вектора l_i и собственные числа λ_i матрицы A:

$$\lambda_1 = 3 \qquad l_1 = (3, 1)$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad l_1 = (-1, 1)$$

Собственные числа различны, поэтому матрицу A можно привести к диагональному виду, а именно представить в виде $A = BDB^{-1}$, где B - матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы A:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Учитывая такое представление, получим:

$$u_{n+1} = [BDB^{-1}]^{n+1} u_0 = BD^{n+1} B^{-1} u_0.$$

$$u_{n+1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{n+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3^{n+2} & (-1)^{n+2} \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3^{n+2} & (-1)^{n+2} \\ 3^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Отсюда получаем явную реккурентную формулу:

$$x_{n+1} = \frac{3^{n+1} + (-1)^{n+1}}{2}.$$

Пример 3: Вектор a называется корневым вектором высоты h, принадлежащим корню ρ преобразования $\mathcal{A}$, если $a(\rho\mathcal{E} - \mathcal{A})^h = 0$.

Понятие корневого вектора является обобщением понятия собственного вектора, так как собственные векторы – это корневые векторы высоты 1.

Совокупность всех корневых векторов, принадлежащих некоторому фиксированному корню ρ преобразования $\mathcal{A}$, есть инвариантное подпространство $\mathcal{L}_p$, называемое корневым подпространством преобразования $\mathcal{A}$.

Действительно, если x, y принадлежат $\mathcal{L}_p$ и имеют высоты h_1, h_2, то при $h = max(h_1, h_2)$ имеем:

$$(\alpha x + \beta y)(\rho\varepsilon - \mathcal{A})^h = x(\rho\varepsilon - \mathcal{A})^h \alpha + y(\rho\varepsilon - \mathcal{A})^h \beta = 0,$$

$$x\mathcal{A}(\rho\varepsilon - \mathcal{A})^h = x(\rho\varepsilon - \mathcal{A})^h A = 0.$$

Корневые векторы, принадлежащие различным корням, обязательно линейно независимы. Более того, справедлива и более сильная

Теорема: Если сумма $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = x$ корневых векторов, принадлежащих различным корням $\rho_1, \ldots, \rho_m$ преобразования $\mathcal{A}$, содержится в инвариантном подпространстве $\mathfrak{M}$, то каждое слагаемое в отдельности содержится в $\mathfrak{M}$.

Положим:

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \rho_1)^{h_1}(\lambda - \rho_2)^{h_2} \ldots (\lambda - \rho_{m-1})^{h_{m-1}}.$$

По условию, $x\varphi(\mathcal{A}) \in \mathfrak{M}$ и в то же время

$$x_1\varphi(\mathcal{A}) = x_2\varphi(\mathcal{A}) = \cdots = x_{m-1}\varphi(\mathcal{A}) = 0.$$

Следовательно, $x_m\varphi(\mathcal{A}) \in \mathfrak{M}$. Многочлены $\varphi(\lambda)$ и $(\lambda - \rho_m)^{h_m}$ взаимно просты. Поэтому найдутся такие многочлены $F(\lambda), G(\lambda)$, что

$$I = \varphi(\lambda)F(\lambda) + (\lambda - \rho_m)^{h_m}G(\lambda),$$

откуда

$$\mathcal{E} = \varphi(\mathcal{A})F(\mathcal{A}) + (\mathcal{A} - \rho_m\mathcal{E})^{h_m}G(\mathcal{A}),$$

и следовательно,

$$x_m = x_m\varphi(\mathcal{A})F(\mathcal{A}) + x_m(A - \rho_m\mathcal{E})^{h_m}G(\mathcal{A})) = x_m\varphi(\mathcal{A})F(\mathcal{A}) \in \mathfrak{M},$$

что и требовалось.

Сформулированное выше утверждение о линейной независимости векторов $x_1, \ldots, x_m$ получается из доказанной теоремы при $\mathfrak{M} = 0$. В качестве следствия отметим также, что различные корневые подпространства имеют нулевое пересечение.

Пример 4: В двадцатых годах прошлого века внимание математиков привлекла задача с элементарной формулировкой, решение которой длительное время найти не удалось. Вот эта задача.

Пусть множество целых чисел раскрашено в конечное число цветов. Тогда найдется арифметическая прогрессия сколь угодно большой конечной длины, члены которой окрашены в один цвет.

После упорных усилий задачу удалось решить молодому голландскому математику Б. Л. Ван-дер-Вардену. Решение оказалось элементарным, но достаточно сложным. История этого доказательства приведена в книге А. Я. Хинчина, а в изложение самого Ван-дер-Вардена - в дополнении к книге Р. Грэхема. В обеих этих книгах можно также найти доказательство теоремы.

Кратко изложим идеи, приведшие к доказательству, потому что, как часто бывает в математике, чтобы упростить решение задачи, нужно сформулировать ее для более общего случая. Первым шагом к доказательству, предложенному самим Ван-дер-Варденом (и, по-видимому, ко всем известным доказательствам), была догадка о том, что доказывать нужно более сильное утверждение, а именно: предполагать, что раскрашивается не вся числовая прямая, а лишь некоторый ее конечный кусок, размер которого зависит от количества цветов раскраски и длины прогрессии.

Далее задача обобщается сразу в нескольких направлениях, главным из которых будет выход из числовой прямой на плоскость. Вместо раскраски множества целых чисел рассматривается раскраска целочисленной решетки на плоскости в конечное число цветов. Выбрав в этой решетке конечную фигуру M (конечное множество точек), доказывается существование подобной ей одноцветной фигуры. Доказательство приобретет геометрическую наглядность, утерянную в вырожденном одномерном случае.

Сформулируем другие обобщения. Во-первых, ясно, что перейдя от размерности один к размерности два, можно двинуться и дальше к случаю решетки в пространстве любой размерности. Во-вторых, условие подобия можно заменить на более сильное – гомотетичность с целым положитеьным коэффициентом. (В дальнейшем, говоря о гомотетии, мы всегда будем иметь в виду гомотетию с целым положительным коэффициентом). Достаточно изящное доказательство такого обобщения теоремы было приведено П. Андерсоном, который, ссылаясь на Р. Радо, приписывает исходное доказательство Г. Грунвальду. Затем доказательство Андерсона было пересказано на русском языке В. В. Прасоловым.

Можно пойти дальше и предполагать, что «объектом раскраски» может служить не только решетка, но и все пространство (при этом рассматриваемая фигура M не может не вкладываться ни в какую решетку в этом пространстве). Вообще говоря, такое обобщение можно вывести из теоремы для решетки.

Аналогично, уже упомянутому усилию исходной (одномерной) теоремы Ван-дер-Вардена, можно предполагать в условии, что красится не все пространство, а лишь конечная фигура в нем (зависящая от данной в условии фигуры и количества цветков раскраски).

Обозначим через L объект раскраски – либо пространство любой размерности, либо целочисленную решетку в пространстве.

Определение. Будем говорить, что фигура $\widehat{M} \subset L$ является монохроматической накрывающей ранга k фигуры $M \subset L$, если для любой раскраски пространства (или решетки) L в k цветов существует одноцветная фигура $F \subset \widehat{M}$, гомотетичная M.

Заметим, что образы монохроматической накрывающей при сдвиге и гомотетии также являются монохроматическими накрывающими той же фигуры того же ранга. Теперь обобщенная задача звучит как

Теорема. Для любой конечной фигуры $M \subset L$ и любого натурального числа k существует ее конечная монохроматическая накрывающая ранга k.

Итог: В итоге, мы можем привлекать к решению известные развитые теории, и это типичное явление в математике, когда ситуация упрощается при правильном обобщении или усложнении.

Список литературы

[1] Р. Акофф. «Искусство решения проблем».

[2] М. Айгнер, Г. Циглер. Доказательства из книги. Издательство Мир, М, 2006г.

Лекция 5. Рациональные принципы второго уровня. Продолжение. Рассматриваются принципы, которые формирует комбинаторика.

§1 Принцип Дирихле и двойной счет

Некоторые математические принципы, в частности, указанные в названии этого параграфа, настолько очевидны, что может показаться, будто они позволяют получать лишь столь же очевидные результаты. Чтобы убедить вас в том, что „это не всегда так“, мы иллюстрируем их примерами, которые предложил Пауль Эрдёш.

Принцип Дирихле.
Если n предметов разместить по r ячейкам, где $r < n$,
то хотя бы в одну ячейку попадет больше одного предмета.

Это утверждение действительно очевидно; здесь нечего доказывать. На языке отображений принцип Дирихле (на англоязычной литературе используется термин „pigeonhole principle“ - принцип голубиных гнезд) записывается следующим образом. Пусть N и R - два конечных множества,

$$|N| = n > r = |R|,$$

и $f : N \to R$ - отображение из N в R. Тогда найдется такой элемент $a \in R$, что $|f^{-1}(a)| \geq 2$. Мы можем установить даже более сильное неравенство: существует такое $a \in R$, что

$$|f^{-1}(a)| \geq \lceil \frac{n}{r} \rceil \tag{3}$$

В самом деле, в противном случае мы имели бы $|f^{-1}(a)| < \dfrac{n}{r}$ для всех $a \in R$, и тогда выполнялось бы неравенство

$$n = \sum_{a \in R} |f^{-1}(a)| < r\frac{n}{r} = n,$$

что невозможно. Главное в применении принципа Дирихле - так сформировать ячейки, что попадание в них двух или более элементов, равносильно выполнению между элементами определенного отношения.

Пример 1.
Если из множества $\{1, 2, 3, ..., 2n\}$ выбрать любые $n + 1$ чисел,
то среди них найдутся два взаимно простых.

Это утверждение тоже очевидно: среди выбранных должны найтись два числа, которые отличаются на 1 и поэтому взаимно просты (Можно рассмотреть n "ячеек"$\{1, 2\}, \{3, 4\}, ..., \{2n - 1, 2n\}$).

Пример 2.
Пусть снова $A \subseteq \{1, 2, ..., 2n\}$ *и* $|A| = n + 1$.
Тогда в A *найдутся такие два числа, что одно делит другое.*

Это утверждение менее очевидно. Решение основано на принципе Дирихле. Представим каждое число $a \in A$ в виде $a = 2^k m$, где m - нечетное число, $1 \leq m \leq 2n-1$. Так как в A содержится $n+1$ чисел, а количество нечетных чисел, меньше $2n$, равно n, то в A должны найтись два числа с одинаковыми нечетными делителями. Поэтому одно из них делится на другое.

Пример 3.
Любая последовательность $a_1, a_2, ..., a_{mn+1}$ *из* $mn+1$ *различных действительных чисел содержит либо возрастающую подпоследовательность*

$$a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_{m+1}} \qquad (i_1 < i_2 < ... < i_{m+1})$$

длины $m + 1$*, либо убывающую подпоследовательность*

$$a_{j_1} > a_{j_2} > ... > a_{j_{n+1}} \qquad (j_1 < j_2 < ... < j_{n+1})$$

длины $n + 1$*, либо обе такие подпоследовательности.*

На этот раз применение принципа Дирихле более сложно. Поставим в соответствие каждому a_i число t_i равное длине *наибольшей возрастающей* подпоследовательности, которая начинается с a_i. Если $t_i \geq m + 1$ для некоторого i, то с a_i начинается возрастающая подпоследовательность длины $m + 1$. Поэтому предположим, что $t_i \leq m$ для всех i. Для функции $f : a_i \mapsto t_i$, отображающей $\{a_1, ..., a_{mn+1}\}$ в $\{1, ..., m\}$, в силу (1) существует такое $s \in \{1, ..., m\}$, что $f(a_i) = s$ для $\frac{mn}{m} + 1 = n + 1$ чисел a_i. Пусть $a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_{n+1}}$ $(j_1 < j_2 < ... < j_{n+1})$ - эти числа. Рассмотрим теперь пары последовательных чисел $a_{j_i}, a_{j_{i+1}}$. Если $a_{j_i} < a_{j_{i+1}}$ хотя бы при одном $i \in \{1, ..., n\}$, то существует возрастающая подпоследовательность длины s, начинающаяся с $a_{j_{i+1}}$, и, следовательно, возрастающая подпоследовательность длины $s + 1$, начинающаяся с a_{j_i}, что противоречит предположению $f(a_{j_i}) = s$. Значит, $a_{j_1} > a_{j_2} > ... > a_{j_{n+1}}$, т.е. существует убывающая подпоследовательность длины $n + 1$.

□

Это просто формулируемое утверждение о монотонных подпоследовательностях имеет весьма не очевидное следствие, относящееся к *размерности графов*. Нам потребуется здесь понятие размерности не для общих, а лишь для полных графов K_n, для которых ее можно определить следующим образом. Пусть $N = \{1, .., n\}, n \geq 3$; рассмотрим m перестановок $\pi_1, ..., \pi_m$ множества N. Скажем, что перестановки π_i представляют K_n, если для любых трех различных чисел i, j, k из N найдется перестановка π, в которой k появляется позже i и j. Размерность $dim(K_n)$ есть наименьшее m, для которого существует представление $\pi_1, ..., \pi_m$.

В качестве примера укажем, что $dim(K_3) = 3$, так как каждое из трех чисел $1, 2, 3$ должно хотя бы раз оказаться последним, как в $\pi_1 = (1, 2, 3), \pi_2 = (2, 3, 1), \pi_3 = (3, 1, 2)$. Что можно сказать о $dim(K_4)$? Заметим вначале, что $dim(K_4) \leq dim(K_{n+1})$ (для доказательства достаточно вычеркнуть число $n + 1$ в представлении K_{n+1}). Поэтому $dim(K_4) \geq 3$, а на самом деле $dim(K_4) = 3$, так как можно взять

$$\pi_1 = (1, 2, 3, 4), \pi_2 = (2, 4, 3, 1), \pi_3 = (1, 4, 3, 2)$$

§2 Принцип комбинаторного характера

Есть математические теоремы, которые служат богатым источником для философских размышлений и образуют целые разделы математики.

Самой известной такой теоремой является, конечно, теорема Гёделя о неполноте любой формальной системы, включающей формальную арифметику. Имеется много публикаций о влиянии этой теоремы на мировоззренческие концепции. Поэтому ниже мы остановимся на двух других теоремах комбинаторики.

1. Есть так называемая теория Рамсея. Если интерпретировать теоремы этой теории в абстрактно-философском духе, абстрагируясь от математической специфики объектов, в них участвующих, то придем к заключению, что абсолютного хаоса быть не может. Есть какая-то аналогия и связь этого утверждения с утверждением, что не может быть концентрации энергии без ее частичного рассеивания (второй закон термодинамики).

Чтобы понять лучше смысл сказанного, приведем одну простую теорему рамсеевского типа, которая подтверждает тезис, что в „чистом“ виде произвола нет. „Полная“ свобода (хаос, произвол) - это предельные экстраполяции типа „ничто“, „точка“,... Таковой теоремой может служить утверждение примера3 §1.

Пример. Теорема Рамсея. Для каждого разбиения множества всех k - элементных подмножеств бесконечного множества S на конечное количество классов найдется некоторое бесконечное подмножество этого S, все k - элементные подмножества которого лежат в одном классе.

Доказательство предлагается провести самостоятельно. Также как и с теоремой Гёделя (см. теорему Гудстейна) можно с теоремой Рамсея связать абстрактно-всеобщее (философское по духу) высказывание.

Если имеется декартово множество обезличенных элементов с наведённой на нем структурой (в смысле Бурбаки), то существует натуральное число N, что при $M_1 \subseteq M$ и $|M_1| \geq N$ на M_1, закономерно, с необходимостью устанавливается некая подструктура, индуцированная исходная структурой.

Отметим связь этого высказывания с философскими аспектами синергетики.

2. Прекрасно иллюстрирует взаимодействие противоположностей, таких как „очевидное - не очевидное“, „истина - не истина“, теорема Банаха-Тарского: Шар B допускает разбиение на конечное число множеств $B_1, B_2, ..., B_k$ таких, что передвижением B_j как твердых тел (переносами и поворотами) из них можно составить шар вдвое большего радиуса, чем исходный, или несколько шаров такого же радиуса. Точная формулировка и полное доказательство приводятся в [3].

Эта теорема дает яркий пример математического доказательства существования явления, которое нельзя обнаружить экспериментально. Можно сказать и так: математически истинное разбиение не реализуется на практике - нельзя из одного арбуза получить реально два таких же арбуза.

Анализ доказательства показывает, что основным математическим объектом, который приводит к „парадоксу“, является аксиома выбора. Аксиому выбора очень трудно воспринять как неочевидную.

Поясним суть сказанного на упрощенном рассуждении.

Пусть фигурные скобки обозначают остаточную часть числа. Целая часть числа x, обозначается как $[x]$, и есть наибольшее целое число, не превосходящее x. Остаток (или остаточная часть x) есть $x - [x] \equiv \{x\}$ Точки с назовем π - соизмеримыми, если

$$\{x-y\}=\{m\pi\}$$

при некотором целом, положительном или отрицательном m.
„Вживаясь“ в задачу, установим первичные свойства.

1. $\{a\}=a-[a]$, где $[a]$ - целая часть числа a.

2. Если $|a|\leq 1$, то $\{a\}=\begin{cases} a, & \text{если} \quad a\geq 0 \\ 1+a, & \text{иначе,}\end{cases}$
   $[-b]=-[b]-1, \{-b\}=1-\{b\}$.

3. $[a\pm n]=[a]\pm n$, n - целое число.
   $\{a+n\}=\{a\}$

4. $[a+b]=\begin{cases} [a]+[b]+1, & \text{если} \quad \{a\}+\{b\}\geq 1, \\ [a]+[b], & \text{иначе,}\end{cases}$
   $\{a+b\}=\begin{cases} \{a\}+\{b\}-1, & \text{если} \quad \{a\}+\{b\}\geq 1, \\ \{a\}+\{b\}, & \text{иначе,}\end{cases}$

5. $\{a\}-\{b\}=\begin{cases} \{a-b\}, & \text{если} \quad \{a\}-\{b\}\geq 0, \\ -\{a-b\}, & \text{иначе,}\end{cases}$

6. $\{\{a+b\}-a\}=\{b\}$

7. $\{c+a\}-\{c+b\}=\{a\}-\{b\}$

Установив 1-5, мы доказываем, что π - соизмеримость чисел x, y есть отношение эквивалентности.

1. $x\sim x$

2. $x\sim y\Rightarrow y\sim x$, ибо $\{x-y\}=\{k\pi\}\Rightarrow\{y-x\}=1-\{x-y\}=1-\{k\pi\}=\{-k\pi\}$.

3. $x\sim y, y\sim z\Rightarrow x\sim z$, ибо
   $\{(x-y)+(y-z)\}=\begin{cases} \{x-y\}+\{y-z\}-1, & \text{если} \quad \{x-y\}+\{y-z\}\geq 1, \\ \{x-y\}+\{y-z\}, & \text{иначе}\end{cases} =$
   $=\begin{cases} \{k\pi\}+\{l\pi\}-1=\{(k+l)\pi\}, \\ \{k\pi\}+\{l\pi\}=\{(k+l)\pi\}.\end{cases}$

Отрезок $[0,1]$ разобьем на непересекающиеся множества $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in I}$ π - соизмеримых чисел, в каждом Z_α фиксируем по одному элементу z_α (аксиома выбора), из которых образуем множество Z, и рассмотрим множества

$$Z^k=\{Z+k\pi\}, k \text{ - любое целое число.}$$

Легко видеть, что Z^k переходит в $Z^p (p>k)$ при сдвиге одной части элементов Z^k на расстояние $\{(p-k)\pi\}$ вправо и другой части - на расстояние $1-\{(p-k)\pi\}$ влево. Другими словами, Z^k можно разрезать на две части и, передвигая те, как твердые тела, образовать Z^p (случай $p<k$ рассматривается аналогично). Наконец очевидно, что Z^k в сумме дают весь отрезок $[0,1]$.

Но любая подпоследовательность Z^{γ_k} в сумме тоже дает весь отрезок $[0,1]$ после предварительной перестройки множеств Z^{γ_k} как твердых тел. Поэтому, если семейство

$\{Z^k\}$ разбито изначально на миллион бесконечных совокупностей $\{Z^{\gamma_k}\}$, то из каждой такой совокупности можно сложить отрезок $[0,1]$, а потом миллион отрезков поставить рядом, образовав $[0,10^6]$ из кусков $[0,1]$.

Разумеется, это пока лишь счетная равносоставленность (кубов неодинаковых размеров), представляющая собой первый шаг в направлении результата Банаха-Тарского, который в начале прошлого века осуществил Хаусдорф.

§3 Принцип перехода препятствия в решение.

Препятствие скрывает решение в противоположном. Решение является через изучение препятствия. Полагаемое против переходит в решение проблемы.

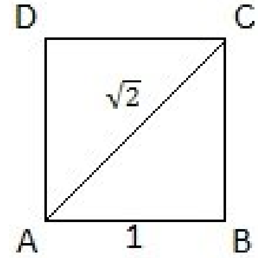
„Превосходно, что мы столкнулись с парадоксом.
Значит, есть надежда на прогресс.“
Нильс Бор

„Препятствие есть ключ к решению задачи. Препятствие не делает напрасным достигнутое, ибо вырабатывает материал для строительства дальнейшего.“

Вариативный ряд высказываний для медитации этого напряжения:

- Научился ли ты радоваться препятствиям.
- Из неудачи нередко можно извлечь полезный урок. Поэтому промахи - лучшее подспорье к делу.
- Потеря есть начало размножения. Множество есть начало потерь.
- Не приведшее к результату не есть ничто, а есть нечто.
- Пессимист видит в возможности препятствие, оптимист видит возможность в препятствии.
- Необходимо понять препятствие.
- Препятствие надо сделать объектом исследования.

Пример 1.
Исчисление пропорций Евдокса.



В Древней Греции знали только целые и рациональные числа. Предполагалось, что их достаточно для того, чтобы выразить отношения любых двух величин. Однако, один из учеников Пифагора заметил, что в случае квадрата $ABCD$ для пары (AC, AB) не существует третьего отрезка, которое укладывалось бы целое число раз в AC и в AB

(то есть AC и AB несоизмеримы).

Доказательство

Пусть отрезок AB измеряется m эталонными отрезками, а AC - n отрезками. Тогда по теореме Пифагора $2m^2 = n^2$. Из этого равенства следует четность n и четность m, что невозможно если они (n и m) взаимно просты.

В современной математике мы знаем понятие иррационального числа, знаем число $\sqrt{2}$, и рассуждаем так:

Если бы

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

то $2n^2 = m^2 \Rightarrow m = 2k, 2n^2 = 4k^2, n^2 = 2k^2, n = 2k$
получаем противоречие с несократимостью дроби $\frac{m}{n}$, то сеть $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$.

Трудность с отсутствием эталона разрешил Евдокс, он *препятствие* сделал *объектом исследования*. Будем рассматривать все пары отрезков (A, B) независимо от того есть ли у них общий масштаб или нет. Такие пары отрезков Евдокс называл пропорциями.

Два отрезка (M, N) называются *соизмеримыми*, если есть третий отрезок, который целое число раз укладывается на отрезках M и N.

Гениальный ход Евдокса: ввести отношения между пропорциями, продолжающее отношение - между числами. Пара $(A, B) \geq (C, D)$, если для любой измеримой пары (M, N) из того что $(M, N) \leq (C, D)$ следует, что $(M, N) \leq (A, B)$. Если при этом для измеримой пары соответствует рациональное число $\frac{m}{n}$, где m - число укладываемого на M, n - число укладываемого на N отрезка, определяющего измеримость M и N, то $(M, N) \leq (C, D)$ означает, что $mD \leq nC$. Неравенство последнее сравнивает длины, ведь m и n - целые и отрезки mD и nC определяются естественно.

Мы объявляем $(A, B) = (C, D)$, если $(A, B) \geq (C, D)$ и $(A, B) \leq (C, D)$.

Каждая пара (A, B) делит множество всех измеримых пар (M, N) на два непересекающихся класса:

1. $(M, N) \leq (A, B)$
2. $(M, N) > (A, B)$

Выражаясь современным языком (A, B) производит сечение множества измеримых пар. Если сделать ещё одно усилие абстракции, то можно пару (A, B) отождествить с этим сечением. Рассмотрим все полученные таким способом разбиения на классы.
Возможны три случая:

1. в первом классе есть наибольший элемент
2. во втором классе есть наименьший элемент
3. нет таких элементов

В случае первом или втором сечение можно отождествить естественным образом с измеримой парой, являющейся экстремальной в своем классе, то есть с рациональным числом $\frac{m}{n}$. В последнем случае для сечение можно ввести специальный символ и множество этих символов рассматривать как новые числа. Так и сделал Дедекинд в 19 веке, так появились иррациональные числа. Но, собственно, пропорции Евдокса и есть „новые“ числа.

Пример 2.

„И кажется преграда на пути лишь камнем,
чтобы на нем точить и править силы.“
Эмиль Верхерн.

Нужно вычислить выражение:

$$a^{2003} + \frac{1}{a^{2003}},$$

если известно, что $a^2 - a + 1 = 0$.

Решение: Здесь „препятствием“ являются большие степени a. Сделаем предметом изучения степени, и обратимся сначала к выражению, содержащие только малые степени. Преобразуем $a^2 - a + 1 = 0$, поделив равенство на a:

$$a - 1 + \frac{1}{a}, \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 1$$

Единственное различие между правой частью полученного равенства и вычисляемого выражения это степени при a. Можно последовательно получать значения:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 1, a^3 + \frac{1}{a^3} = -2, a^4 + \frac{1}{a^4} = -1, a^5 + \frac{1}{a^5} = 1, ...,$$

переход повторения в качество следует. Мы улавливаем, что a - комплексное число, ибо $a(a^2 + \frac{1}{a^2}) = -a$, следовательно, $a^3 = -1$. Теперь, мы подвергаем исходное выражение преобразованию

$$a^{2003} + \frac{1}{a^{2003}} = a^{3 \cdot 667 + 2} + 1/a^{3 \cdot 667 + 2} = -a^2 - \frac{1}{a^2} = 1$$

Список литературы

[1] Р. Грэхем. Начала теории Рамсея. М. „Мир“, 1984 г.

[2] R. Graham,B. Rothschild Ramsey Theory. John Wiley, 1980 г.

[3] Справочная книга по математической логике. ч.II. М. „Наука“, 1982 г.

[4] Босс В. Интуиция и математика. М. „Айрис-пресс“, 2003 г.

Лекция 6. Элементарное пространство в иерархии математических пространств.

Введение. Математическое мышление протекает в единстве таких моментов, как:

1) владение математическим материалом (теорией);

2) абстрактно-философская рефлексия к проблеме;

3) психология творчества (воля, мотивация, чувство красоты и т.п.);

4) владение выразительными средствами языка. Когда рассуждаешь в поисках идеи доказательства теоремы, решения задачи философские и математические аспекты размышления трудно отделить друг от друга. Те общие принципы, которые вырабатывает математик для получения решения, назовем рациональными принципами математики. Один из этих принципов - принцип «элементарное пространство» и обсуждается в данной работе. В отличие от предыдущих работ автор делает здесь упор на то,что

1) элементарное пространство и есть сама задача, но в преобразованном виде;

2) элементарное пространство есть воплощение локального подхода в понимании пространства как категории. Каждая задача, проблема имеют свое сущностное пространство. Нет абсолютно пространства, в котором все объясняется. Подтверждение этому можно найти и в современной теоретической физике. Для объяснения некоторых явлений микромира вводятся общие топологические пространства «далекие» от евклидовых или римановых.

§1. Рациональные принципы математики.

> « Научный метод ...- это совокупность правил, иногда общих, иногда частных, которые помогают исследователю в пути в джунгли поначалу разрозненных, противоречащих друг другу фактов. Научное исследование - это искусство, а правила в искусстве, если они слишком жестки, приносят больше вреда, чем пользы».
>
> Д. П. Томпсон

Математик излагает свои результаты (теоремы, теории), следуя правилам классической логики, обосновывая последовательно свои выводы ее силлогизмами. (Н. Бурбаки в своем трактате « Элементы математики» показывает, что вся современная математика может быть представлена через формальную систему, введенную в первом томе трактата, в монографии « Теория множеств»). Но к идеям доказательства теормы и развития теории математик приходит иначе, руководствуясь правилами, которые ему подсказывает опыт и интуиция, -рациональными принципами математики.

Наша цель-исследовать рациональные принципы как систему. Задача эта еще не завершена. Поэтому остановимся только на отправных моментах. Во-первых, рациональные принципы должны обладать воспроизводимостью другими математиками как определенная в своем качестве мыслительная процедура и допускать обогащение содержания и развитие. Отметим в связи с этим роль языка. В рациональных принципах наиболее общих отсутствует четкая и жесткая формулировка как у теорем. Принципы сотрудничают с интуицией и не сводятся к алгоритмам. Алгоритмы жестко регламентируют действия, принципы -нет.

Поскольку принципы словесно оформлены, сила принципа зависит от силы выразительных средств языка. Богатство языка и средств языкового выражения позволяет исследователю давать различные формулировки для сложившейся ситуации и тем самым дает различные оттенки проблемы и более глубокое понимание ее. Формулируя в словах, мы уже обобщаем задачу. Сила обобщения в привлекаемых словах и конструкции предложения (сравните обыденную речь с предложениями трудов Гегеля или Хайдеггера). Слова при обдумывании математической проблемы всегда приобретают оттенок философских понятий.

Во-вторых, нужно отметить иерархию принципов. Принципы первого уровня сведены Д. Пойа в таблицу «Как решать задачу». Это правила, приемы излагаются во многих руководствах по подготовке к математическим олимпиадам. Это правила типа « рассмотрите аналогичный частный случай, аналогичный обобщающий пример»; «начните решать задачу с конца, или от противного», «принцип Дирихле», и т.п. Это то, что Томсон называет "частными правилами ".

Принципы более высокого уровня, более абстрактны, носят уже философский характер. Они помогают проникнуть за непосредственную данность, когда ум начинает работать с отрицания непосредственно воспринимаемой картины, ситуации задачи. Эти принципы как бы медитируют напряжение, необходимое для продвижения мысли за очевидность.

Эти принципы поднимаются до уровня категорий и понятий диалектической логики. Например, аналогия, которая на первом уровне принципов выступает как рассуждение и действие по сходству, теперь проступает как воплощение категории всеединства, как выделение сущности через ряд явлений. Другим понятием, организующим математические рассуждения, является категория « идеальное» (в понимании Э. Ильенкова).

В-третьих, что же дает изучение принципов конкретно для решения задач? При выработке того или иного принципа, собственно, вырабатывается весьма общее напряжение- образ идеи, которая реализуется в конкретную идею при решении конкретной задачи. Поясним это следующим высказыванием. Была раньше такая игра: высмотреть в наброске штрихов какой-либо объект, например, зайца. Невозможно это сделать, не обладая мысленным образом зайца, и невозможно по исходному рисунку дать представление о зайце незнакомому с ним человеку. Философско-математический принцип- это добытое сырье, которое в конкретной задаче превращается в конкретную идею.

Наконец, приведем замечательное высказывание выдающегося российского математика А. Н. Колмагорова: "занятия совсем общими полуфилософскими размышлениями у меня самого заняли больше времени и энергии, чем, может быть, кажется издали. В такой выработке совсем общих взглядов итог усилий заключается не в формулировке точно фиксированных результатов, а в общей перестройке собственного сознания и размещения всего в надлежащей перспективе".

«Ухватить трудность на глубине,- вот что главное».

А.Витгенштейню

«Во всем мне хочется дойти до самой сути . . . »

Б. Пастернак.

§2 Из принципов "высокого"уровня обсудим подробно принцип элементарного пространства, который неявно располагается в математических рассуждениях "всюду плотно". Пространство является фундаментальным понятием философии, физики, математики, но введением элементарного пространства мы переходим с глобального аспекта рассмотрения этого понятия на локальный.

Элементарное пространство - это совокупность родственных в каком-то плане объектов, родство которых обеспечивается условиями задачи. Общий представитель пространства участвует в организации определенной интерпретации задачи и обуславливается интерпритацией этой задачи. Материал задачи всегда поставляет нам сообщество определенных однотипных объектов, которое необходимо воспринять как определенную структуру, изучение которой эквивалентно решению задачи.

В отличие от канторового множества обезличенных элементов элементарное пространство рассматривается как собрание индивидуумов, определенные свойства которых варьируются и определяются ролью элементов в задаче. Можно сказать в первом приближении, что элементарное пространство есть канторово множество плюс определенная интерпретация задачи, которая воспринимается как уравнение, определяющее элемент из этого множества, реализующий определенное взаимодействие в интерпретации.

Помимо этого математического аспекта определение элементарного пространства имеет философский и физический аспекты обоснования. С точки зрения философии побуждающим к размышлениям является, как отметил Мамардашвили, вопрос: «почему всегда не одно, а много одного?». Не один электрон - много электронов. Солнце не одно - много звезд (даже в донаучную эпоху Солнце - один из богов), и т.д. Понимание этого в том, что каждый объект двойственен: имеет предметное бытие и идеальное (характерный пример - деньги: предметное бытие есть денежная купюра, идеальное бытие - организация товарооборота). Элементарное пространство есть отражение этой двойственности, есть самая экономная реализация ее в бытие (осуществляет выбор объекта и его функциональную роль через множество себе подобных применительно к конкретной задаче). Внутреннее или предметное бытие элементарного пространства есть канторово множество. Внешнее идеальное бытие есть взаимодействие, организуемое элементом из пространства в контексте задачи и выявляющее решение. Отметим в связи с этим, что под контекстом можно понимать всю совокупность интерпретаций задачи, а не только ее конкретную формулировку; причем, совокупность не актуально завершенную, а потенциально становящуюся.

Элементарное пространство, следуя сказанному, мы будем обозначать символом «$1 \to \infty$».

Со стороны физики понятие элементарного пространства отражает квантованность всех процессов. "Много одного кванты реализуют поля, излучения, волны (кстати, квант мышления - кларитон).

Итак, элементарное пространство - это та же самая задача, схематизированная как пространство; абстракция, эквивалентная по цели (решению) исходной формулировке. Задача целиком положена в элементарном пространстве, которое есть инобытие задачи. Если задача есть модель, то «$1 \to \infty$» есть модель модели. Каждая задача имеет свое элементарное разрешающее пространство, и в этом локальный характер обсуждаемого понятия пространства.

§3. Примеры.

«Вот тут-то все и объясняется».

Дигаш

Во многих «олимпиадных» задачах для младшеклассников типа «задача о ханойской башне», «задача о волке, козе и капусте», задачи нахождения фальшивой монеты взвешиванием и т.п. элементарное пространство появляется очевидным образом как перечисление возможных действий. Главное здесь - полнота перечисления, не пропустить ключевое, решающее задачу действо. В то же время отметим, что в совокупности действия, как группа преобразований, являются основой многих теорий. Перейдем к примерам, где выбор пространства само представляет задачу, где для проявления элементарного пространства нужно приложить усилия. Задача проявления имеет свои принципы, некоторые из которых мы формулируем после соответствующих примеров.

Пример 1. Задача рассмотрена В. Арнольдом в его книге « Обыкновенные дифференциальные уравнения».

Из города А в город В ведут две дороги.Известно, что две машины, выезжающие из А в В по разным дорогам, и связанные веревкой длины, меньшей 2L, смогли проехать из А в В, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса L, центры которых движутся по этим дорогам навстечу друг другу?

Решение. В. Арнольд предлагает решение, основанное на понятии фазового пространства. Мы получим решение через элементарное пространство. Пусть машина M1 двигалась по дороге D1, машина M2 - по дороге D2. Каков бы ни был график $S = S_1(t)$ движения M1, можно подобрать график $S = S_2(t)$ движения M2, которое не разрывает веревку. Действительно, если $G = G_1(t)$ и $G = G_2(t)$ графики уже реализованного движения машин, то $S_2(t) = G_2({G_1}^{-1}(S_1(t)))$. Элементарным пространством является множество всевозможных графиков движения M1. Пусть M1 движется по графику $S = S_1(t)$ движения обоза, вышедшего из А (разрешающий элемент пространства!). Вторая мшина M2 пусть движется по соответствующему графику $S_2(t)$. В момент τ встречи машины M2 и обоза, вышедшего из В по дороге D2, обозы столкнуться.

Резюме к этому примеру. В задаче часто элементарное пространство порождается элементом, обладающим свободой выбора.

Пример 2. Рассмотрим три величины: $b = \dfrac{a+c}{2}$ - среднее арифмитическое, $b = \sqrt{ac}$ - среднее геометрическое, $b = \dfrac{2ac}{a+c}$ - среднее гармоническое. Исследовать отношения между ними, предполагая $a, b, c > 0$.

Решение. Величины мало связаны по форме, и трудно уловить, что здесь представлено нечто одно с вариацией определенного свойства. Попытаемся представить величины другими выражениями. Для определенности пусть $a > c > 0$. После некоторой работы мы приходим к наблюдению, что число b, определенное из неравенств:

$$(1)\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a},(2)\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b},(3)\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$$

соответственно определяет среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое. Формулы (1) – (3) однотипны и приводят к рассмотрению элементарного пространства равенств $\{\phi(b) = const\}$ с заданной функцией $\phi(b) = \dfrac{a-b}{b-c}$; a, c предполагаются фиксированными. Проблема сводится теперь к изучению свойств функции $\phi(b)$. По предположению $c < a$, поэтому $\phi_b{}' < 0$, т.е. функция ϕ монотонно убывающая. Поскольку $\dfrac{a}{a} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{a}{c}$, то значения b, соответствующие этим значениям функции ϕ последовательно убывают:

$$\frac{a+c}{2} > \sqrt{ac} > \frac{2ac}{a+c}.$$

Резюме. Мы часто приходим к элементарному пространству через изменение формы данных задачи и затем выявление общего представления элемента пространства.

Пример 3. Элементарная теорема о компактности. Элементарное пространство - это взаимодействующая система элементов. Условия задачи играют роль уравнения, определяющего свойство взаимодействия. Как решать это уравнение? Следует учесть, что в какой-то, пусть измененной форме, общие законы для систем имеют место и для элементарного пространства. Например, физическую систему в устойчивом состоянии характеризует минимум энергии. Для элементарного пространства это свойство трансформируется в близкий принцип минимализации элементов пространства (вспомним: «$1 \to \infty$» есть самая экономная реализация...).

Теорема. (Шагидуллин Р.Р.). Пусть дано бесконечное число конечных строк символов a_{ij} :

$$\begin{array}{lllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \dots & a_{1n_1}, \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \dots & a_{2n_2}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}, & a_{k2}, & a_{k3}, & \dots & a_{kn_k}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \qquad (1)$$

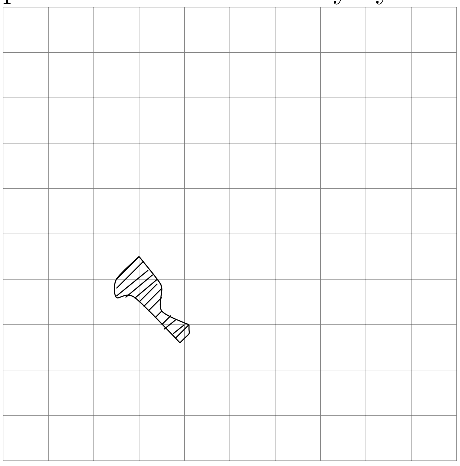
Символы представляют буквы латинского алфавита, индексированные натуральными числами; возможно подчеркнутые сверху, например, A_1, B_{10}, $\overline{C_9}$ .... Для любого конечного числа строк возможно выбрать по одному символу в строке таким образом, что в целом выборка не будет содержать какую-либо букву вместе с ее « отрицанием » подчеркиванием, например, D_{101} и $\overline{D_{101}}$. Тогда описанную выборку можно осуществить сразу для всей системы строк.

Доказательство. Элементарное пространство, очевидно, составляют символы, взаимодействие их - это обеспечение условия задачи. Применим к этому пространству принцип минимизации. Для этого рассмотрим a_{11}. Если вычеркивание a_{11} из таблицы (1) сохраняет условия задачи, убираем этот элемент. Альтернатива: символ a_{11} нельзя убрать, ибо без него выборку, скажем для первых m - строк, уже нельзя провести. Поскольку выборка ранее была возможна, это означает, что a_{11} учавствует в этой выборке. Итак, в альтернативном случае в первой строке оставляем только a_{11} . Для получающейся таблицы условия теоремы выполняются. Повторяя рассуждения (в случае возможности убрать a_{11}), мы добиваемся, что в первой строке остается только один элемент. Изложенные рассуждения повторяем со второй и последующими строками. Минимизированная таким образом таблица и представляет искомую выборку.

Доказательство этой теоремы легко трансформировать в доказательство теоремы компактности Геделя - Мальцева в теории моделей и теоремы Тихонова в общей топологии.

Ретроспективный анализ к проведенному рассуждению. Материал задачи всегда поставляет нам сообщество определенных однотипных объектов. Забудем о целях задачи, воспримем представленный в ней мир объектов как организацию, определенную структуру, как систему, как элементарное пространство. Следовательно, можно обсудить перенос знаков общей теории систем на это пространство. Например, если в физической системе место центрального понятия занимает энергия, то что соответствует ему в математической системе? Что соответствует вариационным принципам? Если вариационный принцип в общем есть выражение "экономии средств то нельзя ли этот принцип в простейшей форме представить как возможность уменьшить в сообществе однотипных объектов задачи число объектов?

Пример 4. Еще один пример минимизации "числа действующих лиц". Имеется разлинованная в клетку бумага, сторона клетки равна 1 см.



Ученик посадил кляксу площадью $S < 1cm^2$. Доказать, что можно по новой разлиновать этот лист на такие же клетки так, что при этом ни одна из вершин новой клетки не будет лежать на кляксе.

Как объект элементарного пространства возьмем клетку, содержащую часть кляксы. Если параллельным переносом сместить такую клетку и наложить на любую другую, то возникнет "новая"клякса, с не большей площадью. Требуемая разлиновка при "новой"кляксе будет пригодна и для "старой". Та разлиновка, которую мы ищем, инвариантна относительно параллельных переносов наших объектов. (Заметим, что и в физике законы сохранения, вариационные принципы тесно связаны с инвариатностью (чего-то относительно чего-то)).

Остается, чтобы решить задачу, перенести все клетки на одну и выбрать в последней точку, не принадлежащую кляксе. Параллельный обратный перенос на все клетки выделенной точки дает вершины клеток требуемой разлиновки.

<u>Заключение.</u>

> «Рационально мыслящего человека убедит аргумент, а доказательство нужно, чтобы убедить того, кто не особо умен».
>
> П. Рентли, А. Дандес

В изложенном материале постоянно затрагивается дуальная пара: явление - сущность. Собственно, элементарное пространство, выражаясь философским языком, проявляет сущность, явленную описанием задачи, контекстом задачи. На математическом языке элементарное пространство есть нечто вроде формулы, дающей решение уравнения - задачи. Часто к сущности, а, следовательно, и к решению подводит в элементарном пространстве член - «мутант», или «исключительный по положению» член, или член «сингулярный» в каком либо отношении, или нечто абстрактно - всеобщее для всех систем, представленное в данной конкретной задаче через общий элемент элементарного пространства.

Если отношения элементов в элементарном пространстве берутся максимально абстрагированными от конкретики, то отношения представляются подмножествами декартовых произведений множеств (какие произведения необходимо брать определяется задачей) и принимается какая - то общая система аксиом и правил вывода теории множеств. Так возникают структуры Бурбаки.Однако, для такого построения теории все равно нужна иерархия: получаемые на одном уровне развития теории теоремы далее не воспринимаются как формальные образования, сами становятся опорными исходными предпосылками для последующих выводов. А ходом сложного рассуждения все равно руководит какая -то содержательно воспринимая идея - принцип. Ибо, в гнесеологическом плане иерархия в математике - это оформление, форма понимания. Тогда как в физике иерархия как нечто объективно -реальное есть антиэнтропийный процесс.

В сложных пространствах от элементарного пространства поднимаемся на уровень взаимодействующих между собой нескольких элементарных пространств, - уровень иерархии математических пространств, требующий специального изучения. На этом уровне лежат все функциональные пространства математической физики.

Наконец, отметим, что на элементарное пространство можно смотреть, как на член эволюционного ряда «величина »: число - тензор - оператор-... . Действительно, взаимодействие между «$1 \to \infty$» и контекстом задачи есть функциональное отношение - оператор. каждому элементу из «$1 \to \infty$» ставится в соответствие претендующая на решение интерпретация задачи. Роль критических точек числовых функций играют особые элементы элементарного пространства.

Лекция 7. Метрические пространства.

Пусть X – множество элементов, $\rho(x,y)$ – числовая функция от двух переменных, определенная на X.

Свойства $\rho(x,y)$:

1) Аксиома тождества

$\rho(x,y) \geq 0 \qquad \forall\, x,y \in X$

$\rho(x,y) = 0 \;\sim\; x = y$

2) Аксиома симметрии

$\rho(x,y) = \rho(y,x)$

3) Неравенство треугольника

$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X$

Функция $\rho(x,y)$ называется метрикой (расстоянием), а множество X называется метрическим пространством X, ρ.

Примеры метрических пространств:

1) E_3 определяется как упорядоченная тройка чисел, и если $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, то

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i - y_i)^2}$$

Свойства 1)-3) легко проверяются, неравенство 3):
$\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B)$ – есть обычное неравенство треугольника для $\forall\, A,B,C \in E_3$

2) $C[a,b] = \langle \varphi(x) : \varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]\rangle$

Если $\varphi(x), \psi(x) \in C[a,b]$, то

$$\rho(\varphi,\psi) = \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x) - \psi(x)|$$

Докажем что $\rho(\varphi,\psi)$ метрика:

$\rho(\varphi,\psi) \geq 0$

$\rho(\varphi,\psi) = \rho(\psi,\varphi)$

$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |\varphi(x) - f(x)| + |f(x) - \psi(x)| \;\Rightarrow$

$\sup|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \sup|\varphi(x) - f(x)| + \sup|f(x) - \psi(x)|$

Т.о. $\rho(\varphi,\psi)$ удовлетворяет всем свойствам метрики.

3) $L^2[a,b] = \langle \varphi(x) : \int\limits_a^b \varphi(x)^2 dx < \infty \rangle$

$\varphi(x), \psi(x) \in L^2[a,b]$

$\rho(\varphi,\psi) = \sqrt{\int\limits_a^b (\varphi(x) - \psi(x))^2\, dx}$

Первый этап построения теории метрических пространств начинается с определений по аналогии с определениями в евклидовом пространстве.

Определение:
Открытый шар $B_r(x)$ радиуса r с центром в точке x есть множество

$$B_r(x) = \langle y : y \in X,\ \rho(x, y) < r\rangle$$

Определение:
Замкнутый шар $\overline{B}_r(x)$ радиуса r с центром в точке x есть множество

$$\overline{B}_r(x) = \langle y : y \in X,\ \rho(x, y) \le r\rangle$$

Не все утверждения справедливые в евклидовом пространстве имеют место в произвольном метрическом пространстве, например, утверждение о единственности центра шара.

Пример:
Определим метрику на $X = \{a, b, c\}$:
$\rho(a, b) = \rho(a, c) = \rho(b, c) = 2$
$\rho(a, a) = 0,\ \ \rho(b, b) = 0,\ \ \rho(c, c) = 0$
$\rho(a, b) = \rho(b, a) \quad \forall\, a, b \in X$
$\rho(a, b) \le \rho(a, c) + \rho(c, b) \quad \forall\, a, b, c \in X$
Следовательно, определили метрическое пространство X, ρ, в котором $B_3(a) = B_3(b) = B_3(c) = X$

Определение:
Пусть даны $r > 0$ и точка a, тогда $V \subset X$ называется окресностью точки a, если V содержит шар $B_r(x)$, т.е. $V \supseteq B_r(x),\ r > 0$

Определение:
Множество $O \subseteq X$ называется открытым множеством, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и окресность этой точки, т.е. если O является окресностью каждой своей точки.

Определение:
Множество $F \subseteq X$ называется замкнутым, если оно является дополнением к открытому множеству, т.е. $X - F$ открыто.

Предложение 1: *Фундаментальные свойства открытых множеств.*
1) X, $\varnothing$, – открытые множества,
2) Если $O_1, O_2, \ldots, O_k$ какой-то произвольный конечный набор открытых множеств, то пересечение множеств этого набора

$$\bigcap_{i=1}^{k} O_i$$

тоже открытое множество.
3) Сумма любого числа открытых множеств является открытым множеством:

$$\forall\, \alpha \in I,\ \ O_\alpha \text{ – открыто } \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \text{ – открыто}$$

Доказательство:

1) $\forall\, a \in X,\ B_r(a) \subset X,\ r > 0\ \Rightarrow\ X$ – открытое множество по определению. Если $a \in \varnothing$, то $B_r(a) \subseteq \varnothing$ по смыслу импликации.

2) Пусть

$$a \in \bigcap_{i=1}^{k} O_i\ \Rightarrow\ a \in O_i\ \ \forall\, i$$

Существуют $r_i > 0$, что $B_{r_i}(a) \subseteq O_i,\ r > 0$. Пусть $r = \min(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, тогда $B_r(a) \subseteq O_i\ \ \forall\, i$

3)

$$a \in \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha\ \Rightarrow\ \exists\, \alpha : a \in O_\alpha\ \Rightarrow\ \exists\, r > 0\ \text{ и }\ B_r(a) \subseteq \bigcup_{\alpha\in I} O_\alpha$$

Предложение 2: *Фундаментальные свойства замкнутых множеств.*

1) X, $\varnothing$, – замкнутые множества,

2) Если $F_1, F_2, \ldots, F_k$ какой-то произвольный конечный набор замкнутых множеств, то сумма множеств этого набора

$$\bigcup_{i=1}^{k} F_i$$

тоже замкнутое множество.

3) Пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством:

$$\forall\, \alpha \in I,\ \ F_\alpha - \text{замкнуто}\ \Rightarrow\ \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha - \text{замкнуто}$$

Доказательство:

1) X открыто, значит, его дополнение $X - X = \varnothing$ замкнуто.

2) F_i – замкнуто $\Rightarrow\ O_i = X - F_i$ – открыто

$\bigcap\limits_{i=1}^{k} O_i = \bigcap\limits_{i=1}^{k} (X - F_i) = X - \bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ – открыто по первому предложению,

следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$ – замкнуто, т.к. является дополнением к открытому.

3) Аналогично п. 2) (нужно воспользоваться принципом двойственности).

Определение:

Пусть X, ρ метрическое пространство, $M \subseteq X$, точка $a \in X$. a называется предельной точкой для множества M, если каждая окресность точки a содержит точку из M, не равную a.

Теорема:

Множество $F \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство:

Пусть F задано, по определению $X - F = O$ открытое множество, по определению открытого множества в нём нет предельных точек для F. Обратно: Пусть F содержит все свои предельные точки. Рассмотрим множество $X - F,\ a \in X - F$, a – не предельная точка. Тогда $\exists\, V_a$ окресность точки a, которая не содержит точек из F, следовательно, $V_a \subseteq X - F \;\Rightarrow\; X - F$ открыто.

Определение:

Пусть $M \subseteq X, \rho$. $\overline{M}$ – замыкание множества M есть множество M со всеми присоединенными к M предельными точками.

Теорема:

$\overline{M}$ – замыкание множества M есть наименьшее замкнутое множество, содержащее M.

Доказательство:

$\overline{M}$ – замкнутое множество. Пусть a – предельная точка для $\overline{M}$. Примем, что:

$$V(a) = B_r(a),\; r > 0,\; b \in B_r(a) \bigcap (\overline{M} - a)$$

$$\exists\, \rho > 0,\; B_\rho(b) \subseteq B_r(a),\; \rho < r - \rho(a,b),\; \exists\, m \in M,\; m \in B_\rho(b) \;\Rightarrow\; m \in B_r(a) \;\Rightarrow$$

a – предельная точка для $M \;\Rightarrow\; a \in \overline{M}$.

Пусть некоторое замкнутое множество F содержит M, тогда F содержит все предельные точки для M, следовательно $F \supseteq \overline{M}$.

Определение:

Дано метрическое пространство X, ρ. Множество $M \subseteq X$ называется всюду плотным, если для $\overline{M}$ – замыкания M, выполняется $\overline{M} = X$.

Пример:

$X \equiv R_1$, M – множество рациональных чисел. $\overline{M} = R_1$ – т.е. множество рациональных чисел всюду плотно.

Определение:

Система множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ покрывает (есть покрытие множества) $M \subseteq X$, если

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \supseteq M$$

Определение:

Метрическое пространство X, ρ называется сепарабельным, если в X существует счетное всюду плотное множество.

Пример:

R_1 сепарабельно, т.к. множество рациональных чисел, входящее в него, счетно и всюду плотно.

Определение:

Метрическое пространство X, ρ называется линделёфовым, если из любого покрытия X открытыми множествами можно выделить счетное покрытие, т.е. если

$$\forall\, \alpha \in I,\; O_\alpha \text{ – открыто и } \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \supseteq X, \text{ то } \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \in I \text{ и } \bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\alpha_i} \supseteq X$$

Теорема 1:

Сепарабельное метрическое пространство линделёфово.

Доказательство. Пусть X, ρ сепарабельно и $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ счетное всюду плотное множество. Пусть система $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ открытых множеств покрывает X, т.е.

$$\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \supseteq X$$

Пусть a – произвольный элемент из $X : a \in X$. Т.к. $\{O_\alpha\}$ покрывают X, то $\exists\, \alpha \in I,\ a \in O_\alpha \ \Rightarrow\ B_r(a) \subseteq O_\alpha$ (т.к. O_α открытое множество, то содержит и шар радиуса $r > 0$ с центром в точке a), число r можно считать рациональным числом.

Т.к. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ всюду плотные, то $\exists\, a_m \in B_{r/3}(a) \ \Rightarrow\ a \in B_{r/3}(a_m) \ \Rightarrow$ $B_{r/3}(a_m) \subseteq B_r(a) \subseteq O_\alpha$

Рассмотрим совокупность шаров $\{B_{r/3}(a_m)\}$, когда a пробегает все X. Система этих шаров счетная, т.к. $r/3$ пробегает счетное множество (потому что r рациональное число), элементов a_m тоже счетное количество, значит, система счетна. Но каждое из них входит в некоторое O_α, из покрытия $\{O_\alpha\}$ оставляем только те множества, которые содержат шар из построенной совокупности, их счетное число и они покрывают X.

$\square$

Определение:

В метрическом пространстве X, ρ множество M называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре конечного радиуса, т.е.

$$\sup_{a,b \in M} \rho(a, b) < \infty$$

Определение:

Множество M метрического пространства X, ρ называется вполне ограниченным, если каждая последовательность попарно различных элементов из M содержит фундаментальную подпоследовательность.

Определение:

Множество M метрического пространства X, ρ называется компактным, если каждая последовательность попарно различных элементов из X содержит подпоследовательность, которая сходится к какому-то элементу из M, т.е. если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in M$, то существуют подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ и $a \in M$, такие что

$$\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = a$$

Определение:

Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется фундаментальной, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, N\ \ \forall\, n > N, \forall\, m : \big(\ \rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon\ \big)$; N, n, m – натуральные числа.

Теорема 2:

Множество M вполне ограничено тогда и только тогда когда $\forall\, \varepsilon > 0$ M можно покрыть конечным числом шаров радиуса, не превосходящего ε.

Доказательство. 1) Пусть M вполне ограничено по определению. Пусть существует такое $\varepsilon > 0$, что M нельзя покрыть никаким конечным числом шаров радиуса ε. Строим последовательность: в качестве m_1 берём любой элемент из M. Рассмотрим шар $B_\varepsilon(m_1)$, он не покрывает $M \;\Rightarrow\; \exists\, m_2 \notin B_\varepsilon(m_1),\; m_2 \in M$

Возьмем $B_\varepsilon(m_1) \bigcup B_\varepsilon(m_2)$, они тоже не покрывают M, следовательно,

$\exists\, m_3 \notin B_\varepsilon(m_1) \bigcup B_\varepsilon(m_2),\; m_3 \in M$

И т.д.

На k-м шаге построили $m_1, m_2, .., m_k$, такие что они не содержатся в сумме шаров с центрами в предыдущих элементах с радиусом ε.

Возьмём из множества M - $B_\varepsilon(m_1) \cup B_\varepsilon(m_2) ... \cup B_\varepsilon(m_k) \neq \varnothing$ элемент m_{k+1}, получаем бесконечную последовательность попарно различных элементов, таких что $\rho(m_i, m_j) \geq \varepsilon$. Значит, из этой последовательности никак нельзя выделить фундаментальную подпоследовательность, и предположение о существовании ε со свойствами из определения вполне непрерывности неверно.

2) обратно:

Пусть M можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε для любого ε, пусть $x_1, x_2, .., x_n, ...$ последовательность элементов из M. Берем последовательность чисел $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > ..\varepsilon_n > ... > 0$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

Тогда M можно покрыть конечным числом шаров $B_{\varepsilon_1}(y_1), B_{\varepsilon_1}(y_2), .., B_{\varepsilon_1}(y_p)$, следовательно, в одном из этих шаров есть бесконечная подпоследовательность исходной последовательности: $\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}..\} \subseteq \{x_1, x_2..\}$. Аналогично с
ε_2: $B_{\varepsilon_2}(z_1), B_{\varepsilon_2}(z_2), ..$ покрывающие M, а потому существует
$\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}..\} \subseteq \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}..\} \subseteq \{x_1, x_2..\}$ и $\rho(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}) < \varepsilon_2 \quad \forall i, j$
Продолжая, получаем следующую таблицу:

$$x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ... \longleftrightarrow \varepsilon_1$$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ... \longleftrightarrow \varepsilon_2$$

$$................$$

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ... \longleftrightarrow \varepsilon_k$$

$$................$$

где каждая строка есть подмножество предыдущей.
Выбираем диагональную последовательность
$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, .., x_k^{(k)}, ... \rho(x_i^{(i)}, x_{i+m}^{(i+m)}) < \varepsilon_i \quad \forall m > 0,$
последовательность фундаментальна по построению.
Т.о. из исходной последовательности выделили фундаментальную подпоследовательность. □

Теорема 3:

Множество M - подмножество метрического пространства X, ρ компактно тогда и только тогда, когда из любого открытого покрытия M можно выделить конечное открытое покрытие.

Доказательство. 1) Пусть M компактно по определению, значит, из любой последовательности можем выделить сходящуюся подпоследовательность (а любая такая подпоследовательность фундаментальна), следовательно, M является вполне ограниченным.

Построим последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$. Берем ε_1 и покрываем M конечным числом шаров $B_{\varepsilon_1}(a_1^1) \cup B_{\varepsilon_1}(a_2^1) \cup .. \cup B_{\varepsilon_1}(a_{k_1}^1) \supseteq M$

Из Каждого шара берем по одному элементу, принадлежащему M : $\{m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, .., m_{k_1}^{(1)}\}$

Аналогично для ε_2 получаем конечное подмножество : $\{m_1^{(2)}, m_2^{(2)}, .., m_{k_2}^{(2)}\} \subseteq M$

Повторяем этот процесс построения для всех ε_l : $\{m_1^{(l)}, m_2^{(l)}, .., m_{k_l}^{(l)}\} \subseteq M$

Объединяя эти последовательности, получаем счётную последовательность $\Phi \equiv \{m_1^{(1)}, .., m_{k_1}^{(1)}, m_1^{(2)}, .., m_{k_2}^{(2)}, .., m_{k_l}^{(l)}\}$, которая тоже счётная. Она всюду плотная в $M \Rightarrow \overline{\Phi} \supseteq M \Rightarrow$ (M рассматриваем как самостоятельное метрическое пространство).M является сепарабельным и по теореме 1 линделёфовым.

Т.к. M линделёфово, то можно выделить счётное подпокрытие $O_{\alpha_1}, O_{\alpha_2}, .., O_{\alpha_n}, ...$ $\alpha_i \in I$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} O_{\alpha_i} \supseteq M$$

Начиная с $i = 1$ выкидываем O_{α_i}, если оно содержится в сумме предыдущих. Оставшиеся по-прежнему покрывают M. Предполагая, что эта процедура проделана, выбираем элементы

$$a_i \in O_{\alpha_i} - \bigcup_{j<i} O_{\alpha_j}, \quad a_i \in M$$

Не теряя общности и пользуясь условием исходным, будем считать, что сама последовательность $\{a_i\}$ сходиться к a, $\lim_{m\to\infty} a_m = a$. Для некоторого α_k $a \in O_{\alpha_k}$, но $a_j \notin O_{\alpha_k}$, если $\alpha_j > \alpha_k$.

С другой стороны, по определению предела в O_{α_k} содержатся все члены последовательности, начиная с какого-то номера. Получили противоречие. Значит, последовательность $a_1, a_2, .., a_m, ...$ не является бесконечной, последовательность $O_{\alpha_1,}, O_{\alpha_1}, .., O_{\alpha_n}, ...$ тоже конечная.

2) $M \subseteq X, \rho$ и для M выполняется условие: из всякого открытого покрытия M можно выделить конечное покрытие M.

Покажем, что M замкнутое множество:

Пусть $b \in M$-предельная точка множества $M, b \in \overline{M}$, множество $\{m_1, m_2, ..m_k, ..., b\} \equiv F$ замкнутое, т.к. содержит в себе все свои предельные точки; тогда множество $X - F = O$ открытое. Выберем открытые множества B_k, такие что $\forall k\ m_k \in B_k,\ m_i \notin B_k \forall i \neq k$

Тогда $B_1, B_2, .., B_k, .., O$ покрывают M. (По предположению из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $B_{i_1}, B_{i_2}, .., B_{i_m}, O$, покрывающее M. Поэтому последовательность $m_1, m_2, .., m_k, ..$ конечная, что противоречит построению, следовательно M содержит все свои предельные точки, M замкнуто.

Пусть теперь дана бесконечная последовательность из M: $a_1, a_2, .., a_n, .. \subseteq M$. Предположим, что из этой последовательности нельзя выделить никакую сходящуюся подпоследовательность к элементу из M. Множество $F = \{a_1, a_2, .., a_n, ..\}$ замкнутое, потому что содержит все свои предельные точки (иначе бы существовала подпоследовательность сходящаяся к предельной точке))

Берём открытое множество $X - F = O$ и откртые множества B_n

$a_n \in B_n, a_m \notin B_n \forall m \neq n$

$B_1, B_2, .., B_k, .., O$ покрывают M, а потому можно выделить конечное подпокрытие $B_{n_1} \bigcup B_{n_2} \bigcup .. \bigcup B_{n_k} \bigcup O \supseteq M$

Тогда элементов $a_1, a_2, .., a_n$ конечное число - опять противоречие, значит последовательность $a_1, a_2, .., a_n, ..$ имеет сходящуюся подпоследовательность. $\square$

Понятие малости в теории метрических пространств. Теорема Бэра о категориях.

Определение: *множество $M \subseteq X, \rho$ называется нигде не плотным, если дополнение к его замыканию всюду плотно, т.е.* $\overline{X - \overline{M}} = X$

Теорема 1:

Множество M нигде не плотно тогда и только тогда, когда в любом открытом множестве содержится шар ненулевого радиуса, не содержащий точек из M

Доказательство. Пусть M нигде не плотно по определению. Пусть O любое открытое множество, тогда множество $O \bigcap (X - \overline{M})$ тоже открыто (т.к. пересечение двух открытых множеств - множество открытое), не пусто (в O есть элемент из $X - \overline{M}$, либо в O есть предельная точка для $X - \overline{M}$, для последней O есть её окрестность, и потому в ней по-прежнему есть точка из $X - \overline{M}$). $\exists B_r(b) \subseteq O \bigcap (X - \overline{M}), r > 0 \Rightarrow B_r(b) \subseteq O$ и в $B_r(b)$ нет элементов из M.

Обратно:

Пусть в любом открытом множестве есть шар, не содержащий элементов из M. Пусть $a \in X$ и V_a произвольная окрестность точки a. $\Rightarrow \exists B_r(b) \subseteq V_a, r > 0, B_r(b) \bigcap M = \varnothing$

Тогда $B_r(b) \subseteq X - \overline{M} \Rightarrow V_a \bigcap X - \overline{M} \neq \varnothing \Rightarrow a \in \overline{X - \overline{M}} \Rightarrow \overline{X - \overline{M}} = X$. $\square$

Определение: *Множество $M \subseteq X, \rho$ называется множеством 1-й категории, если M есть счётная сумма нигде не плотных множеств*

Теорема 2:[Бэра о категориях]

Пусть X, ρ полное метрическое пространство, M множество 1-й категории в нём, тогда множество $X - M$ всюду плотно $\overline{X - M} = X$

Доказательство. Напомним, что метрическое пространство называется полным, если любая его фундаментальная последовательность имеет предел.

$M = M_1 \bigcup M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3 \bigcup ..,\ M_i$ нигде не плотны, $i = 1, 2...$

Берём любую точку $a \in X$, любой шар радиуса $r_0 > 0$: надо доказать, что в $B_{r_0}(a)$ есть элементы из $X - M$

Поскольку M_1 нигде не плотно, то по только что установленной теореме существует $B_{r_1}(a_1) \subseteq B_{r_0}(a),\ r_1 < r_0/2$, который не содержит элементов из M_1, т.е. $B_{r_1}(a_1) \bigcap M_1 = \varnothing$

Поскольку M_1 нигде не плотно $\Rightarrow$ существует шар
$B_{r_2}(a_2) \subseteq B_{r_1}(a_1),\ 0 < r_2 < r_1/2,\ B_{r_2} \bigcap M_2 = \varnothing$
и т.д. каждому M_n соответсвует шар $B_{r_n}(a_n)$, такой что
$B_{r_n}(a_n) \subseteq B_{r_{n-1}}(a_{n-1})\ 0 < r_n < r_{n-1}/2,\ B_{r_n}(a_n) \bigcap M_n = \varnothing$.
Т.о. построили систему вложенных шаров
$B_{r_0}(a) \supseteq B_{r_1}(a_1) \supseteq B_{r_2}(a_2) \supseteq ... \supseteq B_{r_n}(a_n) \supseteq ...$
$r_n \leq r_0/2^n,\ B_{r_n}(a_n) \bigcap M_n = \varnothing$

Мы можем считать, не теряя общности, множества $M_n,\ n = 1, 2...$ замкнутыми (т.к. M_i нигде не плотно, то и $\overline{M_i}$ нигде не плотно, и множество

$\widehat{M} = \overline{M_1} \bigcup \overline{M_2} \bigcup ...$ остается множеством 1-й категории. Если докажем, что $\overline{X - \widehat{M}} = X$, то отсюда следует и равенство $\overline{X - M} = X$.)

Для каждого B_{r_n} выбираем точку $a_n \in B_{r_n}$ Последовательность $a_0, a_1, .., a_n, ..$ фундаментальна, т.к.

$$\{a_n, a_{n+1}..\} \subseteq B_{r_n} \Rightarrow \rho(a_i, a_j) \leq 2r_n \to 0, \quad n \to \infty$$

Т.к. метрическое пространство полно, то последовательность $a_0, a_1, .., a_n, ..$ имеет предел

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = b.$$

Т.к. каждое множество M_n замкнуто, то

$$b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{r_n} \Rightarrow \forall n \; b \notin M_n \Rightarrow b \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

$$B_{r_n}(a) \ni b \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \; b \in X - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n,$$

Итак, точка а является предельной для

$$X - \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

Теорема доказана.

□

Список литературы

[1] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ М. "Наука". 1977г.

Лекция 8. Общие топологические пространства.

§1. Базовые понятия.

Многие теоремы теории метрических пространств могут быть доказаны только с использованием свойств открытых множеств, которые мы назвали фундаментальными. Этот факт подсказывает важность введения в рассмотрение пространств, в определении которых эти свойства заложены.

Определение 1. Общим топологическим пространством называется множество X, в котором выделено семейство подмножеств $\tau = \{Q_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где I — не пустое множество индексов со свойствами:

1. $\varnothing, X \in \tau$, здесь $\varnothing$, как везде в этой лекции, обозначает пустое множество;
2. $\bigcap_{i=1}^{k} O_{\alpha_i} \in \tau$, где при любом натуральном числе $k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I$;
3. $\bigcup_{\alpha \in M} O_\alpha \in \tau$, для любого множества $M \subseteq I$;

Определение 2. Множества, которые входят в τ, называется открытыми множествами, говорят также, что в X определенна топология τ.

Следующие определения даются по аналогии с теорией метрических пространств.

Определение 3. Замкнутым называется множество, которое является дополнением к открытому.

Определение 4. Окрестностью точки a называется любое множество, содержащее открытое подмножество, которому принадлежит a.

Аналогично, как и в метрических пространствах, в терминах окрестности и открытого множества определяются предельная точка, сходящаяся последовательность, компактность, непрерывность. Дадим, например, определение непрерывности в терминах открытых множеств. Пусть даны два топологических пространства X и Y, с топологиями τ и σ соответственно. Отображение φ пространства X в пространство Y называется непрерывным, если для любого $O \in \sigma$ множество $\varphi^{-1}(O) \in \tau$.

Пример. Топологическое доказательство бесконечности множества простых чисел.

Рассмотрим следующую топологию на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Положим для $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$,

$$N_{a,b} = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Каждое множество $N_{a,b}$ есть бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия. Назовем множество $O \subseteq \mathbb{Z}$ *открытым*, если O пусто или для каждого $a \in O$ существует такое $b > 0$, что $N_{a,b} \subseteq O$. (*Замкнутыми* называются множества $S \subseteq \mathbb{Z}$, дополнения $\mathbb{Z} \setminus S$ к которым являются открытыми, и только такие множества.) Ясно, что объединение открытых множеств является открытым. Если O_1, O_2 — открытые множества и $a \in O_1 \cap O_2$, причем $N_{a,b_1} \subseteq O_1$ и $N_{a,b_2} \subseteq O_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, то $a \in N_{a,b_1 b_2} \subseteq O_1 \cap O_2$. Поэтому конечное пересечение открытых множеств тоже открыто. Это семейство открытых множеств индуцирует топологию на $\mathbb{Z}$.

Теперь отметим два факта:

(A) Любое непустое открытое множество бесконечно.

(B) Любое множество $N_{a,b}$ является замкнутым.

В самом деле, (A) следует из определения. Далее заметим, что

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b},$$

значит $N_{a,b}$ замкнуто как дополнение к открытому множеству. До сих пор о простых числах мы не упоминали; теперь, наконец, они появляются. Так как любое число $n \neq 1, -1$ имеет некоторый простой делитель p и, следовательно, содержится в $N_{0,p}$, мы приходим к выводу, что

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$$

Если бы $\mathbb{P}$ было конечно то $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ было бы замкнуто как конечное объединение замкнутых согласно (B) множеств. Поэтому $\{1, -1\}$ как дополнение к замкнутому множеству было бы открытым, что противоречит (A).

Следует заметить, что не все результаты теории метрических пространств имеют место для общих топологических пространств. Так, в метрических пространствах, если точка x является предельной точкой для множества M, то существует последовательность принадлежащих M точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которая сходится к x:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x, x_n \in M$$

В топологических пространствах возможна иная ситуация: точка x может являться предельной для множества M, но ни одна последовательность из M к ней не сходится. Такая ситуация часто имеет место для так называемых слабых топологий в банаховых пространствах. Чтобы определить предельную точку через сходимость последовательностей элементов, надо обобщить понятие последовательности.

Определение 5. Система множеств $F = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}, A_\alpha \subseteq X$ называется фильтром, если выполнены следующие условия:

1) Ни одно множество A_α не пустое, то есть $A_\alpha \neq \varnothing$ для всех $\alpha \in I$;

2) Пересечение конечного числа множеств из F принадлежит множеству F: если $A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_k} \in F$, то $A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \cdots \cap A_{\alpha_k} \in F$;

3) Если $A_\alpha \in F$ и $B \supseteq A_\alpha$, то $B \in F$;

Дадим пример фильтра. Пусть a — точка топологического пространства X, $a \in X$. Тогда $F = \{V(a)\}$ — множество всех окрестностей точки a представляет собой фильтр.

Пусть даны два фильтра: $\Phi = \{B_\beta\}_{\beta \in J}, F = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$

Будем говорить, что фильтр Φ мажорирует фильтр F и обозначать это так: $\Phi \succ F$, если каждое множество A_α из F принадлежит также Φ: $A_\alpha \in F \implies A_\alpha \in \Phi$.

Определение 6. Фильтр F в топологическом пространстве X сходится к точке α, если F мажорирует фильтр окрестностей точки α.

Покажем, что в метрическом пространстве сходимость последовательности элементов эквивалентна сходимости определенного фильтра, построенного по последовательности.

Фильтр F для последовательности $\{x_n\}, n = 1, 2, \ldots$ строится следующим образом. Сначала образуются множества S_N, состоящие из всех членов последовательности с номерами большими N. Эта совокупность образует базис фильтра, то есть пересечение любого конечного числа множеств $S_{N_i}, i = 1, 2, \ldots, k$, не пусто. Искомый фильтр F, который называется фильтром сечений последовательности $\{x_n\}$, есть семейство множеств, каждое из которых содержит пересечение конечного числа множеств вида S_N, или равносильно — просто некоторое множество S_N.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x метрического пространства. Тогда, как следует из определения сходимости в метрическом пространстве, любой шар $B_\varepsilon(x)$ с центром в точке x и радиуса ε содержит множество $S_N = \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}$ для некоторого N. То есть $B_\varepsilon(x)$ принадлежит фильтру сечений, и последний, поэтому, мажорирует фильтр окрестности точки x.

Обратно, если фильтр сечений последовательности $\{x_n\}$ мажорирует фильтр окрестностей точки x, то окрестность вида $B_\varepsilon(x)$ содержит сечение вида $x_N, x_{N+1}, \ldots,$ то есть все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Таким образом, $x_1, x_2, \ldots$ сходится и в смысле старого определения.

Перейдем, наконец, к определению сходимости через семейство элементов. Пусть множество индексов I частично упорядочено отношением порядка $\leq$ и фильтруется вправо по этому порядку, то есть $\forall i_1, i_2 \in I\ \exists i_3 \in I : i_1 \leq i_3$ и $i_2 \leq i_3$. Множества $I_k = \{i \in I : i \geq k\}$ образуют, очевидно, базис фильтра.

Определение 7. Направленность в X, τ — это семейство элементов $\{x_i\}_{i \in I}$ где I частично упорядочено и фильтруется по отношению к порядку. Направленность $\{x_i\}$ сходится по определению к $x \in X$, если для всякой окрестности $V(x)$ точки x существует $k \in I$, что $x_i \in V(x)$, если $i \geq k$. Так определенная сходимость, легко видеть, равносильна сходимости по фильтру подмножеств F, порожденному базисными множествами $\Phi_k = \{x_i : i \geq k\}, k \in I$.

Для общих топологических пространств справедливо утверждение: a — передельная точка множества M тогда и только тогда, когда существует направленность из элементов M, отличных от a, сходящаяся к a. Для доказательства утверждения надо взять фильтр F окрестностей точки a в качестве множества индексов I. Отношение порядка $V^1(a) \geq V^2(a), V^1(a), V^2(a) \in F$ на множестве I равносильно включению $V^1(a) \subseteq V^2(a)$. Соответствующая направленность возникает, когда в каждом множестве $V(a) \cap M$ выбираем элемент $X_{V(a)}$.

§2. Аксиомы отделимости.

В топологических пространствах важную роль играет возможность отделить два множества друг от друга содержащими их открытыми непересекающимися множествами.

Определение 8. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости, и называется T_1-пространством, если для любых различных точек a и b из X существует окрестность V_a точки a, не содержащая b: $b \notin V_a$.

Определение 9. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет второй аксиоме отделимости, и называется T_2-пространством, или хаусдорфовым, или отделимым, если для любых двух различных точек a и b из X существует окрестность V_a точки a и окрестность V_b точки b, которые не пересекаются: $V_a \cap V_b = \varnothing$.

Определение 10. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет третьей аксиоме отделимости и называется T_3-пространством или регулярным, если для любой ее точки a и любого замкнутого множества F, не содержащего a, существует окрестность V_a точки a и окрестность V_F множества F, которые не пересекаются: $V_a \cap V_F = \varnothing$.

Окрестностью множества A называется любое множество V_A, содержащее открытое множество O, которое, в свою очередь, содержит: $A : V_A \supseteq O \supseteq A$.

Определение 11. Топологическое пространство X называется вполне регулярным тогда и только тогда, когда для каждой точки x и любой ее окрестности U существует непрерывная функция f на X со значениями в замкнутом интервале $[0; 1]$, равная нулю в точке x и единице на множестве $X - U$.

Определение 12. Топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет четвертой аксиоме отделимости, и называется T_4-пространством, или нормальным, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F и Φ из X существуют их непересекающиеся окрестности V_F и $V_\Phi : V_F \cap V_\Phi = \varnothing$.

Все метрические пространства нормальны.

В дальнейшем обсуждаются только хаусдорфовы пространства, и это не будет специально оговариваться. В частности, говоря о нормальных пространствах, мы предполагаем, что все точки являются замкнутыми множествами. Это равносильно выполнению T_2-аксиомы.

§3. Теорема компактности Тихонова.

Компактные множества играют большую роль в теории евклидовых пространств. Встает вопрос: насколько богато компактными множествами общее топологическое пространство? Оказывается, есть конструкция (играющая важную роль сама по себе в функциональном анализе), которая по имеющимся компактным пространствам позволяет построить новые компактные пространства. Эта конструкция называется произведением топологических пространств по Тихонову. Без подробного объяснения отметим, что для банаховых пространств конструкция произведения моделирует определение слабой топологии.

Пусть X — топологическое хаусдорфово пространство с топологией $\tau = \{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Определение 13. Система множеств $\{F_\beta\}_{\beta \in I}$ называется центрированной, если каждое конечное подмножество семейства имеет не пустое пересечение:

$$F_{\beta_1} \cap F_{\beta_2} \cap \cdots \cap F_{\beta_k} \neq \varnothing,$$

для любых натуральных k и индексов $\beta_1, \ldots \beta_k$ из I.

Лемма 1. *Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система замкнутых подмножеств пространства X имеет не пустое пересечение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X компактно, $\{F_\beta\}_{\beta \in I}$ центрировано, F_β — замкнутое для любого β множество. Предположим $\bigcap_{\beta \in I} F_\beta = \varnothing$.

Рассмотрим открытые множества $O_\beta = X - F_\beta$. Система $\{O_\beta\}$ открытых множеств покрывает X. Из определения компактности следует, что из системы можно выделить множества $O_{\gamma_1}, O_{\gamma_2}, \ldots, O_{\gamma_k}$ такие, что $\bigcup_{i=1}^k O_{\gamma_i} = X$. Откуда следует, что $\bigcap_{i=1}^k F_{\gamma_i} = \varnothing$. Возникшее противоречие опровергает предположение.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что если любая центрированная система замкнутых множеств пространства X имеет не пустое пересечение, то X компактно. Лемма доказана.

Пусть дано множество топологических пространств $X_i, i \in I$. Образуем новое множество, обозначаемое $X = \prod_{i \in I} X_i$, называемое декартовым произведением множеств $X_i, i \in I$. Элементами произведения являются функции φ, определенные на множестве индексов I и отображающих каждый индекс i в элемент множества $X_i : \varphi(i) \in X_i$. Других элементов X не содержит.

Если I линейно упорядочено (а часто I берется вполне упорядоченным), то φ удобно представлять строкой, где индексы с выбранным порядком на I представляют места, и где на месте, помеченном индексом i стоит элемент $\varphi(i)$ из X_i. Если фиксирован порядок индексов $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$, то произведение $\prod_{i \in I} X_i$ записывают также в виде:

$$X_{i_1} \times X_{i_2} \times \cdots \times X_{i_k} \times \cdots$$

К примеру, если $I = \{1, 2\}$, то $X_1 \times X_2$ представляется как множество функций φ таких, что $\varphi(1) = x_1 \in X_1, \varphi(2) = x_2 \in X_2$; таким образом, как множество упорядоченных пар $\{(x_1, x_2) : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$.

Определим топологию на X, если на каждом X_i определена топология τ_i.

Пусть α — любое конечное подмножество: $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \subseteq I, k$ — произвольно взятое натуральное число, индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — также берутся произвольно из I. Пусть для каждого α_i выбрано открытое множество $O_{\alpha_i} \in \tau_i$

Подмножеству α поставим в соответствие множество O^α представленное как следующее произведение:

$$\alpha \leftrightarrow O^\alpha = \prod_{i \in I} Y_i, \text{ где } Y_i = \begin{cases} X_i, \text{ если } \alpha \in A \\ O_{\alpha_i}, \text{ если } \alpha_i \in \alpha, O_{\alpha_i} \in \tau_i \end{cases}$$

Топологию τ, называемую тихоновской топологией произведения X, задают всевозможные объединения множеств O^α.

Теорема 1 (Тихонова). *Если каждое пространство X_i компактно, то и их произведение $X = \prod_{i \in I} X_i$ компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть топология τ_i определяется системой открытых множеств $\{O_k^{(i)}\}_{k \in B_i}$, и относительно топологии τ_i пространство X_i компактно. Мы положили, что базисное открытое множество в X есть $O^\alpha = O^\alpha_{\alpha_1} \times O^\alpha_{\alpha_2} \times \cdots \times O^\alpha_{\alpha_k} \times \cdots$, где $O^\alpha_{\alpha_k} \in \tau_k, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \alpha_k \in I$. В произведении на месте, помеченном индексом j, не входящим в набор α, стоит множителем соответствующее пространство X_j.

Открытыми множествами по определению тихоновской топологии являются всевозможные объединения множеств O^α. По определению замкнутое базисное множество $F^\alpha = X - O^\alpha$ есть дополнение к базисному открытому множеству O^α. Множество F^α, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, имеет следующее строение: $F^\alpha = (F^\alpha_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \cdots) \cup (X_{\alpha_1} \times F^\alpha_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \cdots) \cup \cdots \cup (X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times F^{(\alpha)}_{\alpha_n} \times \cdots)$, где каждое $F^\alpha_{\alpha_k} = X - O^\alpha_{\alpha_k}, k = 1, 2, \ldots, n$, а не выписанные сомножители в слагаемых совпадают с соответствующими пространствами.

Для краткой записи слагаемые в представлении F^α обозначим следующим образом:

$$F^\alpha = \Phi^\alpha_{\alpha_1} \cup \Phi^\alpha_{\alpha_2} \cup \cdots \cup \Phi^\alpha_{\alpha_n}, \text{ где}$$

$$\Phi^\alpha_{\alpha_1} = (F^\alpha_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \cdots), \ldots, \Phi^\alpha_{\alpha_n} = (X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times F^\alpha_{\alpha_n} \times \cdots)$$

Множества вида Φ_i^α назовем фундаментальными замкнутыми множествами.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если какая-то система базисных замкнутых множеств вида $\mathcal{F} = \{F^\alpha\}, \alpha \in J$ центрирована, то вся система имеет не пустое пересечение. Каждый символ α обозначает конечный мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in I$. Набор мультииндексов α из $\mathcal{F}$ есть J.

Возьмем конкретное множество F^α из $\mathcal{F}$ и вместо него оставим в системе $\hat{\mathcal{F}}$ фундаментальное замкнутое множество из его представления $\Phi_{\alpha_1}^\alpha = (F_{\alpha_1}^\alpha \times \cdots)$, где не выписанные сомножители совпадают с соответствующими пространствами. Если теперь условие центрированности для $\mathcal{F}$ нарушается, то это означает, что будет центрированной система $\mathcal{F}$, в которой у F^α оставлены все слагаемые кроме $\Phi_{\alpha_1}^\alpha$. В этом случае, удаляя, переходим к рассмотрению $\Phi_{\alpha_2}^\alpha$ и проводим для него такие же рассуждения, как и для $\Phi_{\alpha_1}^\alpha$. Если же условие центрированности выполняется, то заменим в $\mathcal{F}$ множество F^α на $\Phi_{\alpha_1}^\alpha$ и переходим к следующему множеству из $\mathcal{F}$. В любом случае в конце концов вместо F^α после выполнения вышеописанных операций остается одно слагаемое вида $\Phi_{\alpha_k}^\alpha$. Аналогичные рассуждения проводим с каждым множеством, входящим в $\mathcal{F}$ (вполне упорядочивая $\mathcal{F}$ и применяя условие индуктивности). В итоге получаем центрированную систему множеств вида: $\Phi_{\alpha_i}^\alpha = (F_{\alpha_1}^\alpha \times \cdots)$, где α пробегает исходное множество мультииндексов J, а α_i при фиксированном α есть индекс из I, входящий в α. Напомним, что $X_{\alpha_i} - F_{\alpha_i}^\alpha \in \tau_{\alpha_i}$, и по построению система замкнутых множеств $\{F_{\alpha_i}^\alpha\}_{\alpha \in J}$, отвечающих фиксированному α_i, центрирована в X_{α_i}.

Пусть y_{α_i} принадлежит пересечению этих множеств. Функция, которая ставит в соответствие α_i элемент y_{α_i} входит в каждое F^α.

§4. Несколько сведений о линейно упорядоченных множествах.

Определение. Пусть даны два линейно упорядоченных множества M и N. Они называются изоморфными или порядково подобными, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : M \to N$, сохраняющее порядок:

$$m_1, m_2 \in M \;\&\; m_1 \leq m_2 \implies \varphi(m_1) \leq \varphi(m_2)$$

Разобьем всю совокупность линейно упорядоченных множеств на непересекающиеся классы, собирая в один класс все порядково подобные между собой множества. Каждому классу поставим в соответствие свой символ, который назовем *порядковым типом* этого класса. Так, порядковый тип рациональных чисел обозначается в литературе η, порядковый тип вещественных чисел — λ, порядковый тип натуральных чисел — ω.

Определение. Линейно упорядоченное множество, которое не имеет наименьшего и наибольшего элементов, называется неограниченным.

Определение. Линейно упорядоченное множество называется плотным, если в нём нет соседних элементов, то есть если $x < y \implies \exists z : x < z < y$.

Множества λ, η — неограниченные и плотные. Множество ω ограничено снизу и не является плотным.

Теорема 1. *Если A — счётное линейно упорядоченное множество, B — неограниченное плотное множество, тогда существует подмножество $C \subseteq B$, которое порядково подобно A: $C \sim A$.*

Все счётные неограниченные плотные множества порядково подобны между собой и, следовательно, имеют тип η.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Расположим элементы A в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

   В качестве b_1 выбираем произвольный элемент из B. В качестве b_2 берем любой элемент из B, который по порядку относится к b_1 так же, как a_2 к a_1 в исходном порядке A.

   Предположим, что мы выбрали $b_1, b_2, \ldots, b_n$, которые соотносятся по порядку так же, как $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то есть отношение $b_i \leftrightarrow a_i$ сохраняет порядок. Выбираем элемент b_{n+1}, который по порядку относится к $b_1, b_2, \ldots, b_n$ так же, как a_{n+1} к $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Продолжая это построение, мы получаем счётное подмножество $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ множества B, которое изоморфно A.

2. Пусть множества A и B — счётные, неограниченные и плотные множества. Поскольку они счётные, то их можно представить последовательностями:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

   Строим изоморфизм следующим образом:

   Шаг 1: Берём элемент a_1 из A и ставим ему в соответствие любой элемент из B, например, b_1:

$$a_1 \to b_1$$

   Шаг 2: Выбираем из B элемент с наименьшим номером, который ещё не участвовал в соответствии. В данном случае это b_2. Ему ставим в соответствие элемент из A, который относится по порядку к a_1 так же, как b_2 к b_1:

$$b_2 \to a_2$$

   Продолжаем этот процесс.

   На нечетном шаге $2i + 1$ выбираем элемент из A с наименьшим номером, который ещё не поставлен в соответствие. Для него выбираем элемент из B, который относится к уже выбранным элементам из B так же, как элемент из A, взятый на этом шаге, к предыдущим элементам из A. В силу неограниченности плотности A в исходном порядке это возможно.

   На четном шаге $2i + 2$ поступаем наоборот: выбираем сперва элемент из B, не участвовавший в соответствии и т. д.

   Продолжая эту процедуру, мы исчерпаем множества A и B и установим взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее порядок. Теорема доказана.

§5. Теорема Урысона о продолжении функций, заданных на замкнутых подмножествах нормального топологического пространства.

Лемма. *Пусть даны нормальное топологическое пространство (X, τ), замкнутое множество $F \subseteq X$ и открытое множество U, содержащее F. Тогда существует* *открытое множество* Γ*, замыкание* $\overline{\Gamma}$ *которого содержится в* U*:*

$$F \subseteq \Gamma \subseteq \overline{\Gamma} \subseteq U$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $\Phi = X - U$ замкнуто и не пересекается с F. По аксиоме T_4 существуют открытые множества $\Gamma \supseteq F$ и $W \supseteq \Phi$ такие, что они не пересекаются:

$$\Gamma \cap W = \varnothing$$

Ни одна точка W не является предельной для Γ, и поэтому

$$\overline{\Gamma} \cap W = \Theta \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что $\overline{\Gamma}$ содержится в дополнении к W, в множестве $X - W \subseteq X - \Phi = U$. Лемма доказана.

Лемму можно интерпретировать следующим образом. Если дана пара (F, U), состоящая из замкнутого множества F, содержащегося в открытом множестве U, то она обладает «порождающей силой» — приводит к двум аналогичным парам (F, Γ) и $(\overline{\Gamma}, U)$, последние, в свою очередь, порождают соответствующие пары и т. д.

Рассмотрим совокупность E всех открытых множеств I, получаемых в описанном процессе, ($U \notin E$). Множество E линейно упорядоченно по включению. По построению оно не обладает ни первым, ни последним элементом, то есть неограниченно, а также плотно. Согласно ранее доказанному E изоморфно по порядку множеству рациональных чисел из интервала $(0, 1)$.

Этот изоморфизм позволяет обозначить множества, входящие в E, через Γ_γ, где γ — рациональное число из $(0, 1)$. При этом

$$\gamma_1 < \gamma_2 \implies \Gamma_{\gamma_1} \subseteq \overline{\Gamma}_{\gamma_1} \subseteq \Gamma_{\gamma_2} \tag{2}$$

Если обозначим X как Γ_1, то условие (2) будет иметь место для $\forall \gamma \in (0, 1]$.

Определим функцию $f(x)$ на X следующим образом:

$$f(x) = \inf \{\gamma : \gamma \in (0, 1], x \in \Gamma_\gamma\}$$

Рассмотрим следующую окрестность точки $f(x)$ для положительных малых чисел ε:

$$D = (f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon),$$

предполагая, что $0 < f(x) < 1$. Пусть $f(y) \in D$. Существуют рациональные числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ такие, что

$$f(x) - \varepsilon < \gamma_1 < \gamma_2 < f(y) < \gamma_3 < f(x) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $y \notin \Gamma_{\gamma_2} \supseteq \Gamma_{\gamma_1}$, а потому

$$y \in \Gamma_{\gamma_3} - \overline{\Gamma}_{\gamma_1}, \tag{3}$$

где последнее множество открыто. Обратно, легко видеть, что из условия (3) следует $f(y) \in D$.

Таким образом, $f^{-1}(D)$ как сумма открытых множеств является открытым множеством, а потому по определению функция f непрерывна в рассматриваемой точке x.

Непрерывность f в точке x, в которой $f(x) = 1$, устанавливается аналогичными рассуждениями, если вместо интервала D взять интервал $(f(x) - \varepsilon, 1]$.

В итоге доказана следующая

Теорема (Урысона). *Пусть F и Φ — два замкнутых множества в нормальном топологическом пространстве X, которые не пересекаются. Существует непрерывная функция $f(x)$, отображающая X на интервал [0,1], такая, что $f(x) = 0$, если $x \in F$, и $f(x) = 1$, если $x \in \Phi$.*

§6. Отображение вычисления и теорема Урысона о метризуемости.

Насколько класс общих топологических пространств «шире» класса метрических? Оказывается, что во всех нормальных пространствах со счётной базой можно определить метрику, которая индуцирует ту же топологию, что и исходная (теорема Урысона). Итак, если общее топологическое пространство не метризуемо, то оно либо не нормально, либо не обладает счётной базой. Отметим, что все бесконечномерные банаховы пространства, снабженные слабой топологией, не метризуемые. В доказательстве второй теоремы Урысона важную роль играет так называемое отображение вычисления, к обсуждению которого мы сейчас переходим.

Пусть F — множество отображений X в другие топологические пространства, $F = \{f_\alpha(x)\}_{\alpha \in I}, f_\alpha : X \to Y_{f_\alpha}$. Приняв F за индексное множество, рассмотрим произведение $\prod_{f \in F} Y_f$

Определение. Отображением вычисления e называется отображение $X \to \prod_{f \in F} Y_f$, определяемым правилом: $[e(x)](f) = f(x)$, или, иначе (в строчной записи): $e(x) = (\dots, f(x), \dots, g(x), \dots), [e(x)]_f = f(x)$.

Пример.

$F = \{f_1, f_2\}, f_1 : X \to Y_1, f_2 : X \to Y_2, e(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in Y_1 \times Y_2$.

Пусть X, Y — топологические пространства, напомним, что отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным, если прообраз открытого множества из Y есть открытое множество из X.

Если $O \in \tau(Y)$, то $f^{-1}(O) \in \tau(X)$, $f^{-1}(O) = \{x : f(x) \in O\}$.

Определение. Пусть дана система $F = \{f(x)\}$ непрерывных функций, где каждая функция f является отображением X в топологическое пространство Y_f. Говорят, что система F разделяет точки, если для произвольных $x, y \in X$, где $x \neq y$, найдется функция $f \in F$ такая, что $f(x) \neq f(y)$; говорят, что система F разделяет точки и замкнутые множества, если для любого замкнутого множества $A \subseteq X$ и любой точки $x \in X \setminus A$ найдется функция $f \in F$ такая, что $f(x) \notin f(A)$, то есть $f(x)$ не является предельной точкой для $f(A)$.

Лемма. *Пусть F — семейство функций, произвольный элемент f которого есть непрерывное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y_f. Тогда:*

a) отображение вычисления $e(x)$ является непрерывным отображением $X \to \prod_{f \in F} Y_f$;

b) если F разделяет точки и замкнутые множества, то $e(x)$ является открытым отображением X в открытое множество из $e(X)$;

c) отображение вычисления $e(x)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда семейство F разделяет точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

a) Возьмем базисное открытое множество O в $Y \to \prod_{f \in F} Y_f$, оно имеет вид:

$$O = \cdots \times O_{f_1} \times O_{f_2} \times \cdots \times O_{f_n} \times \cdots$$

$$O_{f_1} \in \tau(Y_{f_1}), O_{f_2} \in \tau(Y_{f_2}), \ldots, O_{f_n} \in \tau(Y_{f_n})$$

Не выписанные сомножители совпадают с соответствующими пространствами Y_f. Достаточно усмотреть, что прообраз $e^{-1}(O) = f_1^{-1}(O_{f_1}) \cap f_2^{-1}(O_{f_2}) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(O_{f_n})$, и если каждое f_k непрерывно, то $e^{-1}(O)$ — открытое множество как пересечение конечного числа открытых множеств.

b) Пусть $x \in U \subseteq X$, U — открытое множество, тогда множество $X - U$ — замкнутое множество. Поскольку F разделяет точку и замкнутое множество, найдется $f \in F : f(x) \notin f(X-U)$. Найдется, следовательно, окрестность $V(f(x))$ точки $f(x)$ в Y_f, которая не пересекается с $f(X-U)$. Это означает, что $e(U)$ содержит множество $M = (\cdots \times V(y_f) \times \cdots) \cap e(X)$, которое по определению является базисным открытым множеством в пространстве $e(X)$. Не выписанные сомножители в представлении M совпадают с соответствующими пространствами. Следовательно, с каждой точкой $e(x)$, где $x \in U$, множество $e(U)$ содержит и некоторую окрестность этой точки, то есть является открытым.

c) Доказывается аналогично.

Следствие 1. *Если для семейства F выполняются условия пунктов b) и c) леммы, то пространство X гомеоморфно подпространству $e(X)$ пространства Y, то есть отображение вычисления e осуществляет взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное отображение X на $e(X)$.*

Рассмотрим последовательность метрических пространств $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, в которых определены метрики $\rho_n(x, y)$, $n = 1, 2, \ldots$

Пусть диаметр X_n не больше единицы: $diam X_n = \sup\{\rho(x, y)\} \leq 1$.

Напомним, что топология τ_n в метрическом пространстве определяется множествами, которые наряду с любой своей точкой x содержат некоторый шар $B_\gamma(x)$ с центром в этой точке: $B_\gamma(x) = \{y : \rho(x, y) < \gamma\}, \gamma > 0$.

Рассмотрим декартово произведение $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ и определим топологию $\tau(X)$ — топологию произведения, и одновременно определим метрику равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n), \tag{4}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$. Легко проверить, что ряд, определяющий ρ, сходится, и что формула (4) действительно определяет метрику.

Лемма. *Пусть $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — последовательность метрических пространств, $diam X_n = \sup\{\rho(x, y)\} \leq 1$. В декартовом произведении этих пространств определим метрику по форме (4). Тогда топология, определяемая этой метрикой, совпадает с топологией произведения $\tau(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Фиксируем точку $x \in X$ и её окрестность $V = B_{2^{-p}}(x) = \{y : \rho(x,y) \leq 2^{-p}\}$, p — положительное целое число, $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$. В X_1 возьмем окрестность точки x_1: $B_{2^{-p-3}}(x_1)$. В X_2 возьмем окрестность точки x_2: $B_{2^{-p-4}}(x_2)$. Рассмотрим базисные открытые множества вида:

$$O = B_{2^{-p-3}}(x_1) \times \dots \times B_{2^{-2p-4}}(x_{p+2}) \times X_{p+3} \times X_{p+4} \times \cdots$$

Докажем, что $O \subseteq V$. Пусть $y \in O$, оценим $\rho(x,y)$:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{p+2} + \sum_{i=p+3}^{\infty} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{p+3}} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^{p+4}} + \dots + \frac{1}{2^{p+2}} \cdot \frac{1}{2^{2p+4}} + \sum_{i=p+3}^{\infty} \leq$$

$$\leq \frac{1}{3 \cdot 2^{p+2}} + \sum_{i=p+3}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{3 \cdot 2^{p+2}} + \frac{1}{2^{p+2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2^{p+2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^p}$$

То есть $\rho(x,y) < \dfrac{1}{2^p} \implies O \subseteq V$.

Следовательно, каждое открытое множество, определяемое метрикой, является открытым множеством в топологии произведения.

2. Докажем обратное утверждение. Возьмем $U(x)$ — открытое базисное множество из топологии произведения, содержащее точку x: $U = \dots \times X_i \times \dots \times O_j \times \dots \times X_k \times \cdots$

O_j открыто в X_j, является окрестностью x_j. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$ принадлежит U, и $\exists B_\xi(x_j) \subseteq O_j, \xi > 0$.

Определим окрестность V точки x в метрическом пространстве: $V \equiv B_{\xi/2^j}(x)$; тогда если $y \in V$, то $y \in U$, ибо:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \rho_n(x_n, y_n) < \frac{\xi}{2^j} \implies \frac{1}{2^j} \rho_j(x_j, y_j) \leq \frac{\xi}{2^j} \sim \rho_j(x_j, y_j) < \xi,$$

то есть $y \in B_\xi(x_j)$.

Следовательно, каждое открытое множество в топологии произведения является открытым множеством, определяемым метрикой.

Теорема (Урысона о метризации). *Регулярное T_1-пространство X со счётной базой метризуемо, то есть можно определить такую метрику на X, которая даст исходную топологию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем отрезок $[0,1] \equiv I$, рассмотрим его как топологическое пространство с обычной топологией; образуем произведение: $Q = \prod_{n=1}^{\infty} I = I^\infty$, $Q = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)\}$, $x_i \in [0,1]$.

Возьмем для X счётный набор открытых множеств: $\{V_i\}, i = 1, 2, \dots$ такой, что любое открытое множество в X есть объединение множеств из этого набора (напоминаем, что такой набор называется базой). Регулярное пространство со счётной базой нормально. Для доказательства этого смотри [23]. Читатель может предполагать, что нормальность X есть условие теоремы.

Легко построить новую последовательность пар открытых множеств:

$$(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n), \dots,$$

где U_i, V_i — открытые множества и $\overline{U}_i \subseteq V_i$, при этом для любой точки a и содержащего её открытого множества O существует пара (U_n, V_n) со свойствами: $a \in \overline{U}_n \subseteq V_n \subseteq O$.

Далее построим последовательность функций $f_1(x), \dots, f_n(x), \dots,$ где $f_i(x)$ отображает X в I и непрерывно, при этом:

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, x \in U_i \\ 1, x \in X - V_i \end{cases}$$

Такие функции существуют по предыдущей теореме из §5.

Построим отображение вычисления e для этой последовательности функций, e: $(f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$, $x \in X$, $e(x) \in Q$. Отображение разделяет точки и замкнутые множества. Действительно, пусть $a \in X$, F — замкнутое множество, $a \notin F$, множество $X - F = O$ — открытое множество. Поскольку пространство нормально, то по второй лемме найдётся другое открытое множество O_1 со свойствами: $\overline{O}_1 \subseteq O$, $a \in O_1$. Также, найдется такое i, что $a \in \overline{U}_i \subseteq V_i \subseteq O_1$. По построению:

$$f_1(a) = 0, f_i(x) = 1, x \in F.$$

Разделяющее свойство доказано. Согласно первому следствию третьей леммы образ X при отображении вычисления $e(x)$ можно отождствить с самим X. По лемме о произведении метрических пространств Q метризуемо. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Р. Энгелькинг. Общая топология. М. „Мир“. 1986г.

[2] Дж. Л. Келли. Общая топология. М. „Наука“. 1981г.

Лекция 9. Концепция физической величины в математике.

Тензорное представление физических величин.

Физическая величина — это физические явления, которые устойчиво повторяются и достаточно полно характеризуются числовыми характеристиками

Пример. Сила — это определенный класс взаимодействий физических тел (силовое, тепловое взаимодействие).

Труссдел: "Мы не знаем что такое сила, но мы знаем, что с ней можно делать".

Объяснить явление — значит включить его в более широкий класс явлений.
При геометрическом представлении силы $\vec{a}$ сила представляется с помощью вектора — направленного отрезка, $\left|\vec{a}\right|$ — величина силы, длина этого отрезка. Недостатком приведенного математического описания силы является недостаточная определенность, присущая всякому интуитивному представлению. Для более точного определения в пространстве вводится система прямоугольных декартовых координат (СК).

Вектор характеризуется своими координатами в этой системе.

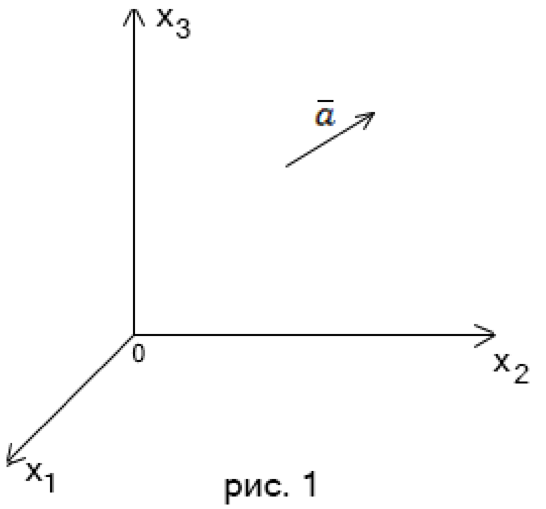


рис. 1

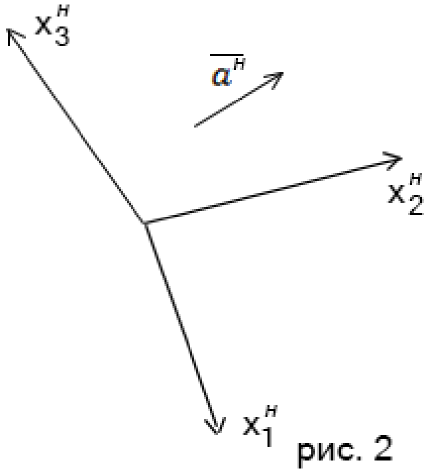


рис. 2

Вектор в системе рис.1 имеет координаты $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Для другой системы координат (рис.2) получаем $\vec{a^н} = (a_1^н, a_2^н, a_3^н)$, т.е. представление числами силы относительно, числа-координаты зависят от выбора системы координат.

Но сила — это взаимодействие между телами, и она по сущности никак не зависит от выбора системы координат. И чтобы преодолеть неопределенность выбора, рассмотрим сразу все СК и соответствующие им координаты вектора $\vec{a}$. Всю эту актуальную бесконечность представляет закон, связывающими координаты $\vec{a}$ в двух системах: исходной $x = (x_1, x_2, x_3)$ и новой $x^н = (x_1^н, x_2^н, x_3^н)$.

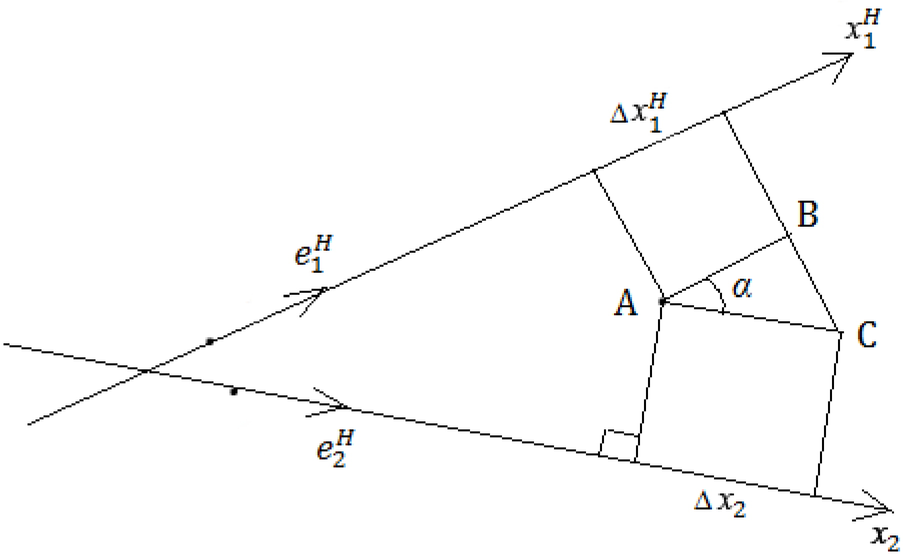
$$a_i^н = \sum_{i=1}^{3} a_k \frac{\partial x_i^н}{\partial x_k}, \text{ где } i = 1,2,3, \tag{4}$$

а индексом "*н*" отмечаются величины в новой системе координат.

Закон есть инвариантно независимая характеристика изменений (при переходе от одной СК к другой).

Определение. Пусть в каждой мыслимой СК указана тройка чисел a_1, a_2, a_3 таким образом, что при переходе от СК X к СК $X^{\text{н}}$ (новой) координаты меняются по формуле (1), тогда будем говорить, что это **бесконечное множество троек определяет вектор.** Важно, что можно задать только закон (1) и координаты в одной априори фиксированной системе, актуальная бесконечность всех систем переходит в потенциальную.

Ценность любого определения заключается в возможностях его „обобщения". С целью вникнуть в суть $\partial x_i^{\text{н}}/\partial x_k$ в определении 1, рассмотрим следующий рисунок. Пусть координата x_2 точки A изменилась на Δx_2 при сохранении остальных координат, A переходит в точку C. Изменение координаты $x_1^{\text{н}}$ составит $\Delta x_1^{\text{н}}$.



$$\frac{\partial x_1^{\text{н}}}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to \infty} \frac{AB}{AC} = \cos\alpha = \cos\left(x_1^{\text{н}}, x_2\right) = \left(e_2 \cdot e_2^{\text{н}}\right)$$

Исследуя этот вывод, получаем следующую формулу:

$$\boxed{\frac{\partial x_k}{\partial x_i^{\text{н}}} = \frac{\partial x_i^{\text{н}}}{\partial x_k}} \text{ — для декартовых систем координат.}$$

Анализируя определение, замечаем, что под координатами a_1, a_2, a_3 можно понимать элементы любого Линейного Пространства (ЛП).

ЛП — это множество элементов, в котором определены операции $(x + y)$ и (λx), где $x, y \in E$, а λ — число, обладающие следующими свойствами:

Свойства сложения (ЛП есть абелева группа):

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. $\forall x \; \exists \; 0 : x + 0 = x$
4. $\forall x \; \exists \; y : x + y = 0$

Свойства умножения на число:

1. $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
2. $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)\,x$ и $(\lambda+\mu)\,x=\lambda x+\mu x$
3. $1x=x$; $0x=0$

Определение. Если в каждой СК указана упорядоченная тройка элементов линейного пространства a_1, a_2, a_3, которая при переходе от одной СК к другой меняется по закону (1), то **все эти тройки образуют обобщенный вектор.**

Пример обобщенного вектора.

Пусть $C^\infty = \{\varphi\,(x_1,\ldots,x_n)\}$ — множество бесконечно дифференцируемых функций. Рассмотрим векторное пространство линейных операторов $L: C^\infty \longrightarrow C^\infty$.

В любой СК $x=(x_1,\ldots,x_n)$ в E_n указываем следующие n линейных операторов

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=\nabla$$

где $\frac{\partial}{\partial x_i}$ есть оператор: $\varphi \longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Покажем, что оператор ∇ — является обобщенным вектором. Пусть выбрана другая система координат.

$$x_n^{н}=(x_1^{н},x_2^{н},\ldots,x_n^{н})\longrightarrow\left(\frac{\partial}{\partial x_1^{н}},\frac{\partial}{\partial x_2^{н}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n^{н}}\right)$$

Физическая величина φ (скажем, температура) задана в системе x, в системе $x^{н}$ представлена так: $\varphi=\varphi\left(x_1\left(x_1^{н},\ldots,x_n^{н}\right),\ldots,x_n\left(x_1^{н},\ldots,x_n^{н}\right)\right)$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x_1^{н}}\varphi\,(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_1^{н}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1^{н}}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_1^{н}}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_1^{н}}\right)\varphi$$

Таким образом, правило дифференцирования сложной функции приводит к формуле

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i^{н}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_k}{\partial x_i^{н}}\frac{\partial}{\partial x_k}} \tag{5}$$

Следовательно, ∇ есть обобщенный вектор в линейном пространстве.

Рассмотрим случай, когда в каждой СК пространства E_3 в качестве a_1, a_2, a_3 будем брать сами векторы трехмерного пространства E_3, так что:

$\vec{a_1}=(a_{11},a_{12},a_{13})$,
$\vec{a_2}=(a_{21},a_{22},a_{23})$,
$\vec{a_3}=(a_{31},a_{32},a_{33})$.

Определение. Пусть для каждой СК указана упорядоченная тройка векторов таким образом, что при переходе от одной СК к другой она меняется по закону (1), тогда соответствующий обобщенный вектор называется афинным ортогональным тензором 2-го ранга(АОТ).

Если дан АОТ $A = \{(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})\}$, то для каждого СК X ставим в соответствии матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } i \text{ - строку занимают координаты вектора } \vec{a_i}.$$

При переходе к новой СК $x^н$ получаем матрицу $A^н = (a^н_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$. Имеем

$$\vec{a^н_i} = \sum_{k=1}^{3} \vec{a_k} \frac{\partial x_k}{\partial x^н_i} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} a_{kl} \vec{e_l} \frac{\partial x_k}{\partial x^н_i}$$

Пусть $e^н_i$ - орты соответствующих осей СК $X^н$, тогда
$e^н_j = (cos(x^н_j, x_1), cos(x^н_j, x_2), cos(x^н_j, x_3)) = \left(\frac{\partial x^н_j}{\partial x_1}, \frac{\partial x^н_j}{\partial x_2}, \frac{\partial x^н_j}{\partial x_3}\right)$, $a^н_{ij} = \vec{a^н_i} \cdot e^н_j$, $e_l \cdot e^н_j = \frac{\partial x_l}{\partial x^н_j}$.

Таким образом

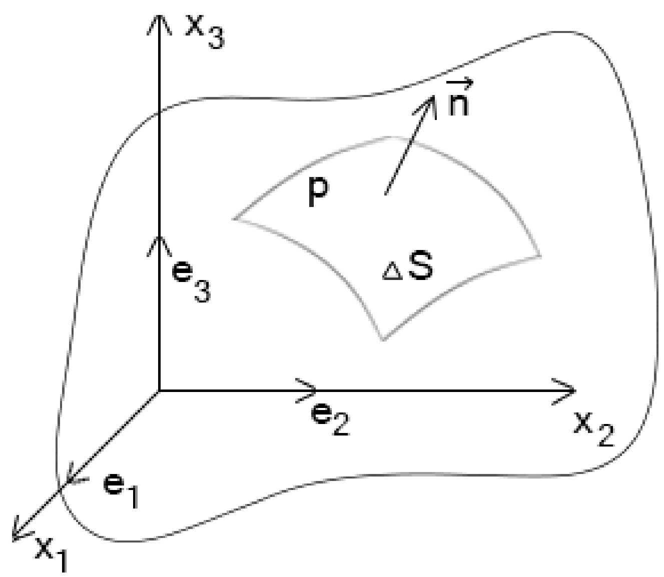
$$\boxed{a^н_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} a_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial x^н_i} \frac{\partial x_l}{\partial x^н_j}} \tag{3}$$

Обратное тоже верно:

Если в любой СК указана матрица , элементы которой при переходе от одной СК к другой меняются по правилу (3), то эта матрица определяет АОТ, обобщенными координатами которого являются строчки этой матрицы .

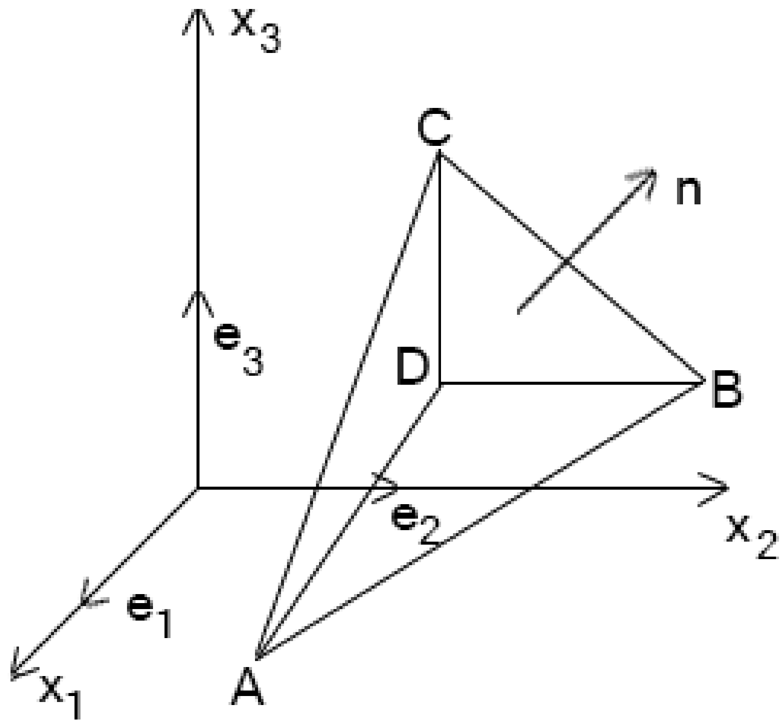
Примеры тензоров.

1) **Тензор напряжения Коши**



Пусть в пространстве имеется сплошная среда. Рассмотрим площадку ΔS, окружающую точку P и ориентированную выбором единичной нормали n. Со стороны частиц сплошной среды, которые расположены с той стороны площадки, куда направлен вектор $\vec{n}$, действует сила $\vec{F}$, плотность которой $\vec{p_n}\ (x) = \lim\limits_{\Delta S \to\ 0} \frac{\vec{F}}{\Delta S} \equiv p_n(P)$, при $x \equiv P$. В каждой точке сплошной среды получаем 3 вектора: $(\vec{p_1}\ (x), \vec{p_2}\ (x), \vec{p_3}\ (x))$, где $\vec{p_i}\ (x) = \vec{p_{e_i}}\ (x)$, где e_i выбирается как нормаль p_i - плотность силы, действующей на единицу площади площадки S, перепендикулярный орте e_i.

Покажем, что эта тройка векторов образует вектор. Выберем "кусок"сплошной среды в виде тетраэдера $DABC$, ребра DA, DC, DB которых параллельны осям x_1, x_2, x_3, а грань ABC имеет внешнюю нормаль нормаль $n = (n_1, n_2, n_3)$.



Выпишем все действующие на $DABC$ силы и приравняем их сумму нулю - условие равновесия.

На грань ABC со стороны оставшихся вне пирамиды частиц среды действует сила $p_n \cdot S$, на грань ADC – (-$p_2 S_2$); на грань DCB – (-$p_1 S_1$); на грань ADB – (-$p_3 S_3$).

Пусть массовая плотность внешних сил - $f(x)$, тогда: $f(x)\rho(x)dx$, сила, действующая на массу dm = $\rho(x)dx$, заполняющую элементарный объем dx. На него же действует сила инерции $p(x)dx\frac{d\vec{v}}{dt}$ (если среда находится в движении со скоростями $\vec{V}\ (x,t)$ в точках x)

Итак, условие равновесия принимает вид

$$\vec{p_n}\ S - \sum_{i=1}^{3} \vec{p_i}\ S_i + \rho(x) f(x) V - \rho(x) \frac{d\ \vec{v}}{dt} V = 0, \tag{4}$$

где V - объем пирамиды $ABCD$, который предполагается малым и стягивается к точке D.

Поделим (4) на S и перейдем к пределу, когда $A, B, C, \to D$,

$$\vec{p_n}(P) - \sum_{i=1}^{3} \vec{p_i}(P)\frac{S_i}{S} + f(P)\rho(P)\lim_{S\to 0}\frac{V}{S} - \rho(P)\vec{a}(P)\lim_{S\to 0}\frac{V}{S} = 0$$

Здесь $\frac{S_i}{S} = cos(\widehat{e_i, n}) = n_i$, поскольку S_i - проекция S. Таким образом, получаем:

$$\boxed{\vec{p_n}(P) = \sum_{i=1}^{3} \vec{p_i}(P) n_i} \tag{5}$$

Перейдем от СК $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ к новой СК $(\vec{e_1}^{\,н}, \vec{e_2}^{\,н}, \vec{e_3}^{\,н})$. Примем в формуле (5) $\vec{e_k}^{\,н} \equiv \vec{n}$, тогда

$$\vec{p_k}^{\,н}(P) = \sum_{i=1}^{3} \vec{p_i}(P) cos(\widehat{\vec{e_k}^{\,н}, \vec{e_i}}) \text{ но, } cos(\widehat{\vec{e_k}^{\,н}, \vec{e_i}}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_k^н} \equiv \frac{\partial x_k^н}{\partial x_i},$$

таким образом, $\boxed{\vec{p_k}^{\,н}(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \vec{p_i}(P) \frac{\partial x_k^н}{\partial x_i}(P)}$

Мы видим, что тройки $(\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3})$ образуют тензор (напряжений Коши).

В любой СК тензор напряжений Коши ставит в соответствии единичному вектору $\vec{n}$ по формуле (5) вектор $\vec{p_n}$.

Теорема. Любой тензор определяет некоторый оператор в базисном векторном пространстве. Обратно: любой линейный оператор в векторном пространстве можно рассматривать как тензор.

Доказательство:

1) Рассмотрим как базисное пространство E_3, $A = \left(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\right)$, где $\vec{a_i} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix}$, т.е. мы перешли к записи $\vec{a_i}$ как вектор - столбца.

Таким образом $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, а в новой координатной системе:

$$\boxed{a_{ij}^н = \sum_{k,i=1}^{3} a_{ki} \frac{\partial x_k}{\partial x_i^н} \frac{\partial x_i}{\partial x_j^н}}$$

Определим оператор в E_3 формулой: вектору $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ поставим в соответствие вектор $\vec{c} = b_1\ \vec{a_2} + b_2\ \vec{a_2} + b_3\ \vec{a_3}$. Проверим, что значение $\vec{c}$ оператора не зависит от выбора координатной системы, представляющей $\vec{b}$.

Для другой системы координат: $\vec{b} = (b_1^н, b_2^н, b_3^н)$ и $A = \left(\vec{a}_1^н, \vec{a}_2^н, \vec{a}_3^н\right)$

$$\vec{b} \longrightarrow \sum_{i=1}^{3} b_i^н a_i^н = \sum_{k,i,j=1}^{3} b_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i^н}\,\vec{a}_k\,\frac{\partial x_i^н}{\partial x_k} = \sum_{k,j=1}^{3} b_j\,\vec{a}_k \left(\underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x_i^н}\frac{\partial x_i^н}{\partial x_k}}_{\frac{\partial x_j}{\partial x_k}=\delta_{jk}} \right) = \sum_{k=1}^{3} b_k\,\vec{a}_k = \vec{c},$$

т.е. получаем тот же самый вектор $\vec{c}$ в независимости от системы координат.

2) Обратно:

Пусть дан оператор $A : E_3 \longrightarrow E_3$. Фиксируем в E_3 некоторый базис $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ и рассмотрим вектора $\left(A\,\vec{e}_1, A\,\vec{e}_2, A\,\vec{e}_3\right)$. В любой СК возникает $\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right)$, где $\vec{a}_i = A\,\vec{e}_i$.

Убедимся, что эта тройка векторов образует тензор. Перейдем к новой СК:

$$\left(\vec{e}_1^н, \vec{e}_2^н, \vec{e}_3^н\right) \longrightarrow \left(A\,\vec{e}_1^н, A\,\vec{e}_2^н, A\,\vec{e}_3^н\right)$$

$$A\,\vec{e}_1^н = A\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} A\,\vec{e}_i, \text{ где } \vec{e}_1^н = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}\,\vec{e}_i,\ a_{i1} = \vec{e}_1^н \vec{e}_i = \cos\left(x_i, x_1^н\right).$$

$$A\,\vec{e}_1^н = \sum_{i=1}^{3} \cos\left(x_1^н, x_i\right) A e_i = \sum_{i=1} a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_1^н} = \vec{a}_1^н$$, что нам и требовалось доказать.

Сравним матрицу оператора A и матрицу тензора $A = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right)$.

$A\,\vec{e}_k = \vec{a}_k$, так как в матрице оператора в k - ом столбце записываются координаты вектора Ae_k, то матрица тензора совпадает с матрицей оператора. Имеем следующее тройственное представление тензора:

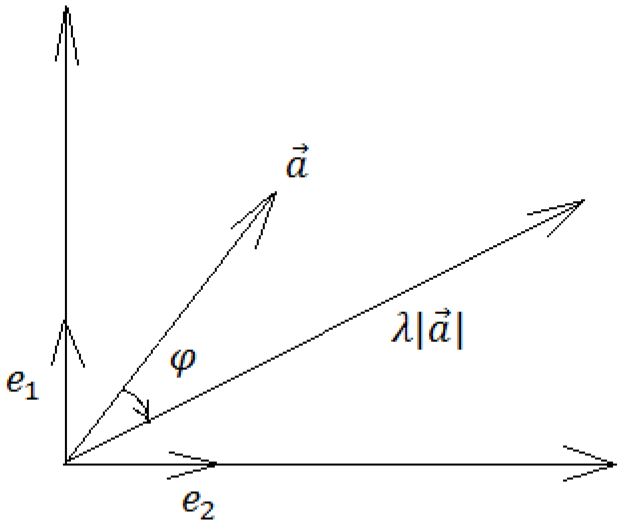
$$\begin{array}{ccc} A - \textit{тензор} & \longleftrightarrow & A - \textit{оператор} \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & A - \textit{матрица в каждой системе} & \end{array}$$

Пример 2. Комплексные числа.

Пусть C — множество комплексных чисел; E_2 — евклидово двумерное пространство. Рассмотрим в нем следующий оператор A: каждый вектор $\vec{a}$ поворачивается на угол φ по часовой стрелке, а длина $\left|\vec{a}\right|$ растягивается в λ раз, где $\lambda > 0$.

По доказанной теореме этому оператору соответствует некоторый тензор. Выясним, что это за тензор.

Зафиксируем СК. Пусть $\vec{a} = (x_1, x_2)$, тогда



$A\left(\vec{a}\right) = \left(\lambda\left(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\right), \lambda\left(-x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi\right)\right)$

Составим матрицу оператора A, для этого применим последовательно оператор к (1,0), а затем к (0,1):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda\cos\varphi & \lambda\sin\varphi \\ -\lambda\sin\varphi & \lambda\cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \lambda\cos\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нашему оператору соответствует следующее представление:

$\lambda\left(\cos\varphi\ I + \sin\varphi\ J\right)$, где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$

Любое комплексное число имеет вид $\lambda\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, где $i = \sqrt{-1}$. Сравнивая представления, оператора и комплексного числа, делаем заключение: множество операторов изоморфно множеству комплексных чисел (сумма переходит в сумму, а умножение переходит в умножение).

ВЫВОД: Множество C комплексных чисел мы можем рассматривать как множество тензоров второго ранга.

Общее определение тензора.

§1. Рассмотрим более общий случай. Сплошная среда Ω определяется набором параметров $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \equiv \alpha, \alpha \in D_m$ (область евклидова пространства E_m). Сами частицы сплошной среды Ω занимают точки евклидова пространства $E_n : E_n \in \Omega, n \geq m$. Координаты точек являются естественными функциями от параметров $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$:

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_1(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \end{array} \quad (1)$$

Декартова система x фиксирована. Функции (1) предполагаются непрерывно дифференцируемыми, т.е. класса $C^1(D)$.

Примерами криволинейных координат в E_3 служат сферические координаты r, θ, φ :

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$x_2 = r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$x_3 = r\cos\theta,$$

$$0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta < \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

цилиндрические координаты r, φ, z :

$$x_1 = rcos\varphi,$$
$$x_2 = r\sin\varphi,$$
$$x_3 = z$$

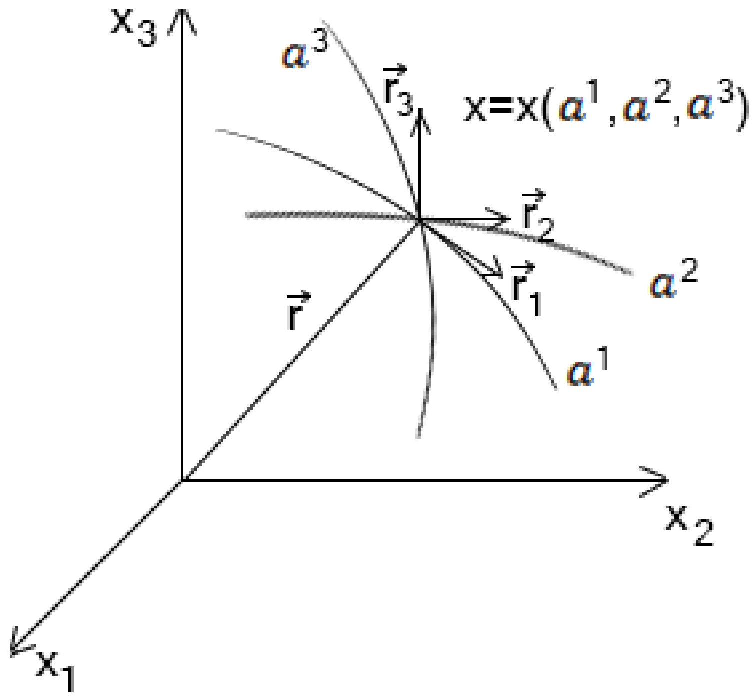
$$0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty$$

В этих примерах $m = n = 3$. Если $m = n-1$, то получаем гиперповерхность в E_n. Так поверхность в E_3 определяется уравнениями: $x_1 = x_1(\alpha^1, \alpha^2), x_2 = x_2(\alpha^1, \alpha^2), x_3 = x_3(\alpha^1, \alpha^2), \alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in D$.

Если $m = 1$, в E_n получаем кривую $x_i = x_i(\alpha),\ i = 1...n,\ \alpha \in [a, b]$.

В общем случае функция $x = x(\alpha)$ определяет многообразие размерности m в пространстве E_n.

§2. Рассмотрим подробнее случай $m = n = 3$.



Пусть $\vec{r} = \vec{r}\ (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ - радиус вектор точки области, уторая характеризуется тремя криволинейными координатами $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$. Возникают функции $x_i = x_i(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ и $\alpha^i = \alpha^i(x_1, x_2, x_3),\ i = 1, 2, 3$.

Введем вектора $\vec{r_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^1}, r_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^2}, r_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^3}$. По определению частной производной r_1, r_2, r_3 - касательные к кривым, на которых у точки меняется соответственно только

α^1, α^2, или α^3. Зададим следующую тройку чисел (a^1, a^2, a^3) для вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, заданного декартовыми координатами a_1, a_2, a_3:

$$a^i_н = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_k}, i = 1, 2, 3.$$

По этой тройке чисел построим вектор:

$$\sum_{k=1}^{3} a^i_н \vec{r_i} . \tag{1}$$

Определим тройку чисел:

$$a^н_i = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^i},$$

Этой тройке чисел поставим в соответствие вектор:

$$\sum_{k=1}^{3} a_i \vec{r^i}, \tag{2}$$

где $\vec{r^i}$ определяется равенствами $\vec{r^i} \cdot \vec{r_j} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Тройка векторов $\{\vec{r^i}\}$ называется базисом, взаимным базису $\{\vec{r_j}\}$. При переходе к криволиенйным координатам следующие величины в общем не равны:

$$\frac{\partial \alpha^1}{\partial x_k} \neq \frac{\partial x^k}{\partial \alpha^1}$$

Докажем, что векторы (1) и (2) совпадают с вектором $\vec{a}$. Проверим равенство:

$$\sum_i a^i_н \vec{r_i} = \vec{a}$$

$$\sum_i a^н_i \vec{r_i} = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} \vec{r_i} = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i} = \sum_{i,j,k} a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} \vec{e_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i} =$$
$$= \sum_{j,k} \vec{e_k} \sum_i a_j \frac{\partial \alpha^i}{\partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha^i} = \sum_{j,k} \vec{e_k}\, a_j \frac{\partial x_k}{\partial x_j}$$

Здесь $\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_k j$, поэтому из всей суммы по j останется тольо одно слагаемое при $k = j$. Получим:

$$\sum_i a^i_н \vec{r_i} = \sum a_k \vec{e_k} = \vec{a}$$

Аналогично доказывается, что вектор $\vec{a}$ совпадает с (2):

$$\sum_{k=1}^{3} a^н_i \vec{r^i} = \vec{a} .$$

$$\sum_i a_i^н \vec{r^i} = \sum_{i,j} a_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha_i} \vec{r^i} = \sum_{i,j,k} a_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha^i} \vec{e_k} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} = \sum_{j,k} \vec{e_k} \sum_i a_j \frac{\partial x^j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} = \sum_{j,k} \vec{e_k}\, a_j \frac{\partial x^j}{\partial x^k}$$

Здесь $\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \delta_k j$, поэтому из всей суммы по j останется только одно слагаемое при $k = j$. Получим:

$$\sum_i a_i^н \vec{r^i} = \sum a_k \vec{e_k} = \vec{a}\ .$$

Таким образом, имеем:

$$\vec{a} = \sum a_н^i \vec{r_i} = \sum a_i^н \vec{r^i}\ . \tag{3}$$

Определение. Числа $\{a_н^i\}$ называются контравариантными компонентами вектора $\vec{a}$, числа $\{a_i^н\}$ называются ковариантными компонентами вектора $\vec{a}$.

Итак, при переходе к криволинейной системе координат есть два представления вектора $\vec{a}$: в виде (1), который называется контравариантным вектором, и в виде (2), который называется ковариантным вектором.

Легко проверяется, что при переходе от системы координат $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ к другой криволинейной системе координат $(\beta^1, \beta^2, \beta^3)$, контравариантные компоненты меняются по закону:

$$a^i = \sum_{k=1}^{3} a^k \frac{\partial \beta^i}{\partial \alpha^k}, \tag{4}$$

а ковариантные компоненты меняются по закону:

$$a_i = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial \alpha^k}{\partial \beta^i} \tag{5}$$

Пользуясь рассмотренным подробно случаем представлении вектора $\vec{a}$ в криволинейной системе координат в E_3, введем следующие определения:

Определение. Пусть для любой криволинейной СК $(\alpha^1, ..., \alpha^m)$, определенной на многообразии Ω, указаны функции $A_1(\alpha)$ ... $A_m(\alpha)$, на Ω. При переходе от одной криволинейной СК к другой эти функции меняются по правилу $A_k{}^н = \sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_k{}^н}$, тогда будем говорить, что совокупность функций $A_1(\alpha)$ ... $A_m(\alpha)$ образует **ковариантный вектор.**

Замечание: индексы координат ковариантных векторов всегда пишутся внизу.

Определение. Если в каждой криволинейной СК на многообразии Ω указаны m функций $A^1(\alpha)$ ... $A^m(\alpha)$ т.о., что при переходе к новой СК $\alpha^н$ они меняются по закону $A_н{}^k = \sum_{i=1}^m A^i \frac{\partial \alpha_k{}^н}{\partial \alpha_i}$, то они образуют **контравариантный вектор.**

В общем случае

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_k{}^н} \neq \frac{\partial \alpha_k{}^н}{\partial \alpha_i},$$

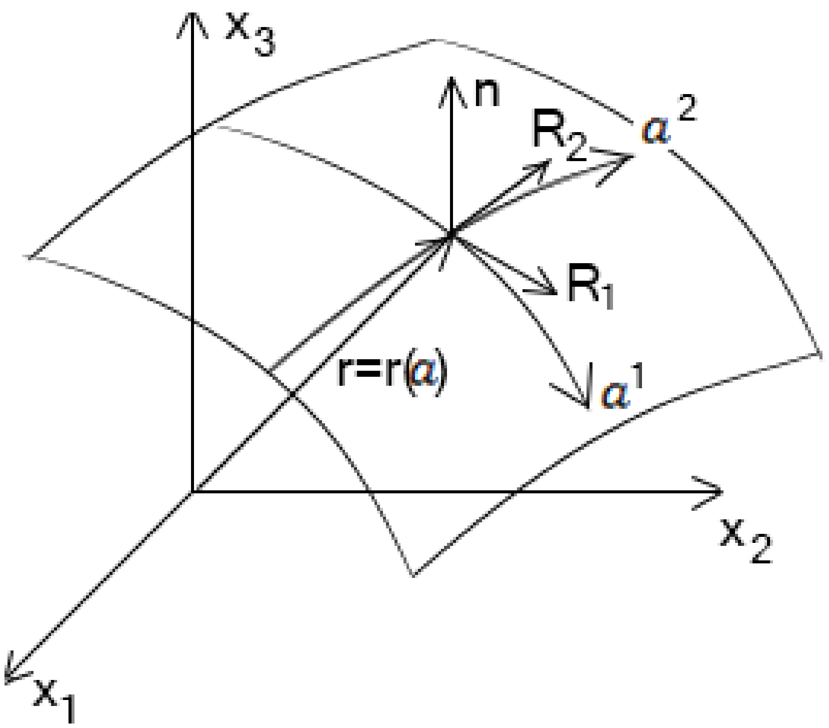
но для декартовой СК контравариантные и ковариантные координаты вектора совпадают.

Определение. Пусть в криволинейной СК $(\alpha^1, ..., \alpha^m)$, укзаны m^2 функций $A_{ij}(\alpha)$ т.о., что при переходе от одной СК к другой они меняются по закону $A^{н}{}_{ij}(\alpha^{н}) = \sum_{p,q=1}^{m} A_{pq}(\alpha) \frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha_i{}^{н}} \frac{\partial \alpha^q}{\partial \alpha_j{}^{н}}$, то будем говорить, эти функции определяют **ковариантный тензор второго ранга.**

Определение. Пусть в криволинейной СК определены m^2 функций $A_{ij}(\alpha),\ i, j = 1..m$ на многообразии Ω и при переходе от одной СК к другой они меняются по закону $A_{н}{}^{ij} = \sum_{p,q=1}^{m} A^{pq} \frac{\partial \alpha^i{}_{н}}{\partial \alpha^p} \frac{\partial \alpha^j{}_{н}}{\partial \alpha^q}$, то будем говорить, эти функции определяют **контравариантный тензор второго ранга.**

Аналогично определяется тензор любого ранга. Например, тензор третьего ранга определяется m^3 функциями $\{A_{ijk}(\alpha)\}$ и соответствующим правилом преобразования.

Пример. 1) $S \subseteq E_3$ - поверхность: $\vec{r} = \vec{r}\ (\alpha) \equiv \vec{r}\ (\alpha^1, \alpha^2)$, $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in D$



Точки, у которых меняется только α^2 или только α^1 образуют координатные линии α^2 и α^1 на S. Рассмотрим $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^2}$ - касательные к координатным линиям α^i. Пусть $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^1} \equiv \vec{R}_1$; $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^2} \equiv \vec{R}_2$.

Поставим в соответствие каждой точке $\alpha \in D$ матрицу $(g_{ij}) = (R_i \cdot R_j),\ i, j = \{1, 2\}$

Покажем, что $g \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$ — ковариантный тензор. Действительно

$$g^{н}_{ij} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i_{н}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j_{н}} = \sum_{p,q} \frac{\partial\ \vec{r}}{\partial \alpha^p} \frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha^i_{н}} \frac{\partial\ \vec{r}}{\partial \alpha^q} \frac{\partial \alpha^q}{\partial \alpha^j_{н}} = \sum_{p,q} \frac{\partial \alpha^p}{\partial \alpha^i_{н}} \frac{\partial \alpha^q}{\partial \alpha^j_{н}} g_{pq},$$

g — является ковариантным тензором, который называется ***метрическим тензором поверхности.***

В общем случае пусть задано многообразие $\Omega \subseteq E_m$ криволинейной системой координат $(\alpha^1, \dots \alpha^n)$. Положение каждой частицы в E_m определяется радиус-вектором $\vec{r} = \vec{r}\ \ (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$. Вновь строим матрицу $g = \left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$, где $g\ = \vec{r}_{\alpha^i} \vec{r}_{\alpha^j}$, матрица определяет тензор, который является ковариантным и называется ***фундаментальным метрическим тензором многообразия*** Ω.

Вернемся к рассмотрению Евклидового пространства E_3 и поверхности S. В каждой точке S рассматривается нормаль $\vec{n}$ единичной длины: $\left|\vec{n}\right| = 1$, $\vec{n} \perp S$. Определяем функции $(b_{ij}(\alpha))$ следующим образом: $b_{ij} = \vec{n}_i\ r_j$, где $\vec{n}_i = \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^i}, \vec{r}_j = \frac{\partial \vec{n}}{\partial \alpha^j}$.

Матрица $(b_{ij}) \equiv h$ также является тензором, который называется ***тензором второй квадратичной формы поверхности.***

Система функций $(c_{ij}(\alpha))$, где $c_{ij}\ = \vec{n}_i \vec{n}_j \equiv\ \gamma_{ij}$ определяет тензор — ***тензор третьей квадратичной формы поверхности.***

Тензоры g, h, γ определяют поверхность с точностью до положения в пространстве.

Гаусс доказал, что между ними имеет место следующее соотношение:

$$\gamma_{ij} - 2Hh_{ij} + Kg_{ij} = 0,$$

где H — средняя кривизна поверхности, равная $\frac{k_1+k_2}{2}$,

K — полная кривизна поверхности, равная $k_1 \cdot k_2$,

где k_1, k_2 — главные кривизны координатных линий α^1 и α^2 соответственно.

---

§ 3. Операция поднятия и опускания индекса тензора.

Рассмотрим контравариантный вектор $(A^1 \dots A^n)$. Покажем, что функции

$$A_i = \sum_{k=1}^{n} A^k g_{ik} \equiv A^k g_{ik} \tag{1}$$

образуют ковариантный вектор. Для последнего выражения принято соглашение — знак Σ опускать, подразумевая, что по повторяющемуся индексу, который встречается и вверху, и внизу, проводится суммирование.

Операция, определяемая формулой (1), называется **операцией опускания индекса** у вектора A.

Если дан тензор второго ранга $\{A^{ij}\}$, то операция опускания индекса определяется следующим образом:

$$A_{i\cdot}^{\cdot j} = A^{kj} g_{ki},$$

где по j вектор ведет себя как контравариантный тензор; по i — как ковариантный тензор.

При замене переменных эти компоненты тензора преобразуются по закону:

$$\left(A_{i\cdot}^{\cdot j}\right) = \sum_{p,q=1}^{n} A_{q\cdot}^{\cdot p} \frac{\partial \alpha^q}{\partial \alpha^i_{н}} \frac{\partial \alpha^j_{н}}{\partial \alpha^p}$$

и задают смешанный тензор второго ранга.

Можно опустить оба индекса и получить ковариантные компоненты:

$$A_{ij} = A^{kl} g_{ki} g_{lj}.$$

Рассмотрим более подробно (1).

$$\begin{cases} A^1 g_{11} + A^2 g_{12} + \ldots + A^n g_{1n} = A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^1 g_{n1} + A^2 g_{n2} + \ldots + A^n g_{nn} = A_n \end{cases}$$

Пользуясь этой системой равенств, мы можем выразить $(A^1, A^2, \ldots, A^n)$ через $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$:

$$A^k = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & A_1 & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & A_n & \ldots & g_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} A_i g^{ik} \Rightarrow \boxed{A^k \ = \ A_i g^{ik}}$$

где Δ — определитель системы, а g^{ik} есть алгебраическое дополнение к g_{ik}, деленное на Δ.

Доказывается, что g^{ik} — тензор с контра вариантными компонентами.

Если опустим индексы у тензора $\left\{g^{ik}\right\}$, то получим фундаментальный метрический тензор:

$$(g^{ik} g_{i\alpha}) g_{k\beta} \ = \ \delta^k_\alpha g_{k\beta} \ = \ g_{\alpha\beta}.$$

§ 4. Рассмотрим контравариантный тензор $A = (a^{ij})$, $i, j = 1, 2, 3$. Поставим ему в соответствие формальное выражение $\sum\limits_{i,j} a^{ij} \vec{R_i} \vec{R_j}$. Операции сложения и умножения на число над подобными формальными выражениями определим естественным образом. Покажем, что $\sum\limits_{i,j} a^{ij} \vec{R_i} \ \vec{R_j}$ — инвариантно относительно преобразований СК, от СК $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ перейдем к новой СК $(\alpha^{1н}, \alpha^{2н}, \alpha^{3н})$. Поскольку $\left(\vec{R_1}, \vec{R_2}, \vec{R_3}\right)$ образуют обобщенный ковариантный вектор, то

$$\sum_{i,j} a^{ij} \vec{R_i} \vec{R_j} = \sum_{i,j} \sum_{p,q} a_н^{p,q} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha_н^p} \frac{\partial \alpha^j}{\partial \alpha_н^q} \left(\sum_m R_m^н \frac{\partial \alpha_н^m}{\alpha^i} \right) \left(\sum_n R_n^н \frac{\partial \alpha_н^n}{\partial \alpha^j} \right) =$$
$$= \sum_m \sum_n R_m^н R_n^н \sum_{i,j,p,q} a_н^{p,q} \underbrace{\left(\frac{\partial \alpha_н^m}{\partial \alpha^i} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \alpha^p} \right)}_{= \frac{\partial \alpha_н^m}{\partial \alpha^p} = \delta_{mp}} \left(\frac{\partial \alpha_н^n}{\partial \alpha^j} \frac{\partial \alpha^j}{\partial \alpha_н^q} \right) = \sum_{p,q} a_н^{p,q} R_p^н R_q^н$$

В силу инвариантности формального выражения тензор A определяет оператор в том пространстве, в которое вложено многообразие Ω: если $\vec{b} \in \ E_3$, тогда $\vec{b} \longrightarrow \ \sum\limits_{i,j} a^{ij} \vec{R_i} \left(\vec{R_j} \vec{b}\right)$ — рассмотренная выше инвариантность означает, что данное определение корректно, т.е. не зависит от СК. Изложенные выше рассуждения можно провести относительно общего тензора $(a^{i_1 i_2 \ldots i_k})$, заданного как многообразие Ω k— ой размерности. Инвариантном будет формальное выражение $a^{i_1 i_2 \ldots i_k} \ R_{i1} R_{i2} \ldots R_{ik}$.

Рассмотрим многообразие размерности 2 — поверхность в E_3, где уравнение поверхности S есть $\vec{r} = \vec{r} \ (\alpha^1, \alpha^2)$, $(\alpha^1, \alpha^2) \in D$.

Пусть $R_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}$, $i = 1, 2$, $R_i \cdot R_j = g_{ij}$, если $\vec{a} = a^1 R_1 + a^2 R_2$, то пара (a^1, a^2) образует контравариантный вектор и если $\vec{a} = a_1 R^1 + a_2 R^2$, $R^i \cdot R^j = g^{ij}$, то пара (a_1, a_2) образует ковариантный вектор на поверхности S, при условии, что $\sum\limits_i a^i R_i$ и $\sum\limits_i a_i R^i$ есть инвариантные формальные выражения.

Пусть дан тензор $g_{ij} = (R_i \cdot R_j)$, ему соотносится формальное выражение $\sum\limits_{i,j} g_{ij} R^i R^j$. В общем случае, если некоторое множество Ω параметризовано параметрами $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ и находится в E_m, то определено n^2 функций $\left\{g_{ij}\right\}_{i,j=\overline{1,n}} = \{R_i \cdot R_j\}$ так, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j} g_{ij}(\alpha) d\alpha^i d\alpha^j \geq 0$.

Эта форма определяет расстояние в E_m между точками многообразия $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ и $(\alpha^1 + d\alpha^1, \ldots, \alpha^n + d\alpha^n)$ по формуле:

$$\rho\,(\alpha, \alpha + d\alpha) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} d\alpha^i d\alpha^j.$$

Определение. Многообразие Ω с определенным таким образом расстоянием между двумя соседними бесконечно близкими точками называется **Римановым пространством с метрикой $\boldsymbol{g} = \left\{\boldsymbol{g}_{ij}\right\}$.**

Если в Римановом пространстве дана кривая L, соединяющая точки $P, Q \in \Omega$, $L \subseteq \Omega$, то ее длина $|L| = \int\limits_L \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\alpha) d\alpha^i d\alpha^j$.

§ 5. Пусть $E_n \supseteq \Omega$, и многообразие Ω определяется параметрами $(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^m) = \alpha$.

Рассмотрим на Ω фундаментальный метрический тензор $\left(g_{ij}\right) = \left(\vec{r}_i \vec{r}_j\right)$, а также систему чисел:

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{il}}{\partial \alpha^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial \alpha^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \alpha^l}\right\} \tag{2}$$

где $i, j, l \in \{1, \ldots, m\}$. Эту систему чисел мы назовем **символами Кристоффеля I рода**, и определяются они вторыми производными от радиус- вектора r, характеризующего положение в E_n точки многообразия $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^m)$: $\Gamma_{l,ij} = \vec{r}_l \vec{r}_{ij}$, где $\vec{r}_l = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^l}$, $\vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^i \partial \alpha^j}$.

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha^j}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^l}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha^i}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^l}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha^l}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^j}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^j \partial \alpha^i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^l} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial \alpha^l \partial \alpha^j} + \vec{r}_{ij}\vec{r}_l + \vec{r}_j \vec{r}_{li} - \vec{r}_{il}\vec{r}_j - \vec{r}_i \vec{r}_{jl}\right\} = \vec{r}_{ij}\vec{r}_l,$$

т.е. (1) выполняется.

Числа вида $\Gamma^l_{ij} = \mathrm{g}^{lk}\Gamma_{k,ij}$ будем называть **символами Кристоффеля II рода.**

$\Gamma^l_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{g}^{lk}\Gamma_{k,ij}$, $\Gamma^l_{ij} = \vec{r^l} \cdot \vec{r}_{ij}$, где $\vec{r^l} = \mathrm{g}^{lk}\ \vec{r}_k$. Напомним, что, например, $\vec{r^l} \cdot \vec{r}_l = 1$, а с остальными $\vec{r^l} \cdot \vec{r}_i = 0$, $i \neq l$.

Важность символов Кристоффеля в том, что через них можно выразить вторые производные $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^l_{ij}\,\vec{r}_l \tag{3}$$

Умножим скалярно на $\vec{r^p}$, тогда $\vec{r}_{ij}\vec{r^p} = \sum\limits_l \Gamma^l_{ij}\left(\vec{r}_l\vec{r^p}\right)$, равенство $\Gamma^p_{ij} = \vec{r^p}\vec{r}_{ij}$ — верно.

Перейдем к другой СК: $\alpha \longrightarrow \alpha^н$.

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial\alpha^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial\alpha^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial\alpha^l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha^i}\sum_{p,q}\left(g^н_{pq}\frac{\partial\alpha^p_н}{\partial\alpha^l}\frac{\partial\alpha^q_н}{\partial\alpha^j}\right) + \ldots\right),$$

$g^н_{pq} = g^н_{pq}\left(\alpha^1_н, \ldots, \alpha^m_н\right)$

$$\Gamma_{l,ij} = \sum_{p,q,r=1}^m \Gamma^н_{p,qr}\frac{\partial\alpha^p_н}{\partial\alpha^l}\frac{\partial\alpha^q_н}{\partial\alpha^i}\frac{\partial^r_н}{\partial\alpha^j} + \sum_{p,q=1}^m \frac{\partial\alpha^p_н}{\partial\alpha^l}\frac{\partial^2\alpha^q_н}{\partial\alpha^i\partial\alpha^j}\cdot g^н_{pq}$$

Таким образом, система чисел Кристоффеля не является тензором. Возникает вопрос: каким образом их нужно “подправить”, чтобы получить тензоры?

Рассмотрим $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^m a^i\,\vec{r}_i$.

$$\frac{\partial\,\vec{a}}{\partial\alpha^j} = \sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^j}\,\vec{r}_i + a^i\frac{\partial\,\vec{r}_i}{\partial\alpha^j}\right) = \sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^j}\,\vec{r}_i + a^i\,\vec{r}_{ij}\right) = \sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial a^i}{\partial\alpha^j}\,\vec{r}_i + a^i\Gamma^l_{ij}\,\vec{r}_l\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial a^l}{\partial\alpha^j} + \sum_i a^i\Gamma^l_{ij}\right)\vec{r}_l\,.$$

$$\text{То есть } \frac{\partial}{\partial\alpha^j}\left(\sum_i a^i\,\vec{r}_i\right) = \sum_{l=1}^m\left(\frac{\partial a^l}{\partial\alpha^j} + \sum_{i=1}^m a^i\Gamma^l_{ij}\right)\vec{r}_l\,. \tag{4}$$

$\dfrac{\partial a^l}{\partial\alpha^j} + a^i\Gamma^l_{ij} = \nabla_j a^l$ — ковариантная производная от a^l (по определению).

Система m^2 функций $\{\nabla_j a^i\}$ образуют тензор, как следует из равенства (4), которое можно переписать так:

$$\boxed{\frac{\partial\,\vec{a}}{\partial\alpha^j} = \sum_{l=1}^m\left(\nabla_j a^l\right)\vec{r}_l}$$

Другая важная особенность символов Кристофеля в том, что через них явно выражаются производные от тензора.

Пусть $A = \left(a^{lk}\right)$ — контравариантный тензор, и

$A = \sum\limits_{l,k=1}^m \vec{a^{lk}}\vec{r}_l\vec{r}_k$ — инвариантное формальное выражение тензора.

Легко доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^j}A = \sum_{l,k=1}^m \nabla_j\,\vec{a^{lk}}\vec{r}_l\vec{r}_k,\ \text{где } \nabla_j a^{lk} = \frac{\partial a^{lk}}{\partial\alpha^j} + \sum_p \Gamma^k_{jp}a^{lp} + \sum_q \Gamma^l_{jq}a^{qk}.$$

Отметим, что ковариантная производная от ковариантных компонент вектора берется по формуле:

$$\nabla_j a_l = \frac{\partial a_l}{\partial \alpha^j} - a_i \mathit{\Gamma}^i_{jl} \qquad (\text{по } i \text{ суммируется!})$$

В общей теории относительности физическое пространство считается четырехмерным Римановым пространством. Фундаментальную роль в теории этого пространства играет тензор Римана- Кристоффеля

$$R_{i\nu\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{i\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{i\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^i \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^i \partial x^\mu}\right\} - g^{\rho\sigma}\mathit{\Gamma}_{\sigma,\lambda i}\mathit{\Gamma}_{\rho,\mu\nu} + g^{\rho\sigma}\mathit{\Gamma}_{\sigma,\lambda\nu}\mathit{\Gamma}_{\rho,\mu i}$$

и производный от него тензор Риччи

$$R_{\nu\lambda} = g^{i\mu} R_{i\nu\lambda\mu}.$$

Напоминаем, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Основное уравнение общей теории относительности получено Д. Гильбертом.

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\Pi G}{c^4} T_{ik}$$

Здесь $R = R_{ik} g^{ik}$; T_{ik} — тензор энергии- импульса материи, компоненты которого выражаются через плотность, потоки импульса и другие величины, характеризующие материю и ее движение; c, Π, G — константы. c — скорость света, G — постоянная тяготения.

Список литературы

[1] Н. Кочин. Основы векторного и тензорного исчисления.