Известия вузов. Математика *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
2013, №8, с. 3–13 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

В.А. АНТОНОВ, Т.Г. НОЖКИНА

О ГРУППАХ С ОТНОСИТЕЛЬНО МАЛЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ БИПРИМАРНЫХ ПОДГРУПП

Аннотация. Исследуются группы, в которых для любой бипримарной или непримарной подгруппы выполняется условие: индекс произведения этой подгруппы на ее централизатор в нормализаторе этой подгруппы делится на некоторое, фиксированное для данной группы простое число. Получено полное описание таких групп.

Ключевые слова: группа, подгруппа, бипримарная подгруппа, непримарная погруппа, централизатор, нормализатор, индекс.

УДК: 512.54

Пусть S — некоторое групповое свойство, $S(G)$ — множество всех подгрупп группы G, удовлетворяющих свойству S. Группу G, в которой для любой подгруппы $A \in S(G)$ выполняется условие

$$|N(A) : A \cdot C(A)| \text{ делит } p, \tag{$*$}$$

где p — фиксированное простое число, $N(A) = N_G^{(*)}(A)$, $C(A) = C_G(A)$, назовем NSp-группой.

Целью данной работы является исследование конечных NSp-групп в случаях, когда $S(G)$ совпадает с множеством всех бипримарных или всех непримарных подгрупп группы G. В работе [1] исследованы локально конечные группы, в которых для любой непримарной подгруппы A выполняется равенство $N(A) = A \cdot C(A)$, в [2] рассмотрен случай $p = 2$. Поэтому в дальнейшем считаем, что p — нечетное простое число.

Конечную p-группу G условимся называть (p, n)-группой, если G обладает абелевой максимальной подгруппой T и фактор-группа $G/Z(G)$ является группой максимального класса n.

В дальнейшем через (x) обозначается циклическая подгруппа, порожденная элементом $x \in G$.

Лемма. *В неабелевой конечной p-группе G в том и только том случае условие $(*)$ выполняется для любой подгруппы A, когда G является (p, n)-группой для некоторого числа n.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — максимальная абелева подгруппа группы G. Тогда индекс $|N(A) : A|$ делит p. Так как группа G неабелева, то из $N(A) > A$ следует $|N(A) : A| = p$. Предположим, что A — максимальная инвариантная абелева подгруппа группы G. Тогда A является максимальной абелевой подгруппой и, следовательно, $G = A \cdot (b)$, где $b^p \in A$.

Поступила 08.06.2012

Подгруппа $B = (b) \cdot Z(G)$ является максимальной абелевой подгруппой группы G. Поэтому $|N(B) : B| = p$. Так как

$$N_{G/Z(G)}(B/Z(G)) = N(B)/Z(G),$$

то $|N_{G/Z(G)}(B/Z(G))| = p^2$, и из $|B/Z(G)| = p$ следует

$$N_{G/Z(G)}(B/Z(G)) = C_{G/Z(G)}(B/Z(G)),$$

т. е. $|C_{G/Z(G)}(B/Z(G))| = p^2$. Если R — такая подгруппа из G, что

$$R/Z(G) = C_{G/Z(G)}(B/Z(G)),$$

то $|R/Z(G)| = p^2$ и $C_{G/Z(G)}(R/Z(G)) = R/Z(G)$. В силу максимальности подгруппы B фактор-группа $R/Z(G)$ не является циклической группой. Как известно (например, предложение 1.16 из [3]), конечная p-группа, обладающая самоцентрализуемой элементарной абелевой подгруппой порядка p^2, является группой максимального класса. Поэтому $G/Z(G)$ — группа максимального класса, и G является (p, n)-группой для некоторого числа n.

Достаточность. Пусть A — произвольная подгруппа из G. Если A лежит в абелевой максимальной подгруппе T, то $C(A) \geq T$ и, следовательно, индекс $|G : C(A)|$ делит p. Если же $b \in A$, то

$$|N_{G/Z(G)}(A \cdot Z(G)/Z(G)) : (A \cdot Z(G))/Z(G)| = p,$$

и остается заметить, что $N(A) \leq N(A \cdot Z(G))$ и $A \cdot C(A) \geq A \cdot Z(G)$. $\square$

В следующей теореме q и r — простые числа.

Теорема 1. *Пусть $S(G)$ совпадает с множеством всех бипримарных подгрупп группы G. Конечная разрешимая группа G в том и только том случае является NSp-группой, когда выполняется один из следующих случаев:*

1) *G — примарная группа;*

2) *G —абелева непримарная группа;*

3) *$G = K \times H$, K — неединичная абелева группа, а силовская p-подгруппа H группы G является (p, n)-группой;*

4) *$G = K\lambda H$, группа K абелева, силовская p-подгруппа H либо абелева, либо является (p, n)-группой, подгруппа $C_H(K)$ абелева и максимальна в H;*

5) *$G = F\lambda(x)$, F является q-группой, $|x| = r \neq q$, $C(x)$ абелев, совпадает со своим нормализатором, и для любой x-допустимой подгруппы H из F выполняется равенство*

$$F \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x));$$

6) *$G = F\lambda(x)$, F — неабелева силовская p-подгруппа, $|x| = q \neq p$, и для любой x-допустимой подгруппы H из F индекс*

$$|(F \cap C(x)) : (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x))|$$

делит p;

7) *$G = F\lambda(x)$, F является q-группой, $q \neq p$, $|x| = p^2$, и если $y = x^\alpha \neq 1$, то для любой y-допустимой подгруппы H из F выполняется равенство*

$$F \cap C(y) = (H \cap C(y)) \cdot (C_F(H) \cap C(y));$$

8) *$G = F\lambda((x) \times (y))$, F — силовская q-подгруппа из G, $|x| = |y| = p$, и если H — R-допустимая подгруппа из F, где R — неединичная подгруппа из $(x) \times (y)$, то*

$$F \cap C(R) = (H \cap C(R)) \cdot (C_F(H) \cap C(R));$$

9) $G = F\lambda((x)\lambda(y))$, F — *силовская* q-*подгруппа из* G, $|x| = r$, $|y| = p$, $xy \neq yx$, *и для любого неединичного элемента* $a \in (x)\lambda(y)$ *подгруппа* $F\lambda(a)$ *является группой типа* 5) *из условия теоремы*;

10) $G = (F\lambda(x))\cdot(y)$, $|x| = q$, $y^p \in F$, $F\cdot(y)$ — *силовская* p-*подгруппа группы* G, $x^y{=}x^\alpha{\neq}x$, $F\lambda(x)$ — *группа типа* 5) *или* 6) *из условия теоремы*, $C_F(x)$ *абелев, а подгруппа* $C_F(x)\cdot(y)$ *либо абелева, либо является* (p,n)-*группой, и если* H — (x,y)-*допустимая подгруппа из* F, *то*

$$F \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x)),$$

и для подгруппы $A = (H\lambda(x)) \cdot (y)$ *индекс*

$$|C_{N(A)}(H) \cap C(x) : C(A) \cdot C_{Z(H)}(x)|$$

делит p.

Доказательство. Необходимость. Заметим, что в рассматриваемом случае любая подгруппа NSp-группы G сама является NSp-группой.

Предположим сначала, что группа G — нильпотентная непримарная группа, и $G = \prod\limits_{i=1}^{n} P_i$ — разложение ее в произведение силовских подгрупп. Если $i \neq j$ и A — произвольная неединичная подгруппа из P_j, то из бипримарности группы $R = P_i \times A$ следует

$$|N(R) : R \cdot C(R)| = |N_{P_j}(A) : A \cdot C_{P_j}(A)|$$

делит p, т. е. в группе P_j условие $(*)$ выполняется для любой подгруппы. Из произвольности числа j и леммы следует, что каждый из множителей P_i является либо абелевой группой, либо (p,n)-группой, т. е. в этом случае G — группа типа 2) или 3) из условия теоремы.

Предположим теперь, что G — разрешимая не нильпотентная группа. Обозначим через F подгруппу Фиттинга группы G. Тогда, как известно ([3], предложение 1.25), $C(F) \leq F$.

Предположим сначала, что подгруппа $F = \prod\limits_{i=1}^{n} P_i$ не примарна. Тогда по доказанному выше F является группой типа 2) или 3) из условия теоремы. Если $A = P_i \times P_j$, $i \neq j$, то число $|G : A \cdot C(A)|$ делит p, т. е. любая холлова p'-подгруппа K группы G лежит в $A \cdot C(A)$. Пусть $Q \geq P_j$ — силовская q-подгруппа, $q \neq p$. Так как $Q \leq A \cdot C(A)$, то Q лежит в централизаторе любой подгруппы P_i при $i \neq j$. Кроме того, $Q \leq P_j \cdot C(P_j)$. Но тогда из $P_j \leq C(P_i)$ при $i \neq j$ следует

$$Q \leq P_j \cdot C(P_j) \cap (\cap_{i\neq j} C(P_i)) = \cap_{i=1}^{n} C(P_i) = C(F) \leq F.$$

Из произвольности числа j получим $G = K\lambda H$, где K — нильпотентная холлова p'-подгруппа группы G. Если подгруппа K не примарна, то по уже доказанному подгруппа K абелева. Предположим, что группа K примарна. Тогда из непримарности F следует $C_H(K) \neq 1$. Пусть K_1 — произвольная нетривиальная подгруппа из K, $A = K_1 \times C_H(K_1)$. Тогда в силу условия $(*)$ $N_K(K_1) = K_1 \cdot C_K(K_1)$, и по лемме 2 из [1] и в этом случае подгруппа K абелева.

Если для любой силовской подгруппы Q группы K выполняется условие $C_H(K) < C_H(Q)$, то группа K не примарна, и найдутся такие силовские подгруппы Q и R группы K, что

$$C_H(Q) \neq C_H(Q \times R) \neq C_H(R).$$

Отсюда $|H : C_H(Q \times R)| \geq p^2$, что противоречит условию $(*)$. Поэтому найдется такая силовская подгруппа Q группы K, что $C_H(K) = C_H(Q)$. Если $A = Q\lambda Z(H)$, то из $H \leq N(A)$ и условия $(*)$ имеем $|H : C_H(Q)| \leq p$. Но тогда $|H : C_H(K)| = p$.

Пусть $R = Q\lambda H$, где Q — силовская q-подгруппа из K, T — произвольная неединичная подгруппа из H и $A = Q\lambda T$. Тогда индекс $|N_R(A) : A \cdot C_R(A)|$ делит p. Так как

$$N_R(A) = Q\lambda N_H(A) = Q\lambda N_H(T)$$

и

$$C_R(A) = C_R(Q) \cap C_R(T) = (Q \times C_H(Q)) \cap C_R(T) \leq Q\lambda C_H(T),$$

то ввиду $(|H|, |Q|) = 1$ получаем, что число

$$|Q\lambda N_H(T) : Q \cdot T \cdot C_H(T)| = |N_H(T) : T \cdot C_H(T)|$$

делит p, т. е. в группе H условие $(*)$ выполняется для любой подгруппы A. В силу леммы подгруппа H либо абелева, либо является (p, n)-группой.

Предположим, что подгруппа $H_0 = C_H(K)$ неабелева. Если Q — силовская подгруппа из K, то $|H : C_H(Q)| \leq |H : C_H(K)| = p$. Так как группа G не нильпотентна, то найдется такая силовская подгруппа Q из K, что $C_H(Q) = C_H(K)$. Положим $R = Q\lambda H$. Если $H = T \cdot (x)$, где T — абелева максимальная подгруппа (p, n)-группы H, то в силу неабелевости $C_H(K)$ можно считать, что $x \in C(K)$, т.е. $H_0 = (T \cap H_0) \cdot (x)$. Положим $A = Q \times (T \cap H_0)$. Тогда $A \lhd R$ и

$$C_R(A) = C_R(Q) \cap C(T \cap H_0) = (Q \times H_0) \cap (K\lambda T) = A,$$

т. е. $|N_R(A) : A \cdot C_R(A)| = |R : A| = p^2$, что невозможно. Поэтому $C_H(K)$ абелев, и G — группа типа 4) из условия теоремы.

Рассмотрим теперь случай примарной подгруппы F. Если $|F| = q^k$ и T/F — минимальный нормальный делитель группы G/F, то $(|T/F|, q) = 1$, т. е. подгруппа T бипримарна. Но тогда в силу условия $(*)$ индекс $|G : T|$ делит p. Пусть $T = F\lambda B$, где B — элементарная абелева группа, и x — элемент простого порядка из B. Так как $C(F\lambda(x)) \leq F$, то из условия $(*)$ следует, что $|T : F\lambda(x)|$ делит p. Это означает, что подгруппа B является либо группой простого порядка, либо элементарной абелевой группой порядка p^2. Если $|B| = p^2$, то $|G/F| = p^3$. Но тогда порядок любой минимальной нормальной подгруппы группы G/F равен p. Поэтому $|B| = r$ является простым числом.

Предположим, что $T = G$, т. е. $G = F\lambda(x)$. Отметим, что в этом случае любая непримарная подгруппа группы G бипримарна. Если $q \neq p$, то в группе G для любой непримарной подгруппы A выполняется равенство $N(A) = A \cdot C(A)$. В силу теоремы 2 из [1] и замечания после нее, $C(x)$ абелев, совпадает со своим нормализатором, и для любой x-допустимой подгруппы H из F выполняется равенство

$$N_F(H) \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x)).$$

Заменяя x-допустимую подгруппу H на x-допустимую подгруппу $N_F(H)$, получим

$$N_F(N_F(H)) \cap C(x) = (N_F(H) \cap C(x)) \cdot (C_F(N_F(H)) \cap C(x)) = \\ = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x)).$$

Так как группа F удовлетворяет нормализаторному условию, то, повторяя этот процесс достаточное число раз, получим равенство

$$F \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x)),$$

т. е. в этом случае G — группа типа 5).

Предположим, что $q = p$. Пусть $A = H\lambda(x)$, где H — произвольная x-допустимая подгруппа из F. В силу условия $(*)$ индекс $|N(A) : A{\cdot}C(A)|$ делит p. Так как $N(A) = N_F(A)\lambda(x)$ и $C(A) \leq C_F(H)\lambda(x)$, то индекс

$$|N_F(A) : H \cdot (C_F(H) \cap C(x))|$$

делит p. Рассматривая пересечения этих подгрупп с $C(x)$, получим, что

$$|(N_F(A) \cap C(x)) : (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x))|$$

делит p. Согласно лемме Фраттини

$$N_F(A) = H \cdot N_F((x)) = H \cdot C_F(x).$$

Но тогда из $N_F(A) \leq N_F(H)$ следует $N_F(A) = H \cdot C_{N_F(H)}(x)$. Поэтому $N_F(A) \cap C(x) = C_{N_F(H)}(x)$ и, значит,

$$|(N_F(H) \cap C(x)) : (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x))|$$

делит p.

Заметим, что если подгруппа F абелева, то $N_F(H) = C_F(H) = F$. Таким образом, если $T = G$, то G — группа типа 5) или 6) из условия теоремы.

Предположим $|G : T| = p$. Тогда возможен один из следующих случаев:

a) $G = F\lambda(x)$, $|x| = p^2$;

b) $G = F\lambda((x) \times (y))$, $|x| = |y| = p$;

c) $G = F\lambda((x)\lambda(y))$, $|x| = r$, $|y| = p$, числа p, q, r попарно различны;

d) $G = (F\lambda(x)) \cdot (y)$, $q = p$, $|x| = r \neq p$, $y^p \in F$.

Заметим, что если в двух последних случаях $[x, y] = 1$, то можно считать $x \in C(F\lambda(y))$, если $|G : (F\lambda(y)) \cdot C(F\lambda(y))|$ делит p. Но тогда подгруппа $F \times (x)$ нильпотентна, что противоречит выбору F. Поэтому можно считать $x^y = x^\alpha \neq x$.

Пусть $G = F\lambda(x)$, $|x| = p^2$. По уже доказанному $F\lambda(x^p)$ является группой типа 5). Если H — неединичная x-допустимая подгруппа из F и $A = H\lambda(x)$, то должно выполняться равенство $N(A) = A \cdot C(A)$. Как и выше, из этого равенства следует

$$F \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x)),$$

т. е. G — группа типа 7).

В случае b) аналогично получаем группу типа 8), а в случае c) — группу типа 9). Рассмотрим теперь случай d). По уже доказанному $F\lambda(x)$ является группой типа 5) или 6), а подгруппа

$$R = (C_F(x) \times (x)) \cdot (y) = (x)\lambda(C_F(x) \cdot (y))$$

должна быть группой типа 4). Поэтому $C_F(x)$ абелев, а подгруппа $C_F(x) \cdot (y)$ либо абелева, либо является (p, n)-группой.

Пусть H — неединичная (x, y)-допустимая подгруппа из F. Тогда подгруппа $A = H\lambda(x)$ бипримарна. Так как $y \in N(A) \setminus A \cdot C(A)$, то

$$N_{F\lambda(x)}(A) = A \cdot C_{F\lambda(x)}(A).$$

Но тогда, как и выше,

$$F \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_F(H) \cap C(x)).$$

Пусть теперь $A = (H\lambda(x)) \cdot (y)$. Тогда

$$N(A) = A \cdot N_{N(A)}((x)) = A \cdot C_{N(A)}(x).$$

Учитывая

$$N(A) \cap C(x) = (H \cap C(x)) \cdot (C_{N(A)}(H) \cap C(x)),$$

получаем $N(A) = A \cdot (C_{N(A)}(H\lambda(x)))$. Так как
$$A \cdot C(A) = A \cdot (C_{N(A)}(H\lambda(x)) \cap C(y)),$$
то
$$|H \cdot C_{C_{N(A)}(H)}(x)/H \cdot (C_{C_{N(A)}(H)}(x) \cap C(y))| = \\ = |C_{C_{N(A)}(H)}(x)/(C_{C_{N(A)}(H)}(x) \cap C(y)) \cdot (H \cap C_{C_{N(A)}(H)}(x))| = \\ = |C_{C_{N(A)}(H)}(x)/C(A) \cdot C_{Z(H)}(x)|$$
делит p, т. е. G — группа типа 10).

Достаточность. Для групп типа 1) и 2) доказываемое утверждение очевидно, для группы типа 3) оно следует из утверждения леммы. Пусть G — группа типа 4), и A — произвольная подгруппа из G. Если $A \le K$, то
$$|G : A \cdot C(A)| \le |G : K \cdot C(K)| = |H : C_H(K)|.$$
Если $A \le H$, то $N(A) = C_K(A)\lambda N_H(A)$ и достаточно использовать лемму.

Пусть теперь $A = K_1\lambda H_1$, и каждая из подгрупп K_1 и H_1 нетривиальна.

Так как K_1 характеристична в A, то $N(A) \le N(K_1)$. В силу леммы Фраттини $N(A) = K_1 \cdot N(H_1)$. Это означает, что
$$N(A) = N(K_1) \cap (K_1 \cdot N(H_1)) = K_1 \cdot (N(K_1) \cap N(H_1)) = \\ = K_1 \cdot [(K\lambda N_H(K_1)) \cap (C_K(H_1)\lambda N_H(H_1))] = (K_1 \cdot C_K(H_1))\lambda(N_H(K_1) \cap N_H(H_1)).$$
В то же время из $C(A) = C_K(H_1) \cdot C_H(K_1 \cdot H_1)$ следует
$$A \cdot C(A) = (K_1 \cdot C_K(H_1))\lambda(H_1 \cdot (C_H(K_1) \cap C_H(H_1))).$$

Если группа H абелева, то число
$$|N(A) : A \cdot C(A)| = |N_H(K_1) : H_1 \cdot C_H(K_1)|$$
делит число $|H : C_H(K)| \le p$. Если подгруппа H неабелева, то
$$C_H(K_1) \ge C_H(K) \ge T.$$
Поэтому $|N(A) : A \cdot C(A)|$ делит $|H : T| = p$.

Справедливость условия $(*)$ для бипримарных подгрупп групп типов 5)–8) и 10) следует из ограничений, наложенных на эти группы. Предположим, например, что G — группа типа 8), A — непримарная подгруппа из G. Так как силовские q-подгруппы группы G сопряжены, то можно считать $A = H\lambda R$, где $H \le F$ и $R \le (x, y)$. Предположим, что $N(A) = H_1\lambda R_1$, $H_1 \le F$, $R_1 \le (x)$. В силу теоремы Машке $N(A) = A \cdot C_{N(A)}(R)$. Поэтому $H_1 = H \cdot C_{H_1}(R)$. Из условия теоремы имеем
$$C_{H_1}(R) = (H \cap C(R)) \cdot (C_{H_1}(H) \cdot C(R)).$$
Поэтому $H_1 = H \cdot C_{H_1}(A)$. Отсюда
$$|N(A) : A \cdot C(A)| = |(x, y) : R \cdot C_{(x.y)}(H)|$$
делит p.

Рассмотрим группу типа 9). Если A — бипримарная подгруппа из G, то можно считать, что либо $A = H \cdot (a)$, где $a \in (x, y) \setminus 1$, а H — a-допустимая подгруппа из F, и тогда условие $(*)$ следует из наложенного в условии теоремы ограничения, либо $A = (x, y)$, и тогда $N(A) = C_F(A)\lambda A$. □

Следствие. Пусть $S(G)$ совпадает с множеством всех непримарных подгрупп группы G. Конечная разрешимая группа G тогда и только тогда является NSp-группой, когда либо G — группа одного из типов 1)–8) или 10) из условия теоремы, либо G — группа типа 9), в которой для любой (x, y)-допустимой подгруппы H из F

$$C_F((x, y)) = C_F(H\lambda(x, y)) \cdot C_H((x, y)).$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 следует, что в группах типа 3) или 4) условие $(*)$ выполняется для любой подгруппы, а в группах типа 5)–8) или 10) любая непримарная подгруппа бипримарна. В случае групп типа 9) непримарные, но не бипримарные подгруппы исчерпываются подгруппами вида $A = H\lambda((x)\lambda(y))$, где H — неединичная (x, y)-допустимая подгруппа из F. В этом случае из условия $(*)$ вытекает $N(A) = A \cdot C(A)$. Так как

$$N(A) = A \cdot N_{N(A)}((x, y)) = (H \cdot C_{N(A)\cap F}((x, y)))\lambda(x, y)$$

и $A \cdot C(A) = (H \cdot C_{N(A)\cap F}(A))\lambda(x, y)$, то

$$|N(A) : A \cdot C(A)| = |C_{N(A)\cap F}((x, y)) : (C_{N(A)\cap F}(A) \cdot C_H((x, y)))| = 1.$$

Отсюда $C_{N(A)\cap F}((x, y)) = C_{N(A)\cap F}(A) \cdot C_H((x, y))$. Как и выше, заменяя $N(A)$ на $N(N(A))$, $N(N(N(A)))$ и т. д., получим $C_F((x, y)) = C_F(A) \cdot C_H((x, y))$. □

Приведем простейшие примеры, показывающие, что все случаи из теоремы 1 реализуются. Для групп типов 1)–3) это очевидно. Группа $G = ((a) \times (b))\lambda(c)$, $a^7 = b^9 = c^3 = 1$, $a^c = a^2$, $b^c = b^4$, является группой типа 4). Группами типа 5) являются, например, A_4 или $Q_8\lambda(x)$, где Q_8 — группа кватернионов, а x — ее автоморфизм порядка 3.

Пусть $H = (a)\lambda(b)$ — неабелева группа порядка 3^3, $|x| = 7$. Тогда $G = H \wr (x)$ — группа типа 6). Группой типа 7) является группа Фробениуса порядка $17^2 \cdot 3^2$. Если $G = A_4 \times A_4$, то G — группа типа 8). Пусть F — элементарная абелева группа порядка 8, рассматриваемая как векторное пространство над полем $GF(2)$, а (x, y) — группа Фробениуса порядка 21 из $GL(3, 2)$, тогда $F\lambda(x, y)$ — группа типа 9).

Пусть теперь F — элементарная абелева группа порядка 5^5. Как известно (например, [4], теорема 2.7.3а), группа $GL(5, 5)$ обладает такой циклической подгруппой T порядка $5^5 - 1 = 781$, что $C(T) = T$ и $|N(T)/T| = 5$. Если x — элемент порядка 11 из T, и $N(T) = T\lambda(y)$, то группа $G = F\lambda((x, y))$ является группой типа 10).

Теорема 2. *Пусть $S(G)$ совпадает с множеством всех бипримарных (всех непримарных) подгрупп группы G. Конечная неабелева простая группа G в том и только том случае является NSp-группой, когда $G \cong PSL(2, 2^n)$, где $n \in \{2, 3\}$.*

Доказательство. Необходимость. Заметим, что если K — неабелева разрешимая NSp-группа, и A — такая подгруппа группы K, что $|K/A| = 2$, то согласно теореме либо подгруппа A примарна, либо $K = A \cdot C_K(A)$. Как известно, все простые группы исчерпываются знакопеременными группами, группами лиевского типа и спорадическими простыми группами.

Предположим, сначала, что $G \cong A_n$. Если $n = 5$, то $G \cong PSL(2, 4)$. Если же $n > 5$, то G содержит подгруппу, изоморфную A_6, а в группе A_6 силовская 3-подгруппа самоцентрализуема и имеет индекс 4 в своем нормализаторе. Но тогда условие $(*)$ не выполняется для подгруппы индекса 2 из нормализатора силовской 3-подгруппы.

Пусть теперь G — простая группа лиевского типа над полем $GF(q^n)$. Если U — силовская q-подгруппа группы G, то $C(U) \leq U$ и $N(U) = U\lambda H$, где H — подгруппа Картана группы G.

Из абелевости H и условия $(*)$ следует, что выполняется один из следующих случаев: $|H|=1$, $|H|$ — простое число, $|H| = p^2$.

Рассмотрим случай $|H| = 1$. Тогда $q^n = 2$. Так как группы $A_1(2)$, ${}^2A_2(2)$ и ${}^2B_2(2)$ не просты, то лиевский ранг l группы G больше единицы. Если в этом случае Y — минимальная параболическая подгруппа группы G, то ([3], предложение 2.17) $Y/O_2(Y) = \overline{H} \cdot \overline{Y}_1$, где $\overline{Y}_1/Z(\overline{Y}_1) \cong A_1(2) \cong S_3$, и строение группы Y противоречит замечанию, сделанному в начале доказательства.

Таким образом, $|H| > 1$. Так как $|H|$ должен быть либо простым числом, либо квадратом простого числа, то из формул для порядка подгруппы H ([5], сс. 121, 251) следует, что либо лиевский ранг группы G равен 1, либо G — присоединенная группа ранга 2. В последнем случае подгруппа Вейля группы G является диэдральной группой ([5], с. 86), и снова получаем противоречие с замечанием, сделанным в начале доказательства. Поэтому G — группа лиевского ранга 1.

Предположим, что G — скрученная группа. Пусть $G \cong {}^2A_2(q^n)$. Тогда $|H| = \frac{q^{2n}-1}{(3,q^n+1)}$. Если $q > 2$, то $|H|$ четен и отличен от двух, что невозможно. Пусть $q = 2$. Так как ${}^2A_2(2)$ разрешима, то $n > 1$. Но тогда число $|H| = (2^n - 1)\frac{2^n+1}{(3,2^n+1)}$ не является ни простым числом, ни квадратом простого числа. Группа ${}^2B_2(2^{2n+1})$ содержит в качестве подгруппы группу Фробениуса порядка $(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \cdot 4$, что невозможно. В случае группы ${}^2G_2(3^{2n+1})$ порядок H равен $(3^{2n+1} + 1)$, тогда он четен и отличен от двух.

Таким образом, G является присоединенной группой лиевского ранга 1, т. е. $G \cong A_1(q^n) = PSL(2, q^n)$. В этом случае $d = (2, q^n - 1)$. Предположим, что $q = 2$. Если $2^n - 1 = p^2$, то $2^n = p^2 + 1 \equiv 2(4)$, что невозможно. Поэтому число $(2^n - 1)$ простое. Так как G содержит подгруппу диэдра порядка $2(2^n + 1)$, то, как отмечено выше, число $2^n + 1$ должно быть степенью простого числа r. Если $n > 2$, то из простоты числа $2^n - 1$ следует, что n — нечетное простое число. Тогда $2^n + 1$ делится на 3, т. е. $r = 3$. Из равенства $2^n + 1 = 3^m$ получаем $2^n = 2(1 + 3 + \cdots + 3^{m-1})$. Поэтому число $(m - 1)$ нечетно и, значит, $m = 2k$. Из равенства $2^n = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$ следует $k = 1$, т. е. $n = 3$.

Рассмотрим случай нечетного числа q. В этом случае $|H| = \frac{q^n-1}{2}$. Если $|H| = 2$, то $q^n = 5$, но $PSL(2, 5) \cong PSL(2, 4)$. Поэтому можно считать, что порядок H нечетен. Тогда $q^n + 1 \equiv 4(8)$. Так как группа G содержит в качестве подгруппы группу диэдра порядка $q^n + 1$, то из примарности числа $q^n + 1$ следует $q^n + 1 = 2^k$. Тогда $|H| = \frac{q^n-1}{2} = 2^{k-1} - 1$. Так как $|H|$ является либо простым числом, либо квадратом нечетного простого числа, то либо $q = 3$, либо $n = 1$. Если $n > 1$, то $q = 3$ и из $2^k - 1 \equiv 0 \pmod 3$ следует, что число k нечетно. Тогда из $3^n = (2^m - 1)(2^m + 1)$ имеем $n = 1$, $k - 1 = 2m$ и $|H| = \frac{3^n-1}{2} = 2^{k-1} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$, что невозможно. Если $n = 1$, то из $q = 2^k - 1$ следует, что число k простое. Если $k = 2$, то $q = 3$, а группа $PSL(2, 3)$ разрешима. Если $k = 3$, то $q = 7$, но группа $PSL(2, 7)$ содержит подгруппу, изоморфную S_4, которая не является NSp-группой. Если же $k > 3$, то $k - 1 = 2m$, где $m > 1$. Тогда число $\frac{q-1}{2} = 2^{k-1} - 1 = (2^m - 1)(2^m + 1)$ не может быть ни простым числом, ни квадратом простого числа.

Теперь, используя обзор [6], покажем, что G не может быть спорадической простой группой. Для этого достаточно показать, что любая спорадическая простая группа содержит подгруппу, не являющуюся NSp-группой. Договоримся использовать транзитивность включения, т. е. если группа Co_3 содержит в качестве подгруппы группу M_{12}, а M_{12} содержит подгруппу, изоморфную $PSL(2, 11)$, то условимся сразу писать, что Co_3 содержит $PSL(2, 11)$. Тогда из [6] следует

1) M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, Co_3, Co_2, F_2, HS, Suz, Ly содержат в качестве подгруппы $PSL(2,11)$;
2) J_2, He, F_1, F_3 содержат $PSL(2,7)$;
3) J_3 и $O'N$ содержат $PSL(2,9)$;
4) $J_4 \geq PSL(5,2)$, а $Ru \geq PSL(2,29)$;
5) $Co_2 \geq A_7$, $M^c \geq A_8$, $F_5 \geq A_9$, $F_{22} \geq A_{10}$, а F_{23} и F'_{24} содержат A_{12}.

Достаточность. Пусть $G \cong PSL(2,2^n)$, $n \in \{2,3\}$, и A — произвольная непримарная подгруппа группы G. Так как $N(A) < G$, то достаточно убедиться, что NSp-группами являются максимальные подгруппы группы G. Все подгруппы группы $PSL(2,q^n)$ описаны Л. Диксоном (например, [4], теорема 2.8.27). В нашем случае максимальные подгруппы группы G исчерпываются нормализаторами силовских 2-подгрупп и группами диэдра порядка $2(2^n \pm 1)$, в каждой из которых условие $(*)$ выполняется для любой непримарной подгруппы A. □

При доказательстве следующей теоремы неоднократно будет использована теорема Бернсайда ([7], теорема 14.4.7): группа G обладает фактор-группой, изоморфной силовской p-подгруппе P, тогда и только тогда, когда для любой подгруппы Q группы P элемент, порядок которого взаимно прост с p и который перестановочен с подгруппой Q в целом, перестановочен с ней поэлементно.

Теорема 3. *Конечные группы, в которых условие* $(*)$ *выполняется для любой бипримарной подгруппы, исчерпываются группами из теорем* 1 *и* 2.

Доказательство. Пусть G — неразрешимая группа, в которой условие $(*)$ выполняется для любой бипримарной подгруппы A. Как обычно, через F и F^* обозначим подгруппу Фиттинга и обобщенную подгруппу Фиттинга группы G.

Предположим сначала, что $F = F^*$. Тогда $C(F) \leq F$. Так как группа G/F не разрешима, то ее силовская 2-подгруппа S/F не может быть циклической группой. В силу теоремы 1 подгруппа S может быть только группой типа 1)–3) из этой теоремы. Учитывая, что $C(F) \leq F$, получаем примарность группы S, т. е. $|S| = 2^n$ для некоторого числа n. Тогда и F является 2-группой.

Пусть B/F — минимальный нормальный делитель группы G/F. Если B/F — элементарная абелева группа, то подгруппа B бипримарна и (из условия $(*)$)

$$|N(B) : B \cdot C(B)| = |G : B|$$

делит p, что противоречит неразрешимости группы G. Поэтому B/F — прямое произведение изоморфных неабелевых простых групп. Пусть A/F — один из этих множителей, а P — неединичная силовская p-подгруппа группы A.

Если $1 \neq S \leq P$, то подгруппа $U = F\lambda S$ бипримарна. Поэтому $|N(U) : U \cdot C(U)|$ делит p. Тогда и $|N(S) : S \cdot C(S)|$ делит p. По теореме Бернсайда подгруппа P обладает инвариантным дополнением в группе A, что противоречит простоте группы A/F. Это означает, что $(|A|, p) = 1$. Но тогда $N(H) = H \cdot C(H)$ для любой бипримарной подгруппы H группы A. Если q — произвольный нечетный простой делитель порядка группы A, то, как и выше, получим $N(Q) = Q \cdot C(Q)$ для любой q-подгруппы Q из A. Снова по теореме Бернсайда получаем $A = K\lambda R$, где R — силовская q-подгруппа группы A, что невозможно.

Таким образом, $F < F^*$, т. е. слой L группы G не тривиален. Пусть B — квазипростая, но не простая подгруппа из G. Предположим, что $Z(B)$ не является 2-группой и $S/Z(B)$ — силовская 2-подгруппа группы B. В силу теоремы 1 подгруппа S абелева. Но тогда и $S/Z(B)$ тоже абелева. По теореме 4.12.6 из [3] группа $B/Z(B)$ изоморфна одной из групп $PSL(2,q)$,

$q \equiv \pm 3 \pmod 8$, $PSL(2,2^n)$, $n \geq 2$, или группе Ри ${}^2G_2(3^{2n+1})$. Так как мультипликатор Шура групп Ри и $PSL(2,2^n)$ при $n > 2$ тривиален ([3], табл. 4.1), а $PSL(2,4) \cong PSL(2,5)$, то можно считать $B/Z(B) \cong PSL(2,q)$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. В этом случае (там же) порядок мультипликатора Шура группы $B/Z(B)$ равен 2, что противоречит сделанному выше предположению о нечетности $Z(B)$. Если же $Z(B)$ является 2-группой, то снова по теореме Бернсайда из условия $(*)$ получим, что силовская q-подгруппа группы B для некоторого нечетного простого делителя q порядка группы B обладает нормальным дополнением, что невозможно.

Полученное противоречие доказывает, что в группе G любая квазипростая подгруппа является простой, т. е. $F^* = F \times \prod\limits_{i=1}^{k} G_i$, где G_i — неабелевы простые группы. Предположим, что $k > 1$. Пусть $B = G_1 \times G_2$, q_i — простой делитель группы G_i, $i = 1, 2$, и $q_1 \neq q_2$. Пусть $A = B_1 \times B_2$, где B_i — неединичная q_i-подгруппа из B_i, $i = 1, 2$. Тогда из условия $(*)$ следует, что $|N_{G_i}(B_i) : B_i \cdot C_{G_i}(B_i)|$ делит p, т. е. в группах G_i условие $(*)$ выполняется для любой примарной подгруппы. Как и выше, это приводит к тому, что в группе G_i отщепляется либо силовская p-подгруппа, либо (при $(|G_i|, p) = 1$) силовская q-подгруппа, где q — простой делитель $|G_i|$, что противоречит простоте группы B_i.

Таким образом, $k = 1$, т. е. $G = F \times G_1$. В силу теоремы 2 имеем $G_1 \cong PSL(2,2^n)$, $n \in \{2, 3\}$. Предположим, что $F \neq 1$. Пусть $(|G_1|, p) = 1$. Если подгруппа F примарна, то в качестве q возьмем простой делитель $|G_1|$, взаимно простой с порядком F. Тогда для любой неединичной q-подгруппы H из G_1 выполняется равенство

$$N(F \times H) = (F \times H) \cdot C(F \times H).$$

Отсюда $N_{G_1}(H) = H \cdot C_{G_1}(H)$, и снова по теореме Бернсайда $G_1 = K\lambda Q$, где Q — силовская q-подгруппа группы G_1, что невозможно. Если же подгруппа F не примарна, то заменяя в предыдущих рассуждениях F на силовскую r-подгруппу группы F, а в качестве q выбирая простой делитель $|G_1|$, отличный от r, снова получим противоречие.

Предположим теперь, что $F \neq 1$ и $|G_1|$ делится на p. Если F не является p-группой, то полагая $A = H \times P$, где H — неединичная силовская q-подгруппа из F, $q \neq p$, а P — произвольная p-подгруппа из G_1, из справедливости условия $(*)$ для подгруппы A получим, что $|N_{G_1}(P) : P \cdot C_{G_1}(P)|$ делит p. Это, как и выше, приводит к противоречию с простотой группы G_1. Поэтому можно считать, что F является p-группой. Группа $PSL(2,4)$ содержит в качестве подгрупп группы диэдра порядков 6 и 10. Порядок одной из них взаимно прост с p. Если $(a)\lambda(b)$ — подгруппа, и $A = F\lambda(a)$, то $b \in N(A) \setminus (A \cdot C(A))$, что противоречит условию $(*)$. Случай $PSL(2,8)$ рассматривается аналогично (группа G_1 в этом случае содержит подгруппы диэдра порядков 18 и 14).

Таким образом, $F = 1$, т. е. G_1 — единственный минимальный нормальный делитель группы G. Но тогда $G \leq \mathrm{Aut}(G_1)$. Как известно, группа автоморфизмов группы $PSL(2,2^n)$, $n \geq 2$, имеет вид $PSL(2,2^n)\lambda(\tau)$, где τ — полевой автоморфизм порядка n. Так как в нашем случае $n \in \{2, 3\}$, то из $G > G_1$ следует $G = \mathrm{Aut}(G_1)$. Если в этом случае $n = 2$, то

$$C_{G_1}(\tau) = (a)\lambda(b) \cong PSL(2,2).$$

Тогда для подгруппы $A = (a) \times (\tau)$ инволюция b принадлежит $N(A) \setminus A \cdot C(A)$, что невозможно. Если же $n = 3$ и (a) — силовская 7-подгруппа из G_1, то $N((a)) = (a)\lambda(b)$, где $|b| = 6$. Снова $b^3 \in N(A) \setminus A \cdot C(A)$, где $A = (a)\lambda(b^2)$.

Таким образом, $G = G_1$, т. е. любая неразрешимая NSp-группа проста. □

Литература

[1] Антонов В.А. *Локально конечные группы с малыми нормализаторами*, Матем. заметки **41** (3), 296–302 (1987).

[2] Антонов В.А., Аминева Н.Н. *О группах с относительно большими централизаторами*, Изв. вузов. Матем., № 7, 8–17 (2003).

[3] Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию* (Мир, М., 1985).

[4] Huppert B. *Endliche Groupen*, 1 (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967).

[5] Carter R.G. *Simple groups of Lie type* (John Wiley & Sons, London–New York–Sydney–Toronto, 1972).

[6] Сыскин С.А. *Абстрактные свойства простых спорадических групп*, УМН **35** (5), 181–207 (1980).

[7] Холл М. *Теория групп* (Ин. лит., М., 1962).

В.А. Антонов

профессор, кафедра общей математики,
Южно-Уральский государственный университет (НИУ),
пр. Ленина, д. 76, г. Челябинск, 454080, Россия,

e-mail: ava@susu.ac.ru

Т.Г. Ножкина

старший преподаватель, кафедра общей математики,
Южно-Уральский государственный университет (НИУ),
пр. Ленина, д. 76, г. Челябинск, 454080, Россия,

e-mail: 73_tata@mail.ru

V.A. Antonov and T.G. Nozhkina

Groups with relatively small normalizers of biprimary subgroups

Abstract. We completely describe groups whose any biprimary or nonprimary subgroup is such that the index of its product by the centralizer in its normalizer is divisable by some prime number (fixed for the given group). We give full description of these groups.

Keywords: group, subgroup, biprimary subgroup, nonprimary subgroup, centralizer, normalizer, index.

V.A. Antonov

Professor, Chair of General Mathematics,
South Ural State University,
76 Lenin Ave., Chelyabinsk , 454080 Russia,

e-mail: ava@susu.ac.ru

T.G. Nozhkina

Senior Lecturer, Chair of General Mathematics,
South Ural State University,
76 Lenin Ave., Chelyabinsk , 454080 Russia,

e-mail: 73_tata@mail.ru