Известия вузов. Математика
2018, №4, с. 21–32

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М.А. БОБОДЖАНОВА, О.Д. ТУЙЧИЕВ, Д.А. ШАПОШНИКОВА

ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ДИАГОНАЛЬНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ЯДРА

Аннотация. В работе изучается проблема предельного перехода при стремлении малого параметра к нулю в интегральной сингулярно возмущенной системе с диагональным вырождением ядра. При доказательстве соответствующей теоремы о предельном переходе существенно используется структура главного члена асимптотики, построение которого проводится с помощью алгоритма метода регуляризации, разработанного С.А. Ломовым для интегро-дифференциальных уравнений. Спектр оператора, отвечающего за регуляризацию, состоит из чисто мнимых точек, поэтому предельный переход в классическом смысле (т. е. в непрерывной метрике) в общем случае будет невозможен. В работе выделяется класс правых частей, при которых равномерный переход в классическом смысле будет иметь место.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный оператор, диагональное вырождение ядра, предельное решение.

УДК: 517.968

Рассмотрим сингулярно возмущенную интегральную систему

$$\varepsilon^2 y = \int_0^t (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + h(t) \tag{1}$$

с диагональным вырождением ядра ($\det K(t,t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T]$). Будем считать выполненными следующие условия:

1) $K(t,s) \in \mathrm{C}^\infty(0 \le s \le t \le T)$ — $n \times n$-матрица с вещественными коэффициентами, $h(t) \in \mathrm{C}^\infty([0,T], \mathbb{C}^n)$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ $n \times n$-матрицы $K(t,t)$ удовлетворяет требованиям

a) $\lambda_i(t) < 0$, $i = \overline{1,n}$, $\forall t \in [0,T]$;

b) $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$, $i \neq j$, $i,j = \overline{1,n}$, $\forall t \in [0,T]$.

Сингулярно возмущенные системы с вырождающимися ядрами впервые были рассмотрены М.И. Иманалиевым в [1]. Им был получен качественный результат ([1], с. 62–64), позволяющий судить о поведении решения аналогичного интегро-дифференциального уравнения

$$\varepsilon \dot{z} + \int_0^t (t-s)K(t,s)\, z(s,\varepsilon)\, ds = h_\varepsilon(t), \quad z(0,\varepsilon) = b(\varepsilon),$$

при $\varepsilon \to +0$. Однако предлагаемая в [1] методика была ориентирована на специальные правые части $h(t) = h_\varepsilon(t)$ и специальные начальные векторы $b(\varepsilon)$. С помощью нее не просматриваются перспективы построения асимптотики решения (любого порядка по ε) указанного интегро-дифференциального уравнения для произвольных неоднородностей $h(t)$ и

Поступила 17.01.2017

произвольных начальных векторов b. В данной работе делается акцент на развитие именно такого алгоритма. В статье [2] с использованием идей метода регуляризации С.А. Ломова ([3], с. 126–146) развивается соответствующий алгоритм. При этом поскольку в системе (1) отсутствует оператор $A(t)y$ дифференциальной части, то алгоритм С.А. Ломова (который развивался для систем типа $\varepsilon\dot{y} = A(t)\,y + \int\limits_0^t K_0(t,s)\,y(s,\varepsilon)ds + h(t)$) несколько модифицируется. Показывается, что за сингулярности в решении задачи (1) отвечают функции $\mu_k(t)$, связанные со спектром $\{\lambda_j(t)\}$ "диагонального ядра" $K(t,t)$ соотношениями $\mu^2_{2j-1}(t) \equiv \mu^2_{2j}(t) \equiv \lambda_j(t)$, и что для построения каждого члена регуляризованного асимптотического ряда требуется решить три итерационные задачи (вместо двух при наличии оператора $A(t)y$ дифференциальной части, [3], с. 131). Исследованию предельного перехода посвящена заключительная часть статьи [2], которая изложена в реферативной форме, без надлежащего строгого обоснования. В данной работе устраняется этот пробел и проводится полное обоснование теоремы о предельном переходе в системе (1) с использованием структуры главного члена ее регуляризованного асимптотического решения.

Итак, рассмотрим систему (1) при выполнении условий 1)–2). Вместо неизвестной функции $y = y(t,\varepsilon)$ введем новую вектор-функцию

$$z = \int_0^t (t-s)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds.$$

Дифференцируя ее по t и учитывая, что $\varepsilon^2 y = z + h(t)$, будем иметь

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dt} = \int_0^t \left(K(t,s) + (t-s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}\right)\varepsilon^2 y(s,\varepsilon)ds$$

или

$$\varepsilon^2 \frac{dz}{dt} = \int_0^t G(t,s)z(s,\varepsilon)ds + g(t), \quad z(0,\varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $G(t,s) \equiv K(t,s) + (t-s)\frac{\partial K(t,s)}{\partial t}$, $g(t) \equiv \int\limits_0^t G(t,s)h(s)ds$. Решение системы (2) связано с решением системы (1) равенством $y = \varepsilon^{-2}(z + h(t))$. Поэтому, построив асимптотическое решение системы (2), легко вычислим асимптотическое решение системы (1). Введем регуляризирующие переменные (в работе [1], с. 128, и в дифференциальных системах, например, [4] с. 24–25) они вводятся по спектру оператора $A(t)$)

$$\tau_j = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_j(\theta)d\theta \equiv \frac{\psi(t)}{\varepsilon}, \quad j = \overline{1,2n}, \tag{3}$$

где $\mu_{2j-1}(t) \equiv -i\sqrt{-\lambda_j(t)}$, $\mu_{2j}(t) \equiv +i\sqrt{-\lambda_j(t)}$, $j = \overline{1,n}$. При этом $\mu^2_{2j-1}(t) \equiv \mu^2_{2j}(t) \equiv \lambda_j(t)$ $\forall t \in [0,T]$, $j = \overline{1,n}$. Для расширенной функции $\widetilde{z} = \widetilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ $(\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_{2n}))$ получаем следующую задачу:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \widetilde{z}}{\partial t} + \varepsilon L\widetilde{z} - \int_0^t G(t,s)\widetilde{z}(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)ds = g(t), \widetilde{z}(0,0,\varepsilon) = 0, \tag{4}$$

где $L \equiv \sum\limits_{j=1}^{2n} \mu_j(t)\frac{\partial}{\partial \tau_j}$. Однако здесь не произведена регуляризация интеграла

$$J\widetilde{z} = \int_0^t G(t,s)\widetilde{z}(s,\psi(s)/\varepsilon,\varepsilon)ds.$$

Воспользуемся для этого идеями С.А. Ломова ([3], с. 129–132), который впервые ввел для регуляризации интегрального оператора J пространство $U|_\tau = \psi(t)/\varepsilon$, асимптотически инвариантное относительно оператора J ([3], с. 62). Пространство U строится следующим образом.

Определение. Будем говорить, что вектор-функция $z(t,\tau) = \{z_1, \ldots, z_n\}$ принадлежит пространству U, если она представима в виде суммы

$$z(t,\tau) = \sum_{j=1}^{2n} z_j(t) e^{\tau_j} + z_0(t) \tag{5}$$

с коэффициентами $z_j(t) \in \mathrm{C}^\infty([0,T], \mathbb{C}^n)$, $j = \overline{0, 2n}$.

Подставляя (5) в Jz и производя интегрирование по частям, получаем следующее расширение интегрального оператора:

$$\widetilde{J}\widetilde{z}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k J z_k(t,\tau) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \sum_{s=0}^{r} R_{r-s} z_s(t,\tau) \tag{6}$$

на рядах типа

$$\widetilde{z}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(t,\tau), \quad z_k(t,\tau) \in U, \tag{7}$$

сходящихся асимптотически (при $\varepsilon \to +0$) равномерно по $(t,\tau) \in [0,T] \times \Pi$ ($\Pi = \{\tau : \mathrm{Re}\tau_j \leq 0,\ j = \overline{1, 2n}\}$). В (6) операторы порядка $R_m : U \to U$ имеют вид

$$R_0 z(t,\tau) = \int_0^t G(t,s) z_0(s) ds,$$

$$R_1 z\,(t,\tau) = \sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{G\,(t,t)\, z_k\,(t)}{\mu_k\,(t)} e^{\tau_k} - \frac{G\,(t,0)\, z_k\,(0)}{\mu_k\,(0)} \right],$$

$$R_2 z\,(t,\tau) = -\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{1}{\mu_k\,(t)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G\,(t,s)\, z_k\,(s)}{\mu_k\,(s)} \right)_{s=t} e^{\tau_k} - \frac{1}{\mu_k\,(0)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \frac{G\,(t,s)\, z_k\,(s)}{\mu_k\,(s)} \right)_{s=0} \right],$$

$$R_{m+1} z(t,\tau) = (-1)^m \sum_{j=1}^{2n} ([I_j^m (G(t,s) z_j(s))]_{s=t} e^{\tau_j} - [I_j^m (G(t,s) z_j(s))]_{s=0}), \quad m \geq 1, \tag{8}$$

где $I_j^0 = \frac{1}{\mu_j(s)}$, $I_j^m = \frac{1}{\mu_j(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_j^{m-1}$, $m \geq 1$, $j = \overline{1, 2n}$.

Подставив ряд (7) в (6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$-R_0 z_0 = g(t), \quad z_0(0,0) = 0; \tag{9_0}$$

$$-R_0 z_1 = -L z_0 + R_1 z_0, \quad z_1(0,0) = 0; \tag{9_1}$$

$$-R_0 z_2 = -\frac{\partial z_0}{\partial t} - L z_1 + R_1 z_1 + R_2 z_0, \quad z_2(0,0) = 0; \tag{9_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$-R_0 z_k = -\frac{\partial z_{k-2}}{\partial t} - L z_{k-1} + R_1 z_{k-1} + R_2 z_{k-2} + \cdots + R_k z_0, \quad z_k(0,0) = 0, \quad k \geq 2. \tag{9_k}$$

Будем искать решения $z_k(t,\tau)$ итерационных задач (9_k) в пространстве U непосредственно. Решение задачи (9_0) определяем в виде суммы

$$z_0(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n}(z_{2k-1}^{(0)}(t)e^{\tau_{2k-1}}+z_{2k}^{(0)}(t)e^{\tau_{2k}})+z_0^{(0)}(t). \tag{10}$$

Подставив эту сумму в систему (9_0), будем иметь

$$-\int_0^t G(t,s)z_0^{(0)}(s)ds=g\left(t\right),$$

откуда получим $z_0^{(0)}(t)\equiv -h\left(t\right)$, при этом функции $z_j^{(0)}(t)$ (при $j=\overline{1,2n}$) пока произвольны. Подчинив (10) начальному условию $z_0(0,0)=0$, приходим к равенству

$$\sum_{k=1}^{n}(z_{2k-1}^{(0)}(0)+z_{2k}^{(0)}(0))=-z_0^{(0)}\left(0\right). \tag{11}$$

Переходим к задаче (9_1). Определив решение этой задачи в пространстве U в виде суммы

$$z_1(t,\tau)=\sum_{k=1}^{n}(z_{2k-1}^{(1)}(t)e^{\tau_{2k-1}}+z_{2k}^{(1)}(t)e^{\tau_{2k}})+z_0^{(1)}(t), \tag{12}$$

получим уравнение

$$\begin{gathered}-\int_0^t G(t,s)z_0^{(1)}(s)ds=-\sum_{k=1}^{n}\left(\mu_{2k-1}\left(t\right)z_{2k-1}^{(0)}\left(t\right)e^{\tau_{2k-1}}+\mu_{2k}\left(t\right)z_{2k}^{(0)}\left(t\right)e^{\tau_{2k}}\right)+\\ +\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{G\left(t,t\right)z_{2k-1}^{(0)}\left(t\right)}{\mu_{2k-1}\left(t\right)}e^{\tau_{2k-1}}+\frac{G\left(t,t\right)z_{2k}^{(0)}\left(t\right)}{\mu_{2k}\left(t\right)}e^{\tau_{2k}}\right)-\\ -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{G\left(0,t\right)z_{2k-1}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k-1}\left(0\right)}+\frac{G\left(0,t\right)z_{2k}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k}\left(0\right)}\right).\end{gathered}$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, будем иметь

$$\int_0^t G(t,s)z_0^{(1)}(s)ds=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{G\left(0,t\right)z_{2k-1}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k-1}\left(0\right)}+\frac{G\left(0,t\right)z_{2k}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k}\left(0\right)}\right), \tag{13}$$

$$\left[-\mu_{2k-1}\left(t\right)I+\frac{K\left(t,t\right)}{\mu_{2k-1}\left(t\right)}\right]z_{2k-1}^{(0)}\left(t\right)=0,\quad \left[-\mu_{2k}\left(t\right)I+\frac{K\left(t,t\right)}{\mu_{2k}\left(t\right)}\right]z_{2k}^{(0)}\left(t\right)=0. \tag{14}$$

Уравнение (13) разрешимо в пространстве $C^{\infty}\left(\left[0,T\right],\mathbb{C}^n\right)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{G\left(0,0\right)z_{2k-1}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k-1}\left(0\right)}+\frac{G\left(0,0\right)z_{2k}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k}\left(0\right)}\right)=0\ \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{K\left(0,0\right)z_{2k-1}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k-1}\left(0\right)}+\frac{K\left(0,0\right)z_{2k}^{(0)}\left(0\right)}{\mu_{2k}\left(0\right)}\right)=0.\end{gathered} \tag{15}$$

При этом система (13) имеет единственное решение $z_0^{(1)}(t)\in C^{\infty}\left(\left[0,T\right],\mathbb{C}^n\right)$.

Из систем (14) находим (учитывая соотношения $\mu_{2k-1}^2(t) = \mu_{2k}^2(t) = \lambda_k(t)$, $\mu_{2k-1}(t) = -\mu_{2k}(t)$)

$$z_{2k-1}^{(0)}(t) = \alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t), \quad z_{2k}^{(0)}(t) = \beta_k^{(0)}(t)\varphi_k(t), \quad k = \overline{1,n}, \tag{16}$$

где $\alpha_k^{(0)}(t)$, $\beta_k^{(0)}(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right)$ произвольны, а $\varphi_j(t)$ — “$\lambda_j(t)$”-собственный вектор матрицы $K(t,t)$, $j = \overline{1,n}$. Подставив (16) в (15), получим систему

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{\lambda_k(0)\alpha_k^{(0)}(0)}{\mu_{2k-1}(0)} + \frac{\lambda_k(0)\beta_k^{(0)}(0)}{\mu_{2k}(0)}\right]\varphi_k(0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n [\mu_{2k-1}(0)\alpha_k^{(0)}(0) + \mu_{2k}(0)\beta_k^{(0)}(0)]\varphi_k(0) = 0,$$

из которой выводим равенства

$$\alpha_k^{(0)}(0) - \beta_k^{(0)}(0) = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Подстановка функций $z_{2k-1}^{(0)}(t) = \alpha_k^{(0)}(t)\varphi_k(t)$, $z_{2k}^{(0)}(t) = \beta_k^{(0)}(t)\varphi_k(t)$ в (11) приводит к уравнению

$$\sum_{k=1}^n [\alpha_k^{(0)}(0) + \beta_k^{(0)}(0)]\varphi_k(0) = -z_0^{(0)}(0) \Leftrightarrow \alpha_k^{(0)}(0) + \beta_k^{(0)}(0) = -(z_0^{(0)}(0), \chi_k(0)). \tag{18}$$

Из (17) и (18) находим начальные значения

$$\alpha_k^{(0)}(0) = \beta_k^{(0)}(0) = -\frac{1}{2}(z_0^{(0)}(0), \chi_k(0)), \quad k = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Для решений (10) и (12) итерационных задач (9_0) и (9_1) в пространстве U найдены функции $z_0^{(0)}(t) \equiv -h(t)$ и $z_0^{(1)}(t) \in C^\infty([0,T], \mathbb{C}^n)$, а также вектор-функции (16), где $\alpha_k^{(0)}(t), \beta_k^{(0)}(t) \in C^\infty\left([0,T], \mathbb{C}^1\right)$ определены лишь в точке $t = 0$ равенствами (19), в остальном же эти функции произвольны. Окончательное вычисление функций $\alpha_k^{(0)}(t)$, $\beta_k^{(0)}(t)$ произойдет при решении задачи (9_2).

Определяя решение задачи (9_2) в пространстве U в виде суммы

$$z_2(t,\tau) = \sum_{k=1}^n (z_{2k-1}^{(2)}(t)e^{\tau_{2k-1}} + z_{2k}^{(2)}(t)e^{\tau_{2k}}) + z_0^{(2)}(t), \tag{20}$$

получим систему

$$-\int_0^t G(t,s)z_0^{(2)}(s)ds = -\sum_{k=1}^n \Bigg\{\left(\dot{z}_{2k-1}^{(0)}(t)e^{\tau_{2k-1}} + \dot{z}_{2k}^{(0)}(t)e^{\tau_{2k}}\right) -$$

$$-\left(\mu_{2k-1}(t)z_{2k-1}^{(1)}(t)e^{\tau_{2k-1}} + \mu_{2k}(t)z_{2k}^{(1)}(t)e^{\tau_{2k}}\right) +$$

$$+\left(\frac{G(t,t)z_{2k-1}^{(1)}(t)}{\mu_{2k-1}(t)}e^{\tau_{2k-1}} + \frac{G(t,t)z_{2k}^{(1)}(t)}{\mu_{2k}(t)}e^{\tau_{2k}}\right) -$$

$$-\left(\frac{G(0,t)z_{2k-1}^{(1)}(0)}{\mu_{2k-1}(0)} + \frac{G(0,t)z_{2k}^{(1)}(0)}{\mu_{2k}(0)}\right) -$$

$$-\left[\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)z_{2k-1}^{(0)}(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t}e^{\tau_{2k-1}} + \frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)z_{2k}^{(0)}(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}e^{\tau_{2k}}\right] +$$

$$+\left[\frac{1}{\mu_{2k-1}(0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k-1}^{(0)}(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=0}+\frac{1}{\mu_{2k}(0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k}^{(0)}(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=0}\right]\Bigg\}.$$

Приравнивая здесь отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых экспонентах, будем иметь

$$-\int_0^t G(t,s)z_0^{(2)}(s)ds=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{G(0,t)\,z_{2k-1}^{(1)}(0)}{\mu_{2k-1}(0)}+\frac{G(0,t)\,z_{2k}^{(1)}(0)}{\mu_{2k}(0)}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\mu_{2k-1}(0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k-1}^{(0)}(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=0}+\frac{1}{\mu_{2k}(0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k}^{(0)}(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=0}\right],\quad (21)$$

$$\mu_{2k-1}(t)\,z_{2k-1}^{(1)}(t)-\frac{G(t,t)\,z_{2k-1}^{(1)}(t)}{\mu_{2k-1}(t)}=-\dot z_{2k-1}^{(0)}(t)-\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k-1}^{(0)}(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t},$$
$$\mu_{2k}(t)\,z_{2k}^{(1)}(t)-\frac{G(t,t)\,z_{2k}^{(1)}(t)}{\mu_{2k}(t)}=-\dot z_{2k}^{(0)}(t)-\frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k}^{(0)}(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}.\quad (22)$$

Учитывая, что $\mu_{2k-1}^2(t)=\mu_{2k}^2(t)=\lambda_k(t)-$ собственные значения матрицы $K(t,t)$, получаем, что для разрешимости системы (22) в пространстве $C^\infty([0,T],\mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(-\dot z_{2k-1}^{(0)}(t)-\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k-1}^{(0)}(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t},\chi_k(t)\right)\equiv 0,$$
$$\left(-\dot z_{2k}^{(0)}(t)-\frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,z_{2k}^{(0)}(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t},\chi_k(t)\right)\equiv 0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Подставляя сюда $z_{2k-1}^{(0)}(t)$ и $z_{2k}^{(0)}(t)$ из (16) и учитывая $\mu_{2k-1}^2(t)\equiv\mu_{2k}^2(t)\equiv\lambda_k(t)$, перепишем эти уравнения в виде

$$\left[I+\frac{K(t,t)}{\lambda_k(t)}\right]\frac{d}{dt}(\alpha_k(t)\varphi_k(t))+\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t}(\alpha_k(t)\varphi_k(t),\chi_k(t))=0,$$
$$\left[I+\frac{K(t,t)}{\lambda_k(t)}\right]\frac{d}{dt}(\beta_k(t)\varphi_k(t))+\frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}(\alpha_k(t)\varphi_k(t),\chi_k(t))=0.$$

Поскольку $\left(I+\frac{K(t,t)}{\lambda_k(t)}\right)^*\chi_k(t)=\chi_k(t)+\frac{K^*(t,t)\chi_k(t)}{\overline{\lambda}_k(t)}=\chi_k(t)+\frac{\overline{\lambda}_k(t)\chi_k(t)}{\overline{\lambda}_k(t)}=2\chi_k(t)$, то последние уравнения записываются в форме

$$2\frac{d}{dt}(\alpha_k(t)\varphi_k(t),\chi_k(t))+\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}+\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t}\alpha_k(t)\varphi_k(t),\chi_k(t)\right)=0,$$
$$2\frac{d}{dt}(\beta_k(t)\varphi_k(t),\chi_k(t))+\frac{1}{\mu_{2k}(t)}+\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}\beta_k(t)\varphi_k(t),\chi_k(t)\right)=n_k(t).$$

Раскрывая здесь скалярное произведение, получим однородные дифференциальные уравнения

$$\dot\alpha_k^{(0)}+\left(\dot\varphi_k(t)+\frac{1}{2\mu_{2k-1}(t)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t}\varphi_k(t),\chi_k(t)\right)\right)\alpha_k^{(0)}=0,$$
$$\dot\beta_k^{(0)}+\left(\dot\varphi_k(t)+\frac{1}{2\mu_{2k}(t)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}\varphi_k(t),\chi_k(t)\right)\right)\beta_k^{(0)}=0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Обозначив коэффициенты, стоящие перед $\alpha_k^{(0)}$ и $\beta_k^{(0)}$ через $p_k(t)$ и $q_k(t)$ соответственно и учитывая начальные условия (19), найдем функции

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(0)}(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\int_0^t p_k(\theta)d\theta}(z_0^{(0)}(0), \chi_k(0)), \\ \beta_k^{(0)}(t) &= -\frac{1}{2}e^{-\int_0^t q_k(\theta)d\theta}(z_0^{(0)}(0), \chi_k(0)), \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{23}$$

Следовательно, решение первой итерационной задачи (9_0) будет иметь вид

$$z_0(t, \tau) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(e^{-\int_0^t p_k(\theta)d\theta+\tau_{2k-1}} + e^{-\int_0^t q_k(\theta)d\theta+\tau_{2k}})(z_0^{(0)}(0), \chi_k(0))\varphi_k(t) + z_0^{(0)}(t), \tag{24}$$

где функции $z_0^{(0)}(t) = -h\,(t)$,

$$\begin{aligned} p_k(t) &\equiv \left(\dot{\varphi}_k(t) + \frac{1}{2\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t, s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t}\varphi_k(t), \chi_k(t)\right), \\ q_k(t) &\equiv \left(\dot{\varphi}_k(t) + \frac{1}{2\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t, s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}\varphi_k(t), \chi_k(t)\right), \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{25}$$

Желая изучить предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в исходной системе (1), рассмотрим вырожденную по отношению к (1) систему

$$0 = \int_0^t (t - s)K(t, s)\overline{y}(s)ds + h(t). \tag{26}$$

Если эта система имеет решение $y = \overline{y}(t) \in C([0, T], \mathbb{C}^n)$, то необходимо выполняются условия $h(0) = \dot{h}(0) = 0$. Действительно, полагая в (26) $t = 0$, получаем $h(0) = 0$. Дифференцируя (26) по t, получим

$$0 = \int_0^t \left(K(t, s) + (t - s)\frac{\partial K(t, s)}{\partial t}\right)\overline{y}(s)ds + \dot{h}(t).$$

При $t = 0$ будем иметь $\dot{h}(0) = 0$. Дальнейшее дифференцирование приведет к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое при дважды непрерывно дифференцируемом на множестве $\{0 \le s \le t \le T\}$ ядре $K(t, s)$ и $h(t) \in C^2(0 \le s \le t \le T, \mathbb{C}^n)$ имеет единственное решение $y = \overline{y}(t) \in C([0, T], \mathbb{C}^n)$. Обратные преобразования с учетом условий $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ приведут к уравнению (26). Таким образом, условия $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ (при наличии гладкости функций $K(t, s)$ и $h(t)$) необходимы и достаточны для существования решения предельной системы (26). В этом случае, как это видно из (23) и (24), функции $\alpha_k^{(0)}(t) \equiv 0$ и $\beta_k^{(0)}(t) \equiv 0$, а решение первой итерационной задачи (9_0) будет иметь вид $z_0(t, \tau) = -h\,(t)$ (т. е. $z_{2k-1}^{(0)}\,(t) \equiv z_{2k}^{(0)}\,(t) \equiv 0$). Итерационные системы (9_1)–(9_3) перепишутся в виде

$$-R_0 z_1 = 0, \quad z_1(0, 0) = 0; \tag{27_1}$$

$$-R_0 z_2 = \dot{h}\,(t) - Lz_1 + R_1 z_1, \quad z_2(0, 0) = 0; \tag{27_2}$$

$$-R_0 z_3 = -\frac{\partial z_1}{\partial t} - Lz_2 + R_1 z_2 + R_2 z_1, \quad z_3\,(0, 0) = 0. \tag{27_3}$$

Так как правая часть системы (13) будет тождественно равна нулю, то в решении (12) системы (27_1) функция $z_0^{(-1)}\,(t) \equiv 0$.

При $z_{2k-1}^{(0)}(t) \equiv z_{2k}^{(0)}(t) \equiv 0$ уравнения (22) принимают вид

$$\mu_{2k-1}(t)\, z_{2k-1}^{(1)}(t) - \frac{K(t,t)\, z_{2k-1}^{(1)}(t)}{\mu_{2k-1}(t)} = 0, \quad \mu_{2k}(t)\, z_{2k}^{(1)}(t) - \frac{K(t,t)\, z_{2k}^{(1)}(t)}{\mu_{2k}(t)} = 0,$$

и поэтому вектор-функции $z_{2k-1}^{(1)}(t)$ и $z_{2k}^{(1)}(t)$ вычисляются с точностью до скалярных множителей: $z_{2k-1}^{(1)}(t) = \alpha_k^{(1)}(t)\,\varphi_k(t)$, $z_{2k}^{(1)}(t) = \beta_k^{(1)}(t)\,\varphi_k(t)$, $k = \overline{1,n}$. Условие $z_1(0,0) = 0$ дает

$$\sum_{k=1}^{n} [\alpha_k^{(1)}(0) + \beta_k^{(1)}(0)]\varphi_k(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k^{(1)}(0) + \beta_k^{(1)}(0) = 0. \tag{28}$$

При $z_{2k-1}^{(1)}(t) = \alpha_{2k-1}^{(1)}(t)\,\varphi_k(t)$, $z_{2k}^{(1)}(t) = \beta_k^{(1)}(t)\,\varphi_k(t)$, $z_{2k-1}^{(0)}(t) \equiv z_{2k}^{(0)}(t) \equiv 0$ система (21) принимает вид

$$-\int_0^t G(t,s) z_0^{(2)}(s) ds = \dot{h}(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{G(0,t)\,\alpha_k^{(1)}(t)\,\varphi_k(0)}{\mu_{2k-1}(0)} + \frac{G(0,t)\,\beta_k^{(1)}(0)\,\varphi_k(0)}{\mu_{2k}(0)} \right).$$

Эта система разрешима в пространстве $C^\infty([0,T], \mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{G(0,0)\,\alpha_k^{(1)}(0)\,\varphi_k(0)}{\mu_{2k-1}(0)} + \frac{G(0,0)\,\beta_k^{(1)}(0)\,\varphi_k(0)}{\mu_{2k}(0)} \right) = \dot{h}(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{K(0,0)\,\alpha_k^{(1)}(0)\,\varphi_k(0)}{\mu_{2k-1}(0)} + \frac{K(0,0)\,\beta_k^{(1)}(0)\,\varphi_k(0)}{\mu_{2k}(0)} \right) = \dot{h}(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\mu_{2k-1}(0)\,\alpha_k^{(1)}(0) + \mu_{2k}(0)\,\beta_k^{(1)}(0) \right) \varphi_k(0) = \dot{h}(0).$$

Умножая это равенство скалярно на $\chi_j(t)$, получим уравнения

$$\mu_{2k-1}(0)\,\alpha_k^{(1)}(0) + \mu_{2k}(0)\,\beta_k^{(1)}(0) = \left(\dot{h}(0), \chi_k(0)\right), \quad k = \overline{1,n}.$$

Из этих уравнений и условий (28) следует $\alpha_k^{(1)}(0) = -\beta_k^{(1)}(0) = -\frac{(\dot{h}(0),\chi_k(0))}{2\mu_{2k}(0)}$.

Таким образом, решение итерационной задачи (27_1) найдено в виде

$$z_1(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n} \left[\alpha_k^{(1)}(t)\,\varphi_k(t)\,e^{\tau_{2k-1}} + \beta_k^{(1)}(t)\,e^{\tau_{2k}}\right],$$

где $\alpha_k^{(1)}(0) = -\beta_k^{(1)}(0) = -\frac{(\dot{h}(0),\chi_k(0))}{2\mu_{2k}(0)}$. Так как выполнено условие $\dot{h}(0) = 0$, то $\alpha_k^{(1)}(0) = \beta_k^{(1)}(0) = 0$. Для окончательного вычисления $z_1(t,\tau)$ надо перейти к итерационной системе (27_3) (жирной точкой обозначено дифференцирование по t)

$$-\int_0^t G(t,s) z_0^{(3)}(s) ds = -\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\alpha_k^{(1)}(t)\varphi_k(t)\right)^{\bullet} e^{\tau_{2k-1}} + \left(\beta_k^{(1)}(t)\varphi_k(t)\right)^{\bullet} e^{\tau_{2k}} \right) -$$

$$-\left\{ \left(\mu_{2k-1}(t) z_{2k-1}^{(2)}(t) e^{\tau_{2k-1}} + \mu_{2k}(t) z_{2k}^{(2)}(t) e^{\tau_{2k}}\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{G(t,t) z_{2k-1}^{(2)}(t)}{\mu_{2k-1}(t)} e^{\tau_{2k-1}} + \frac{G(t,t) z_{2k}^{(2)}(t)}{\mu_{2k}(t)} e^{\tau_{2k}} \right) - \left(\frac{G(t,0) z_{2k-1}^{(2)}(0)}{\mu_{2k-1}(0)} + \frac{G(t,0) z_{2k}^{(2)}(0)}{\mu_{2k}(0)} \right) -$$

$$-\left[\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\alpha_k^{(1)}(s)\varphi_s(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t}e^{\tau_{2k-1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,\beta_k^{(1)}(s)\,\varphi_s(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}e^{\tau_{2k}}\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{\mu_{2k-1}(0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,\alpha_k^{(1)}(s)\,\varphi_s(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=0}+\frac{1}{\mu_{2k}(0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,\beta_k^{(1)}(s)\,\varphi_s(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=0}\right]\Bigg\}.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим системы

$$\mu_{2k-1}(t)\,z_{2k-1}^{(2)}(t)-\frac{G(t,t)\,z_{2k-1}^{(2)}(t)}{\mu_{2k-1}(t)}=-\left(\alpha_k^{(1)}(t)\,\varphi_s(t)\right)^{\bullet}-$$
$$-\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,\alpha_k^{(1)}(s)\,\varphi_s(s)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t},$$

$$\mu_{2k}(t)\,z_{2k}^{(2)}(t)-\frac{G(t,t)\,z_{2k}^{(2)}(t)}{\mu_{2k}(t)}=-\left(\beta_k^{(1)}(t)\,\varphi_s(t)\right)^{\bullet}-\frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,\beta_k^{(1)}(s)\,\varphi_s(s)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t}.$$

Для разрешимости этой системы относительно неизвестных вектор-функций $z_j^{(2)}(t)\in C^{\infty}([0,T],\mathbb{C}^n)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(-\left(\alpha_k^{(1)}(t)\,\varphi_s(t)\right)^{\bullet}-\frac{1}{\mu_{2k-1}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{G(t,s)\,\alpha_k^{(1)}(t)\,\varphi_s(t)}{\mu_{2k-1}(s)}\right)_{s=t},\chi_k(t)\right)\equiv 0,$$
$$\left(-\left(\beta_k^{(1)}(t)\,\varphi_s(t)\right)^{\bullet}-\frac{1}{\mu_{2k}(t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\frac{\beta_k^{(1)}(t)\,\varphi_s(t)}{\mu_{2k}(s)}\right)_{s=t},\chi_k(t)\right)\equiv 0,\quad k=\overline{1,n}.$$

Получена однородная дифференциальная система относительно неизвестных функций $\alpha_k^{(1)}(t)$ и $\beta_k^{(1)}(t)$. Так как $\alpha_k^{(1)}(0)=\beta_k^{(1)}(0)=0$, то отсюда находим $\alpha_k^{(1)}(t)=\beta_k^{(1)}(t)\equiv 0$, а значит, $z_1(t,\tau)\equiv 0$. Но тогда решение $z_2(t,\tau)$ определяется из тройки систем

$$-R_0z_2=\dot{h}(t),\quad z_2(0,0)=0;$$
$$-R_0z_3=Lz_2+R_1z_2,\quad z_3(0,0)=0;$$
$$-R_0z_4=-\frac{\partial z_2}{\partial t}-Lz_3+R_1z_3+R_2z_2,\quad z_4(0,0)=0.$$

Эта тройка в точности совпадает с тройкой систем (9_0)–(9_2), если в ней положить $g(t)=\dot{h}(t)$. Поэтому решение $z_2(t,\tau)$ будет иметь вид (см. (24))

$$z_2(t,\tau)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-\int_0^t p_k(\theta)d\theta+\tau_{2k-1}}+e^{-\int_0^t q_k(\theta)d\theta+\tau_{2k}}\right)(z_0^{(2)}(0),\chi_k(0))\varphi_k(t)+z_0^{(2)}(t),\qquad(29)$$

где $z_2^{(0)}(t)$ является решением интегральной системы $-\int\limits_0^t G(t,s)z_2^{(0)}(s)ds=\dot{h}(t)$ или эквивалентной ей системы (26). Дифференцируя последнюю систему по t, получаем уравнение

$$-K(t,t)z_2^{(0)}(t)-\int_0^t\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}z_2^{(0)}(s)ds=\ddot{h}(t).$$

Отсюда видно, что $z_2^{(0)}(0) = -K^{-1}(0,0)\ddot{h}(0)$, поэтому если $\ddot{h}(0) \neq 0$, то в функции $z_2(t, \frac{\psi}{\varepsilon})$ (см. (29)) присутствует по крайней мере один из множителей

$$e^{-\int_0^t p_k(\theta)d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_{2k-1}(\theta)d\theta} + e^{-\int_0^t q_k(\theta)d\theta + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_{2k}(\theta)d\theta},$$

причем $p_k(t)$ и $q_k(t)$ — действительные функции (см. (25)). Этот множитель быстро осциллирует при $\varepsilon \to +0$, поэтому предельный переход $z_2(t, \frac{\psi}{\varepsilon}) \rightrightarrows z_2^{(0)}(t) \equiv \overline{y}(t)$ при $\varepsilon \to +0 (t \in [0,T])$ невозможен. Если же $\ddot{h}(0) = 0$, то $z_2(t,\tau) \equiv z_2^{(0)}(t)$, и указанный предельный переход имеет место. Очевидно и обратное: если $z_2(t, \frac{\psi}{\varepsilon}) \rightrightarrows \overline{y}(t) (\varepsilon \to +0)$ на $[0,T]$, то $\ddot{h}(0) = 0$.

При условиях 1)–2) можно построить главный член асимптотического решения задачи (1) ([2]), который в силу равенства $y = \varepsilon^{-2}(z + h(t))$ можно записать в виде

$$y_{\varepsilon 0}(t) = \frac{h(t) + z_0(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon})}{\varepsilon^2} + \frac{z_1(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon})}{\varepsilon} + z_2\left(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right). \tag{30}$$

При этом $||y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon 0}(t)||_{C[0,T]} \leq c_0\varepsilon$. При выполнении равенств $h(0) = \dot{h}(0) = 0$ будем иметь $z_0(t,\tau) = -h(t)$, $z_1(t,\tau) \equiv 0$, поэтому из (30) следует, что главный член асимптотики задачи (1) записывается в виде $y_{\varepsilon 0}(t) = z_2(t, \frac{\psi(t)}{\varepsilon})$. Из предыдущих рассуждений вытекает

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1), 2) *и* $h(0) = \dot{h}(0) = 0$. *Для того чтобы решение* $y(t,\varepsilon)$ *задачи* (1) *сходилось* (*при* $\varepsilon \to +0$) *к решению* $y = \overline{y}(t)$ *предельной системы* (26) (*равномерно по* $t \in [0,T]$), *необходимо и достаточно, чтобы* $\ddot{h}(0) = 0$.

В качестве примера рассмотрим скалярное уравнение

$$\varepsilon^2 y = -\int_0^t (t-s)y(s)ds + h(t), \quad t \in [0,T]. \tag{31}$$

Это уравнение легко решается. Действительно, дифференцируя дважды уравнение (31), будем иметь

$$\varepsilon^2 \frac{dy}{dt} = -\int_0^t y(s)ds + \dot{h}(t), \quad y(0,\varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon^2},$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2y}{dt^2} + y = \ddot{h}(t), \quad y(0,\varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon^2}, \quad \dot{y}(0,\varepsilon) = \frac{\dot{h}(0)}{\varepsilon^2}.$$

Решением этой задачи является функция

$$y(t,\varepsilon) = \left(\frac{h(0)}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \ddot{h}(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\cos\frac{t}{\varepsilon} + \left(\frac{\dot{h}(0)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \ddot{h}(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\sin\frac{t}{\varepsilon},$$

которую после интегрирования по частям можно записать в форме

$$y(t,\varepsilon) = \frac{h(0)}{\varepsilon^2}\cos\frac{t}{\varepsilon} + \frac{\dot{h}(0)}{\varepsilon}\sin\frac{t}{\varepsilon} + \ddot{h}(t) - \ddot{h}(0)\cos\frac{t}{\varepsilon} + $$
$$+ \left(\int_0^t \dddot{h}(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\cos\frac{t}{\varepsilon} + \left(\int_0^t \dddot{h}(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\sin\frac{t}{\varepsilon}. \tag{32}$$

Предельным уравнением по отношению к (31) будет $-\int\limits_0^t (t-s)\overline{y}(s)ds + h(t) = 0$. Оно имеет очевидное решение $\overline{y} = \ddot{h}(t)$ при условиях $h(0) = \dot{h}(0) = 0$. При этих же условиях (32) принимает вид

$$y(t,\varepsilon) = -\ddot{h}(0)\cos\frac{t}{\varepsilon} + \left(\int_0^t \dddot{h}(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\cos\frac{t}{\varepsilon} + \left(\int_0^t \dddot{h}(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\sin\frac{t}{\varepsilon}. \tag{33}$$

Еще одно интегрирование по частям показывает, что

$$\left(\int_0^t \dddot{h}(\theta)\cos\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\cos\frac{t}{\varepsilon}+\left(\int_0^t \dddot{h}(\theta)\sin\frac{\theta}{\varepsilon}d\theta\right)\sin\frac{t}{\varepsilon}\to 0 \ \ (\varepsilon\to +0)$$

равномерно по $t\in[0,T]$. Однако если $\ddot{h}(0)\neq 0$, то в (33) слагаемое $-\ddot{h}(0)\cos\frac{t}{\varepsilon}$ не имеет предела при $\varepsilon\to +0$ и $t\in[0,T]$. Таким образом, условие $\ddot{h}(0)=0$ является необходимым и достаточным для наличия предельного перехода $y(t,\varepsilon)\rightrightarrows\overline{y}(t)$ при $\varepsilon\to +0$ на отрезке $[0,T]$. Если же $\ddot{h}(0)\neq 0$, то точное решение $y(t,\varepsilon)$ уравнения (31) сходится при $\varepsilon\to +0$ к предельному $\overline{y}(t)$ не равномерно, а в норме $L_1[0,T]$. При этом $y(t,\varepsilon)$ совершает около предельного решения $\overline{y}(t)$ быстрые осцилляции. Нарушение же хотя бы одного из условий $h(0)=0$ или $\dot{h}(0)=0$ приводит к тому, что указанные осцилляции при $\varepsilon\to +0$ имеют бесконечную амплитуду, в частности, она равна $\frac{h(0)}{\varepsilon^2}$ при $t=0$, что можно установить непосредственно из уравнения (31).

Для существования предельного перехода $y(t,\varepsilon)\rightrightarrows\overline{y}(t)$ при $\varepsilon\to +0$ условия гладкости 1) завышены. Из предыдущих рассуждений следует, что для этого достаточно потребовать, чтобы ядро $K(t,s)$ было дважды непрерывно дифференцируемым на множестве $\{0\le s\le t\le T\}$, а функция $h(t)\in \mathrm{C}^2([0,T],\mathbb{C}^n)$.

Литература

[1] Иманалиев М.И. *Методы решения нелинейных обратных задач и их приложения* (Илим, Фрунзе, 1977).

[2] Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. *Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных интегральных систем с диагональным вырождением ядра*, Дифференц. уравнения **37** (10), 1330–1341 (2001).

[3] Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений* (Наука, М., 1981).

[4] Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя* (Изд-во Московск. ун-та, М., 2011).

Машхура Абдухафизовна Бободжанова

Национальный исследовательский университет (МЭИ),
ул. Красноказарменная, д. 14, г. Москва, 111250, Россия,

e-mail: bobojanovama@mpei.ru

Олим Джураевич Туйчиев

Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова,
проезд Мавлонбекова, д. 1, г. Худжанд, 735700, Республика Таджикистан,

e-mail: tuychievolim67@mail.ru

Дарья Алексеевна Шапошникова

Национальный исследовательский университет (МЭИ),
ул. Красноказарменная, д. 14, г. Москва, 111250, Россия,

e-mail: shaposhnikovada@mail.ru

M.A. Bobodzhanova, O.D. Tuichiev, and D.A. Shaposhnikova

Substantiation of a theorem on limit transition in singularly perturbed integral system with diagonal degeneration of a kernel

Abstract. We study a problem of limit transition (as the small parameter tends to zero) in integral singularly perturbed system with diagonal degeneration of a kernel. In the proof of the corresponding theorem on the limit transition we essentially use the structure of the main term of asymptotic behavior, the construction of which is performed by use of algorithm of regularization method developed by S.A. Lomov for integro-differential equations. The spectrum of the operator responsible for the regularization is composed of purely imaginary points, therefore the passage to the limit in the classical sense (i. e. in a continuous metric) in general case is impossible. In work we allocate the class of right parts in which a uniform transition in the classical sense will take place.

Keywords: singularly perturbed operator, diagonal degeneration of the kernel, limit solution.

Mashkhra Abdukhafizovna Bobodzhanova

National Research University (MPEI),
14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250 Russia,

`e-mail:` bobojanovama@mpei.ru

Olim Dzhuraevich Tuichiev

Khujand State University named after B. Gafurov,
1 Mavlonbekov passage, Khujand, 735700 Tajikistan,

`e-mail:` tuychievolim67@mail.ru

Dar'ya Alekseevna Shaposhnikova

National Research University (MPEI),
14 Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250 Russia,

`e-mail:` shaposhnikovada@mail.ru