УДК 517.9

ТОЧНОСТЬ КОНСТАНТ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ТИПА ХАРДИ В ОТКРЫТЫХ МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Р.Г. Насибуллин

Аннотация

Исследуются многомерные неравенства типа Харди в произвольных областях евклидова пространства. Установлена точность констант в том случае, когда внутренний радиус области конечен, а вес содержит степени и кратные логарифмы функции расстояния до границы области.

Ключевые слова: неравенства типа Харди, логарифмическая особенность, точность констант, функция расстояния.

Введение

Неравенства типа Харди имеют широкое применение в различных областях математики и математической физики (см. [1–4]). Классические одномерные результаты по неравенствам типа Харди описаны в работах [5, 6]. Некоторые развитие и обобщения классических неравенств можно найти в [7–20]. Отметим, что обобщения неравенств Харди связаны, например, с увеличением размерности, изменением весовой функции, добавлением дополнительного слагаемого. В последнее время начали уделять внимание получению точных констант в неравенствах (см. [17–20]). Настоящая статья посвящена обоснованию точности констант в многомерных неравенствах в произвольных открытых множествах в случае, когда вес зависит от функции расстояния до границы области.

Пусть Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, $C_0^1(\Omega)$ – класс непрерывно-дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω, $\delta = \delta(\Omega) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ – функции расстояния до границы области. Мы будем предполагать, что Ω – область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, то есть

$$\delta_0(\Omega) := \sup\{\delta(x,\Omega) : x \in \Omega\} < \infty.$$

Для целых $i \geq 0$ положим

$$e_0 = 1, \quad e_1 = e, \quad e_{i+1} = \exp e_i$$

$$\ln_0 x = x, \quad \ln_{i+1} x = \ln(\ln_i x).$$

В [16] доказано утверждение, которое можно переписать следующим образом: *Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, причем $n \geq 1$, $\delta_0(\Omega) < \infty$, и пусть $i \in \mathbb{N}$ и $p \in [1, \infty)$. Если $l \in [1, p]$, то для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место следующее неравенство типа Харди*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^n \ln\dfrac{\delta_0 e_i}{\delta}\cdot\ldots\cdot\ln_i\dfrac{\delta_0 e_i}{\delta}}\,dx \leq$$
$$\leq A_p(\Omega)\int\limits_\Omega \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{n-l}}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^{l-1}\left(\ln_{i+1}\frac{\delta e_i}{\delta}\right)^l dx, \quad (1)$$

причем точное, то есть наименьшее из возможных $A_p(\Omega)$ *в этом неравенстве допускает оценку*

$$A_p(\Omega) \leq p^l.$$

В [16] также получена теорема, частным случаем которой является утверждение: *Пусть* Ω *– произвольное открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, $\delta_0(\Omega) < \infty$. *Если* $1 \leq p < \infty$ *и* $\beta > 1$, *то для любой функции* $f \in C_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \left(\ln_{i+1} \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \right)^{\beta}} \, dx \leq D_p(\Omega) \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{n-1}} \, dx. \qquad (2)$$

причем точная константа в этом неравенстве $D_p(\Omega)$ *допускает оценку*

$$D_p(\Omega) \leq \frac{p}{\beta - 1} \quad \forall \, \Omega.$$

Цель настоящей работы – показать, что константы p^l и $p/(\beta - 1)$ в общем случае нельзя заменить меньшими постоянными, то есть существуют экстремальные области Ω_0 и Ω_1, для которых соответственно выполнены равенства

$$A(\Omega_0) = p^l, \quad D(\Omega_1) = \frac{p}{\beta - 1}.$$

При доказательстве точности используются подходы из статей [17, 20], а именно показывается, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существуют область Ω_0 и функция из пространства $C_0^1(\Omega_0)$ такие, что соответствующее неравенство (1) не будет выполнено при замене p^l на $p^l - \varepsilon_0$. Аналогичное утверждение устанавливается для константы неравенства (2). Отметим, что неравенство (2) является точным для шара с проколотым центром.

1. Основные результаты

Покажем, что константа неравенства (1) является точной. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* Ω_0 *– область в* $\mathbb{R}^n$ *такая, что*

$$0 \in \partial\Omega_0, \quad \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 3\} \subset \Omega_0,$$

$$\delta_0(\Omega_0) < \infty,$$

и пусть $i \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty)$. *Если* $l \in [1, p]$, *то для любого* $\varepsilon_0 > 0$ *и при любом* i *существует функция* $u_{0,0,\varepsilon} \in C_0^1(\Omega_0)$, *для которой выполнено*

$$\int\limits_{\Omega_0} \frac{|u_{0,0,\varepsilon}|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta}} \, dx \ \geq$$

$$\geq \ (p^l - \varepsilon_0) \int\limits_{\Omega_0} \frac{|u_{0,0,\varepsilon}|^{p-l} |\nabla u_{0,0,\varepsilon}|^{\,l}}{\delta^{n-l}} \left(\ln \frac{\delta_0 e_i}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{\delta} \right)^{l-1} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta e_i}{\delta} \right)^{l} dx.$$

Доказательство. Пусть

$$X(u) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{|u|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta}} \, dx,$$

а

$$Y(u) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{|u|^{p-l}|\nabla u|^l}{\delta^{n-l}} \left(\ln \frac{\delta_0 e_i}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^{l-1} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^{l} dx,$$

где $\delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_0)$.

Нам понадобится функция, определенная следующим образом:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \left(\ln_{i+1} \delta_0 e_i \Big/ \ln_{i+1} \dfrac{\delta_0 e_i}{|x|}\right)^{(1+\varepsilon)/p}, & 0 < |x| \le 1, \\ 2 - |x|, & 1 < |x| \le 2, \\ 0, & 2 < |x| < \infty, \end{cases}$$

где $p \ge 1$, $l \in [1, p]$ и $\varepsilon > 0$.

Для наглядности рассуждений приведем рис. 1, на котором изображено множество Ω_0 в двумерном случае.

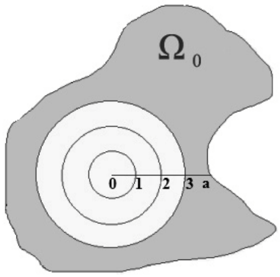

Рис. 1. Вид множества Ω_0

Заметим, что частным случаем множества Ω_0 является шар с выколотым центром $B(0,3)\diagdown\{0\}$.

Ясно, что, используя сферические координаты, для функции f, обращающейся в нуль вне шара радиуса 3, мы можем проинтегрировать интеграл по множеству Ω_0 следующим образом

$$\int\limits_{\Omega_0} f(x)dx = \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^3 f(r,\omega) r^{n-1}\, dr d\omega.$$

Если функция $f(r,\omega)$ не зависит от $\omega = x/r$, то приведенный выше интеграл примет вид

$$\int\limits_{\Omega_0} f(x)\, dx = \omega_{n-1} \int\limits_0^3 f(r) r^{n-1}\, dr,$$

где $\omega_{n-1} = |S^{n-1}|$ – объем единичного шара.

Теперь найдем значение величины $X(u_\varepsilon)$. Используя конкретные реализации функции расстояния δ до границы области Ω_0 (см. рис. 1), получим

$$X(u_\varepsilon) = \int\limits_{\Omega_0} \frac{|u_\varepsilon|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta}}\, dx =$$

$$= \omega_{n-1} \int\limits_0^3 \frac{|u_\varepsilon|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_i}{\delta}} r^{n-1}\, dr = \omega_{n-1}\left(X_1 + X_2 + X_3\right),$$

где

$$X_1 = (\ln_{i+1} \delta_0 e_i)^{1+\varepsilon} \int\limits_0^1 \frac{dr}{r \ln \frac{\delta_0 e_i}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{r} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_i}{r} \right)^{1+\varepsilon}},$$

$$X_2 = \int\limits_1^{3/2} \frac{(2-r)^p \, dr}{r \ln \frac{\delta_0 e_i}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{r}}$$

и для произвольного $a \geq 3$

$$X_3 = \int\limits_{3/2}^{2} \frac{(2-r)^p r^{n-1} dr}{(\min\{r, a-r\})^n \ln \frac{\delta_0 e_i}{\min\{r, a-r\}} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{\min\{r, a-r\}}}.$$

Поэтому нам достаточно найти X_1, X_2 и X_3 по отдельности. Используя равенство

$$\frac{1}{r \ln \frac{\delta_0 e_i}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{r}} = -\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_i}{r} \right)', \tag{3}$$

проделаем следующие элементарные выкладки:

$$X_1 = (\ln_{i+1} \delta_0 e_i)^{1+\varepsilon} \int\limits_0^1 \frac{dr}{r \ln \frac{\delta_0 e_i}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{r} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_i}{r} \right)^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon} \ln_{i+1} \delta_0 e_i.$$

Далее покажем, что X_2 и X_3 ограничены. Несложно заметить, что для X_2 выполняется неравенство

$$m(X_2) \leq X_2 \leq M(X_2),$$

где

$$m(X_2) = \min_{1 \leq r \leq 1.5} \{(2-r)^p\} \int\limits_1^{3/2} \frac{dr}{r \ln \frac{\delta_0 e_i}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{r}} =$$
$$= \min_{1 \leq r \leq 1.5} (2-r)^p \left(\ln_{i+1} \delta_0 e_i - \ln_{i+1} \frac{2\delta_0 e_i}{3} \right),$$

и, кроме того,

$$M(X_2) = \max_{1 \leq r \leq 1.5} \{(2-r)^p\} \int\limits_1^{3/2} \frac{dr}{r \ln \frac{\delta_0 e_i}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_i}{r}} =$$
$$= \max_{1 \leq r \leq 1.5} \{(2-r)^p\} \left(\ln_{i+1} \delta_0 e_i - \ln_{i+1} \frac{2\delta_0 e_i}{3} \right) < \infty.$$

Выше при вычислении интегралов мы воспользовались формулой (3).

Верна также двусторонняя оценка

$$m(X_3) \leq X_3 \leq M(X_3),$$

где

$$
\begin{aligned}
m(X_3) \;=\; & \min_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^p r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-2}}\right\}\times \\
& \times\int\limits_{3/2}^{2}\frac{dr}{\min\{r,a-r\}\ln\dfrac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\dfrac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}}=
\end{aligned}
$$

$$
=\min_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^p r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-2}}\right\}\left|\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{2,a-2\}}-\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{3/2,a-3/2\}}\right|,
$$

и, кроме того,

$$
\begin{aligned}
M(X_3)= & \max_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^p r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-2}}\right\}\times \\
& \times\int\limits_{3/2}^{2}\frac{dr}{\min\{r,a-r\}\ln\dfrac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\dfrac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}}=
\end{aligned}
$$

$$
=\max_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^p r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-2}}\right\}\left|\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{2,a-2\}}-\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{3/2,a-3/2\}}\right|<\infty.
$$

Отметим, что при оценке $m(X_3)$ и $M(X_3)$ мы пользуемся формулой (3) либо равенством

$$
\frac{1}{(a-r)\ln\dfrac{\delta_0 e_i}{a-r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\dfrac{\delta_0 e_i}{a-r}}=\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{a-r}\right)'. \tag{4}
$$

Таким образом, можно утверждать, что $X_2+X_3=\mathrm{const}$ и

$$
X(u_\varepsilon)=\frac{\omega_{n-1}}{\varepsilon}\ln_{i+1}\delta_0 e_i+\mathrm{const}.
$$

Проведем аналогичные рассуждения для $Y(u_\varepsilon)$. Используя конкретные реализации функции расстояния δ и определении функции u_ε, имеем

$$
\begin{aligned}
Y(u_\varepsilon)= & \int\limits_{\Omega_0}\frac{|u_\varepsilon|^{p-l}|\nabla u_\varepsilon|^l}{\delta^{n-l}}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^{l-1}\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^l dx \;= \\
= \;& \omega_{n-1}\int\limits_0^3\frac{|u_\varepsilon|^{p-l}|\nabla u_\varepsilon|^l}{\delta^{n-l}}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^{l-1}\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\delta}\right)^l r^{n-1}\,dr= \\
& =\omega_{n-1}\left(Y_1+Y_2+Y_3\right),
\end{aligned}
$$

где

$$
Y_1=(\ln_{i+1}\delta_0 e_i)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1+\varepsilon}{p}\right)^l\int\limits_0^1\frac{dr}{r\ln\dfrac{\delta_0 e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\dfrac{\delta_0 e_i}{r}\left(\ln_{i+1}\dfrac{\delta_0 e_i}{r}\right)^{1+\varepsilon}}=
$$

$$
=-\left(\ln_{i+1}\delta_0 e_i\right)^{1+\varepsilon}\left(\frac{1+\varepsilon}{p}\right)^l\int\limits_0^1\frac{1}{\left(\ln_{i+1}\dfrac{\delta_0 e_i}{r}\right)^{1+\varepsilon}}\,d\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{r}=\left(\frac{1+\varepsilon}{p}\right)^l\frac{1}{\varepsilon}\ln_{i+1}\delta_0 e_i,
$$

$$Y_2=\int\limits_1^{3/2}\frac{(2-r)^{p-l}}{r^{n-l}}\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l-1}\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l}r^{n-1}\,dr,$$

а

$$Y_3=\int\limits_{3/2}^{2}\frac{(2-r)^{p-l}}{(\min\{r,a-r\})^{n-l}}\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)^{l-1}\times$$
$$\times\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)^{l}r^{n-1}\,dr.$$

Далее, используя равенства (3) и (4), оценим величины Y_2, Y_3. Верно следующее двустороннее неравенство

$$m(Y_2)\le Y_2\le M(Y_2),$$

где

$$m(Y_2)=\min_{1\le r\le 1.5}\left\{(2-r)^{p-l}r^l\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_1^{3/2}\frac{\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0e}{r}\right)^{l}}{r\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)}\,dr=\min_{1\le r\le 1.5}\left\{(2-r)^{p-l}r^l\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l}\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{l+1}\left((\ln_{i+1}\delta_0e_i)^{l+1}-\left(\ln_{i+1}\frac{2\delta_0e_i}{3}\right)^{l+1}\right),$$

$$M(Y_2)=\max_{1\le r\le 1.5}\left\{(2-r)^{p-l}r^l\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_1^{3/2}\frac{\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l}}{r\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)}\,dr=$$
$$=\max_{1\le r\le 1.5}\left\{(2-r)^{p-l}r^l\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{r}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{r}\right)^{l}\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{l+1}\left((\ln_{i+1}\delta_0e_i)^{l+1}-\left(\ln_{i+1}\frac{2\delta_0e_i}{3}\right)^{l+1}\right)<\infty.$$

Для Y_3 верна также двусторонняя оценка

$$m(Y_3)\le Y_3\le M(Y_3),$$

где

$$m(Y_3)=\min_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^{p-l}r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-l-1}}\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)^{l}\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{3/2}^{2}\frac{\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0e}{\min\{r,a-r\}}\right)^{l}}{\min\{r,a-r\}\left(\ln\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)}\,dr=$$

$$= \min_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^{p-l}r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-l-1}}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)^l\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{l+1}\left|\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{2,a-2\}}\right)^{l+1}-\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{3/2,a-3/2\}}\right)^{l+1}\right|$$

и, кроме того,

$$M(Y_3)=\max_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^{p-l}r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-l-1}}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)^l\right\}\times$$
$$\times\int\limits_{3/2}^{2}\frac{\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e}{\min\{r,a-r\}}\right)^l}{\min\{r,a-r\}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)}\,dr=$$
$$= \max_{1.5\le r\le 2}\left\{\frac{(2-r)^{p-l}r^{n-1}}{(\min\{r,a-r\})^{n-l-1}}\left(\ln\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\cdot\ldots\cdot\ln_i\frac{\delta_0 e_i}{\min\{r,a-r\}}\right)^l\right\}\times$$
$$\times\frac{1}{l+1}\left|\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{2,a-2\}}\right)^{l+1}-\left(\ln_{i+1}\frac{\delta_0 e_i}{\min\{3/2,a-3/2\}}\right)^{l+1}\right|<\infty.$$

Таким образом, мы показали, что $Y_2+Y_3=\mathrm{const}$.

В результате имеем

$$X(u_\varepsilon)=\frac{\omega_{n-1}}{\varepsilon}\ln_{i+1}\delta_0 e_i+\mathrm{const},$$

$$Y(u_\varepsilon)=\frac{\omega_{n-1}}{\varepsilon}\ln_{i+1}\delta_0 e_i\left(\frac{1+\varepsilon}{p}\right)^l+\mathrm{const}.$$

Ясно, что

$$\frac{X(u_\varepsilon)}{Y(u_\varepsilon)}=\frac{\omega_{n-1}\ln_{i+1}\delta_0 e_i+\varepsilon\,\mathrm{const}}{\omega_{n-1}\ln_{i+1}\delta_0 e_i\left(\frac{1+\varepsilon}{p}\right)^l+\varepsilon\,\mathrm{const}}.$$

Известно, что любая непрерывная функция сколь угодно хорошо приближается непрерывно-дифференцируемыми функциями. Например, это можно сделать, используя усредняющее ядро и средние функции (см. [21, 22]). Аппроксимируя функцию u_ε радиальными функциями из пространства $C_0^1(B(0,3)\diagdown\{0\})$, получим, что отношение $X(u_\varepsilon)/Y(u_\varepsilon)$ можно достаточно хорошо приблизить отношением $X(u_{0,0,\varepsilon})/Y(u_{0,0,\varepsilon})$, где $u_{0,0,\varepsilon}\in C_0^1(B(0,3)\diagdown\{0\})$. Необходимо отметить, что $C_0^1(B(0,3)\diagdown\{0\})\subset C_0^1(\Omega_0)$.

Более подробно остановимся на случае, когда производится приближение радиальными функциями. Рассмотрим функцию u_ε на интервале $(\eta,3)$, где $0<\eta<1/3$. Далее сгладим функцию u_ε в достаточно малой окрестности точек 1 и 2 каким-нибудь известным методом, например методом наименьших квадратов (см. [23]). Обозначим получившуюся функцию тем же символом u_ε. В дальнейших рассуждениях полагаем, что u_ε на интервале $(\eta,3)$ дифференцируема.

Пусть $0<h<\eta<1/3$ и функция $u_{\eta,h,\varepsilon}$ определена следующим образом:

$$u_{\eta,h,\varepsilon}(x)=\int\limits_{\eta}^{3}u_\varepsilon(y)h^{-1}\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right)dy,$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} c_h\, e^{1/(|x|^2-1)}, & \text{если } |x| < 1, \\ 0, & \text{если } |x| \ge 1, \end{cases}$$

а константа c_h находится из условия нормировки

$$\int\limits_0^1 \sigma(x)\, dx = 1.$$

Функция $u_{\eta,h,\varepsilon}$ является средней функцией и на интервале $(\eta, 3)$ сколь угодно точно приближает функцию u_ε при достаточно малых h (см. [11, 22]).

Ясно, что

$$\operatorname{supp} h^{-1}\sigma\left(\frac{x}{h}\right) = [0, h], \quad \operatorname{supp} h^{-1}\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right) = [x-h, x+h],$$

а

$$\operatorname{supp} u_{\eta,h} = [\eta - h, 2 + h].$$

Очевидно, что функция $u_{\eta,h,\varepsilon}$ дифференцируема и с компактным носителем, то есть $u_{\eta,h,\varepsilon} \in C_0^1([0,3])$.

Далее воспользуемся рассуждениями из книги С.Л. Соболева [22, с. 64]. Найдем производную функции $u_{\eta,h,\varepsilon}$. Имеем

$$u'_{\eta,h,\varepsilon}(x) = \int\limits_\eta^3 u_\varepsilon(y) h^{-1}\left(\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right)\right)'_x dy = -\int\limits_\eta^3 u_\varepsilon(y) h^{-1}\left(\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right)\right)'_y dy =$$

$$= -u_\varepsilon(y) h^{-1}\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right)\Bigg|_\eta^3 + \int\limits_\eta^3 u'_\varepsilon(y) h^{-1}\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right) dy =$$

$$= \int\limits_\eta^3 u'_\varepsilon(y) h^{-1}\sigma\left(\frac{x-y}{h}\right) dy + u_\varepsilon(\eta) h^{-1}\sigma\left(\frac{x-\eta}{h}\right).$$

Отметим, что $u_\varepsilon(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$ и $h^{-1}\sigma\left(\dfrac{x-\eta}{h}\right)$ ограничена.

Таким образом, мы построили непрерывно-дифференцируемую функцию $u_{\eta,h,\varepsilon}$, которая сколь угодно точно приближает функцию u_ε на интервале $(\eta, 3)$, причем оказывается, что производная $u'_{\eta,h,\varepsilon}$ также сколь угодно хорошо приближает u'_ε при достаточно малых η и h.

Другими словами, можно утверждать, что для любого наперед заданного малого h

$$u_{\eta,h,\varepsilon}(x) = (1 + o(h)) u_\varepsilon(x), \quad u'_{\eta,h,\varepsilon}(x) = (1 + o(h) + o(\eta)) u'_\varepsilon(x),$$

$$X(u_{\eta,h,\varepsilon}(x)) \to X(u_\varepsilon(x)), \quad \eta, h \to 0,$$

$$Y(u_{\eta,h,\varepsilon}(x)) \to Y(u_\varepsilon(x)), \quad \eta, h \to 0.$$

Действительно, учитывая неравенство (1), имеем

$$\frac{X(u_{0,0,\varepsilon})}{Y(u_{0,0,\varepsilon})} = \frac{\omega_{n-1} \ln_{i+1} \delta_0 e_i + \varepsilon \operatorname{const}}{\omega_{n-1} \ln_{i+1} \delta_0 e_i \left(\dfrac{1+\varepsilon}{p}\right)^l + \varepsilon \operatorname{const}} \le A(\Omega_0) \le p^l.$$

Устремляя ε к нулю, получим, что

$$p^l \le A(\Omega_0) \le p^l,$$

то есть

$$A(\Omega_0) = p^l.$$

Заметим, что последовательность $X(u_{0,0,\varepsilon})/Y(u_{0,0,\varepsilon})$ стремится к $A(\Omega_0)$ снизу при $\varepsilon \to 0$. Понятно, что если заменить $A(\Omega_0)$ на $A(\Omega_0) - \varepsilon_0$, то для любого $\varepsilon_0 > 0$ существуют ε и функция $u_{0,0,\varepsilon} \in C_0^1(\Omega_0)$, для которых верно неравенство

$$\frac{X(u_{0,0,\varepsilon})}{Y(u_{0,0,\varepsilon})} \ge (A(\Omega_0) - \varepsilon_0).$$

Откуда следует утверждение теоремы. □

Покажем точность константы в неравенстве (2). Верна следующая

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_1 > 0, r_1 > 0$ *такие, что для любого* $r \in (0, \frac{3}{2}r_1]$ *верна оценка*

$$1 - \frac{1}{\ln_{i+1} \dfrac{3r_1 e_{i+1}}{2r}} \ge 1 - \varepsilon_1,$$

и пусть $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 3r_1\}$ *– шар с проколотым центром. Если* $1 \le p < \infty$ *и* $\beta > 1$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и при любом* i *существует функция* $u_{0,0,k} \in C_0^1(\Omega_1)$, *для которой*

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{|u_{0,0,k}|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} (\ln_{i+1} \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta})^\beta}\, dx \ge$$
$$\ge \left(\frac{p}{\beta - 1} - \varepsilon\right) \int\limits_{\Omega_1} \frac{|u_{0,0,k}|^{p-1} |\nabla u_{0,0,k}|}{\delta^{n-1}}\, dx.$$

Доказательство. Определим функцию u_k следующим образом:

$$u_k(r) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{1/p}, & r \in (0, r_1], \\ \left(\dfrac{2r_1 - r}{r} \left(\dfrac{3r_1 - r}{2r}\right)^k\right)^{1/p}, & r \in (r_1, 2r_1], \\ 0, & r \in (2r_1, \infty). \end{cases}$$

Пусть

$$X(u) = \int\limits_{\Omega_1} \frac{|u|^p}{\delta^n \ln \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \left(\ln_{i+1} \dfrac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta}\right)^\beta}\, dx,$$

$$Y(u) = \int\limits_{\Omega_1} \frac{|u|^{p-1} |\nabla u|}{\delta^{n-1}}\, dx.$$

Получим нижнюю оценку значения $X(u_k(r))$.

Используя сферические координаты и конкретные реализации функции расстояния δ, имеем

$$X(u_k) = \omega_{n-1} \int\limits_0^{3r_1} \frac{|u_k|^p}{\delta^n \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{\delta} \right)^\beta} r^{n-1}\, dr =$$

$$= \omega_{n-1} \int\limits_0^{r_1} \frac{|u_k|^p}{r \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \right)^\beta}\, dr +$$

$$+ \omega_{n-1} \int\limits_{r_1}^{3r_1/2} \frac{|u_k|^p}{r \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \right)^\beta}\, dr +$$

$$+ \omega_{n-1} \int\limits_{3r_1/2}^{2r_1} \frac{|u_k|^p r^{n-1}}{(3r_1 - r)^n \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{(3r_1 - r)} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{(3r_1 - r)} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{(3r_1 - r)} \right)^\beta}\, dr =$$

$$= \omega_{n-1}(X_1(u_k) + X_2(u_k) + X_3(u_k)),$$

то есть для оценки снизу $X(u_k)$ нам достаточно найти значения $X_1(u_k)$, $X_2(u_k)$ и $X_3(u_k)$ по отдельности. Для $X_1(u_k)$, применяя элементарные вычисления, имеем

$$X_1(u_k) = \frac{1}{r_1} \int\limits_0^{r_1} \frac{r}{r \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \right)^\beta}\, dr =$$

$$= -\frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{r_1} \int\limits_0^{r_1} r\, d \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \right)^{\beta - 1}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r_1} \right)^{\beta - 1}} \right) + \frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{r_1} \int\limits_0^{r_1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \right)^{\beta - 1}} \right) dr \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r_1} \right)^{\beta - 1}} \right) + \frac{1}{\beta - 1} \frac{1 - \varepsilon_1}{r_1} \int\limits_0^{r_1} dr =$$

$$= -\frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r_1} \right)^{\beta - 1}} \right) + \frac{(1 - \varepsilon_1)}{\beta - 1}.$$

Далее оценим $X_2(u_k)$:

$$X_2(u_k) = \int\limits_{r_1}^{3r_1/2} \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{2r}\right)^k \frac{1}{r \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r} \left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r}\right)^\beta} dr =$$

$$= -\frac{1}{\beta - 1} \int\limits_{r_1}^{3r_1/2} \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{2r}\right)^k d \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r}\right)^{\beta - 1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r_1}\right)^{\beta - 1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\beta - 1} \int\limits_{r_1}^{3r_1/2} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r}\right)^{\beta - 1}}\right) d \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{2r}\right)^k \geq$$

$$\geq \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r_1}\right)^{\beta - 1}}\right) + (1 - \varepsilon_1) \int\limits_{r_1}^{3r_1/2} d \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{2r}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{\beta - 1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{r_1}\right)^{\beta - 1}}\right) + \frac{1}{\beta - 1} (1 - \varepsilon_1) \left(\frac{1}{3} \frac{1}{2^k} - 1\right).$$

Осталось ограничить снизу значение $X_3(u_k)$. Имеем

$$X_3(u_k) = \frac{1}{2^k} \int\limits_{3r_1/2}^{2r_1} \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{r}\right)^{k-n+1} \times$$

$$\times \frac{1}{(3r_1 - r) \ln \frac{\delta_0 e_{i+1}}{(3r_1 - r)} \cdot \ldots \cdot \ln_i \frac{\delta_0 e_{i+1}}{(3r_1 - r)} (\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{3r_1 - r})^\beta} dr =$$

$$= \frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{2^k} \int\limits_{3r_1/2}^{2r_1} \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{r}\right)^{k-n+1} d \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{3r_1 - r}\right)^\beta}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{2^k} \int\limits_{3r_1/2}^{2r_1} \left(1 - \frac{1}{\left(\ln_{i+1} \frac{\delta_0 e_{i+1}}{3r_1 - r}\right)^\beta}\right) d \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{r}\right)^{k-n+1} \geq$$

$$\geq -\frac{1}{\beta - 1} \frac{1}{2^k} (1 - \varepsilon_1) \int\limits_{3r_1/2}^{2r_1} d \frac{2r_1 - r}{r} \left(\frac{3r_1 - r}{r}\right)^{k-n+1} = \frac{1 - \varepsilon_1}{\beta - 1} \frac{1}{3} \frac{1}{2^k}.$$

Отсюда следует, что
$$X(u_k) \geq \frac{1-\varepsilon_1}{\beta-1}\,\frac{\omega_{n-1}}{3}\,\frac{1}{2^{k-1}}.$$

Теперь найдем верхнюю оценку величины $Y(u_k)$. Переходя к сферическим координатам и используя конкретные реализации функции расстояния δ, получим

$$Y(u_k) = \omega_{n-1}\int\limits_0^{3r_1} \frac{|u_k|^{p-1}|\nabla u_k|}{\delta^{n-1}} r^{n-1}\,dr =$$
$$= \omega_{n-1}\int\limits_0^{r_1} |u_k|^{p-1}|\nabla u_k|\,dr + \omega_{n-1}\int\limits_{r_1}^{2r_1} |u_k|^{p-1}|\nabla u_k|\,dr +$$
$$+ \omega_{n-1}\int\limits_{2r_1}^{3r_1} \frac{|u_k|^{p-1}|\nabla u_k|}{(3r_1-r)^{n-1}}\,r^{n-1}\,dr = \omega_{n-1}(Y_1(u_k)+Y_2(u_k)+Y_3(u_k)).$$

Найдем каждое из значений $Y_1(u_k)$, $Y_2(u_k)$ и $Y_3(u_k)$ по отдельности.

Элементарные выкладки показывают, что для величин $Y_1(u_k)$, $Y_2(u_k)$ верны соответственно равенства

$$Y_1(u_k) = \frac{1}{pr_1}\int\limits_0^{r_1} dr = \frac{1}{p}, \quad Y_2(u_k) = \frac{1}{p}\int\limits_{r_1}^{3r_1/2} d\left(\frac{2r_1-r}{r}\right)\left(\frac{3r_1-r}{2r}\right)^k = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2^k}-1\right).$$

Теперь найдем значение $Y_3(u_k)$. Имеем

$$Y_3(u_k) = -\frac{1}{p}\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\left(\left(\frac{2r_1-r}{r}\right)\left(\frac{3r_1-r}{2r}\right)^k\right)'\frac{r^{n-1}}{(3r_1-r)^{n-1}}\,dr =$$
$$= -\frac{1}{p}\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\left(\left(\frac{3r_1-r}{2r}\right)^{k-1}\frac{r_1}{2r^3}\left(-6r_1(1+k)+r(2+3k)\right)\right)\frac{r^{n-1}}{(3r_1-r)^{n-1}}\,dr$$
$$= \frac{6r_1^2(1+k)}{2^k p}\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\left(\frac{3r_1}{r}-1\right)^{k-n}\frac{1}{r^3}\,dr - \frac{(2+3k)r_1}{2^k p}\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\left(\frac{3r_1}{r}-1\right)^{k-n}\frac{1}{r^2}\,dr =$$
$$= \frac{-2r_1(1+k)}{2^k p(k-n+1)}\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\frac{1}{r}d\left(\frac{3r_1}{r}-1\right)^{k-n+1} +$$
$$+ \frac{(2+3k)}{2^k 3p}\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\left(\frac{3r_1}{r}-1\right)^{k-n} d\left(\frac{3r_1}{r}-1\right) =$$
$$= \frac{-2r_1(1+k)}{2^k p(k-n+1)}\left(\frac{2^{n-k-1}}{2r_1}-\frac{2}{3r_1}-\int\limits_{3r_1/2}^{2r_1}\left(\frac{3r_1}{r}-1\right)^{k-n+1} d\left(\frac{1}{r}\right)\right) +$$
$$+ \frac{(2+3k)}{2^k 3p(k-n+1)}\left(2^{n-k+1}-1\right) =$$

$$= \frac{-2(1+k)}{2^k p(k-n+1)} \left(2^{n-k-2} - \frac{2}{3} - \frac{\left(2^{n-k-2}-1\right)}{3(k-n+2)} \right) + \frac{(2+3k)\left(2^{n-k-1}-1\right)}{2^k 3p(k-n+1)} =$$

$$= \frac{1}{3p} \frac{1}{2^{2k+1}(k-n+1)} 2^n \left(-3(1+k) + \frac{k+1}{(k-n+2)} + 2 + 3k \right) +$$

$$+ \frac{1}{3p} \frac{1}{2^{2k+1}(k-n+1)} 2^k \left(4(1+k) - \frac{2(k+1)}{k-n+2} - 2 - 3k \right) =$$

$$= \frac{1}{3p} \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{2^n(n-1) - 2^{k+1}(2(n-1) + k(-k-2+n))}{(k-n+1)(k-n+2)} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{3p} A(k),$$

где

$$A(k) = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{2^n(n-1) - 2^{k+1}(2(n-1) + k(-k-2+n))}{(1+k-n)(k-n+2)} \to 1, \quad k \to \infty.$$

Таким образом,

$$Y(u_k) = \frac{1}{2^k} \frac{\omega_{n-1}}{3p} (A(k) + 1).$$

Отметим что, используя средние функции и усредняющее ядро (см. [21, 22]), отношение $X(u_k)/Y(u_k)$ можно достаточно хорошо приблизить отношением $X(u_{0,k})/Y(u_{0,k})$, где $u_{0,k} \in C_0^1(B(0,3) \diagdown \{0\})$. Для этого сначала сгладим функцию u_k в малой окрестности точек r_1 и $2r_1$. Далее аппроксимируем полученную функцию, которая имеет на интервале $(\eta, 2r_1)$ производную, с помощью средних функций. Как и при доказательстве соответствующего момента теоремы 1, получим функцию из пространства $C_0^1([0, 3r_1])$, обозначим ее через $u_{\eta,h,k}$, которая на интервале $(\eta, 3r_1)$ при малых η и h достаточно хорошо приближает функцию u_k. Причем функция $u'_{\eta,h,k}$ также будет аппроксимировать u'_k (см. [22, с. 69]).

Учитывая неравенство (2), получим

$$\frac{2p(1+\varepsilon_1)}{(\beta-1)(1+A(k))} \le \frac{X(u_{0,0,k})}{Y(u_{0,0,k})} \le D(\Omega_1) \le \frac{p}{\beta-1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_1 \to 0$ и $k \to \infty$, имеем

$$D(\Omega_1) = \frac{p}{\beta-1}.$$

Заметим, что последовательность $X(u_{0,0,k})/Y(u_{0,0,k})$ стремится к $D(\Omega_1)$ снизу. Следовательно, заменяя $D(\Omega_1)$ на $D(\Omega_1) - \varepsilon$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют k, для которого

$$\frac{X(u_{0,0,k})}{Y(u_{0,0,k})} \ge \frac{p}{\beta-1} - \varepsilon.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

Выражаю искреннюю благодарность научному руководителю, профессору Авхадиеву Фариту Габидиновичу за ценные замечания при обсуждении научных результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00762-а и 12-01-00636-а).

Summary

R.G. Nasibullin. Accuracy of Constants in Logarithmic Hardy-Type Inequalities in Open Multidimensional Domains.

Multidimensional Hardy-type inequalities in arbitrary domains of the Euclidean space are investigated. Accuracy of the constants is established in the case when the inner radius of the domain is finite, and the weight function contains degrees and the multiple logarithms of the function of the distance to the domain's boundary.

Keywords: Hardy-type inequalities, logarithmic singularity, accuracy of constants, distance function.

Литература

1. *Дубинский Ю.А.* Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях // Труды МИАН. – 2010. – Т. 269. – С. 112–132.
2. *Davies E.B.* A review of Hardy Inequalities // Oper. Theory Adv. Appl. – 1999. – V. 110. – P. 55–67.
3. *Laptev A., Weidl T.* Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms // Oper. Theory Adv. Appl. – 1999. – V. 108. – P. 299–305.
4. *Balinsky A., Laptev A., Sobolev A.V.* Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms // J. Stat. Phys. – 2004. – V. 116, No 1–4. – P. 507–521.
5. *Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G.* Inequalities. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. – 340 p.
6. *Opic B., Kufner A.* Hardy-type Inequalities. – Essex, England: Longman Scientific & Technical, 1990. – 333 p.
7. *Shum D.T.* On integral inequalities related to Hardy's // Can. Math. Bull. – 1971. – V. 14, No 2. – P. 225–230.
8. *Chan L.-Y.* Some extensions of Hardy's inequality // Can. Math. Bull. – 1979. – V. 22, No 2. – P. 165–169.
9. *Pachpatte B.G.* A note on certain inequalities related to Hardy's inequality // Indian J. Pure Appl. Math. – 1992. – V. 23, No 11. – P. 773–776.
10. *Solomyak M.* A remark on the Hardy inequalities // Integr. Equat. Oper. Th. – 1994. – V. 19, No 1. – P. 120–124.
11. *Pečarić J.E., Love E.R.* Still more generalization of Hardy's inequality // J. Austral. Math. Soc. (Series A) – 1995. – V. 59. – P. 214–224.
12. *Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A.* A geometrical version of Hardy's inequality // J. Funct. Anal. – 2002. – V. 189, No 2. – P. 539–548.
13. *Tidblom J.* A geometrical version of Hardy's inequality for $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 2004. – v. 132, No 8. – P. 2265–2271.
14. *Авхадиев Ф.Г.* Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах // Труды МИАН. – 2006. – Т. 255. – С. 80–18.
15. *del Pino M., Dolbeault J., Filippas S., Tertikas A.* A logarithmic Hardy inequality // J. Funct. Anal. – 2010. – V. 259, No 8. – P. 2045–2072.
16. *Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К.* Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства // Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 9. – С. 90–94.
17. *Avkhadiev F.G.* Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants // Lobachevskii J. Math. – 2006. – V. 21. – P. 3–31.

18. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains // Z. Angew. Math. Mech. – 2007. – V. 87, No 8–9. – P. 632–642.

19. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Weighted Hardy inequalities with sharp constants // Lobachevskii J. Math. – 2010. – V. 31, No 1. – P. 1–7.

20. *Avkhadiev F.G., Wirths K.-J.* Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2011. – V. 18, No 11. – P. 723–736.

21. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высш. шк., 1977. – 431 с.

22. *Соболев Л.С.* Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных. – М.: Наука, 1989. – 254 с.

23. *Натансон И.П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. – 688 с.

Поступила в редакцию
13.03.13

Насибуллин Рамиль Гайсаевич – аспирант кафедры теории функций и приближений, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *NasibullinRamil@gmail.com*