Министерство образования и науки Российской Федерации

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ Им. Н.И. Лобачевского

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 01.03.01 — Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Численные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений первого рода

Работа завершена:

«____»________________2015 г. ________________Л.Т. Закирова

Работа проверена:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
«____»________________2015 г. ________________А.В. Ожегова

Заведующий кафедрой теории функций и приближений,
доктор физико-математических наук, профессор
«____»________________2015 г. ________________Ф.Г. Авхадиев

Казань — 2015 г.

Содержание

Введение . . . 3
§1. Вспомогательные результаты . . . 5
§2. Постановка задачи и структура обратного оператора . . . 9
§3. Ограниченность обратного оператора . . . 12
§4. Проекционные методы . . . 14
§5. Метод коллокации . . . 17
§6. Метод Галеркина . . . 20
Список литературы . . . 23

Введение

Выпускная квалификационная работа посвящена исследованию сходимости в равномерной метрике приближенных методов решения интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью вида

$$Kx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s),$$

где функция $x(s)$ - искомая, а $h(s)$ и $y(s)$ - известные 2π-периодические функции, причем $h(s,\sigma)$ - разностное ядро, а слабосингулярный интеграл понимается как несобственный.

Это уравнение является математической моделью различных задач из теории упругости и электродинамики [1, 3, 4, 6, 9]. Из теории таких уравнений известно, что решаются точно они лишь в редких частных случаях, поэтому к ним применяются приближенные методы решения, которые должны быть обоснованы теоретически. Несмотря на огромное количество работ в этой области, наличие регулярного разностного ядра позволяет получить некоторые новые результаты, которые в общем случае не имели места.

Целью выпускной квалификационной работы было получение равномерных оценок погрешности приближенных решений, полученных различными численными методами, для указанного интегрального уравнения. Для этого используются определенные методики установления корректности задачи.

Работа состоит из введения и шести параграфов. Во введении обоснована актуальность, сформулирована цель работы и описаны полученные результаты. В первом параграфе приводятся вспомогательные сведения из общей теории приближенных методов и конструктивной теории функций [5,7]. Во втором параграфе приводится структура обратного оператора. В третьем - устанавливается его ограниченность на специально подобранных пространствах, являющихся некоторыми сужениями пространства непрерывных функций, предложенных в кандидатской диссертации А.В. Ожеговой [8]. В четвертом параграфе описываются используемые проекционные методы и доказывается теорема об однозначной разрешимости вычислительной схемы проекционных методов решения исходного уравнения и применения общей теории приближенных методов анализа. В пятом параграфе выводится вычислительная схема метода коллокации применительно к данному уравнению и приводится обоснование метода с установлением равномерной оценки погрешности. В шестом параграфе строится вычислительная схема метода Галеркина и устанавливается равомерная оценка погрешности приближенных решений.

§1. Вспомогательные результаты

Приведем основные подготовительные сведения, необходимые для последующего исследования, из общей теории приближенных методов анализа, функционального анализа, и конструктивной теории функций. Пусть X и Y - произвольные линейные нормированные пространства, а X_n и Y_n - проивольные последовательности их конечномерных подпространств: $X_n \in X, Y_n \in Y \quad (n = 1, 2 \ldots)$.

Рассмотрим два уравнения: точное

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y) \tag{1.1}$$

и соответствующее ему приближенное

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \tag{1.2}$$

где K и K_n - аддитивные и однородные операторы, действующие соответственно из X в Y и из X_n в Y_n. Решение $x_n^\star$ приближенного уравнения (1.2) принимается за приближение к решению $x^\star$ точного уравнения (1.1). Имеет место следующая

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия:
1) оператор $K : X \to Y$ линейно обратим,
2) $\varepsilon^n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to Y} \to 0$, $n \to \infty$,
3) $\dim X_n = \dim Y_n = m(n) < \infty \quad (n = 1, 2, \ldots)$
Тогда при всех n, удовлетворяющих неравенству

$$p_n = \|K^{-1}\| \|K - K_n\| < 1, \quad K - K_n : X_n \to Y$$

приближенное уравнение (1.2) имеет единственное решение $x_{n^\star}$ при любой правой части $y_n \in Y_n$, причем

$$\|x_n^\star\| \leq \|K_n^{-1}\| \|y_n\|,$$

$$\|K_n^{-1}\| \le \|K^{-1}\|(1-p_n)^{-1}.$$

Если, кроме того, выполнено условие

4) $\delta^{(n)} = \|y - y_n\| \to 0$, $n \to \infty$, то приближенные решения $x_n^\star \in X_n$ сходятся к точному решению $x^\star \in X$ по норме пространства X. При этом погрешность приближенного метода может быть оценена любым из неравенств

$$\|x^\star - x_n^\star\| \le \frac{\|K^{-1}\|}{1-p_n}\|y - y_n\| + p_n\|y\| = O(\varepsilon^{(n)} + \delta^{(n)}), \tag{1.3}$$

$$\|K^{-1}\|\alpha_n \le \|x^\star - x_n^\star\| \le \alpha_n\|K^{-1}\|,$$

$$\alpha_n = \|(y - y_n) + (K_n - K)x_n^\star\|. \tag{1.4}$$

Пусть $C = C[-1,1]$ - пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_{-1\le t\le 1}\|f(t)\|,$$

$\widetilde{C} = \widetilde{C}[0,2\pi]$ – пространство непрерывных 2π-периодических функций с аналогичной нормой. Обозначим через H_n и H_n^T соответственно подпространства алгебраических и тригонометрических полиномов степени не выше n. Тогда

$$E_n(\varphi) = \inf_{P_n \in H_n}\max_{-1\le t\le 1}\|\varphi(t) - P_n(t)\|$$

и

$$E_n^T(x) = \inf_{Q_n \in H_n^T}\max_{0\le t\le 2\pi}\|x(s) - Q_n(s)\|$$

- соответственно наилучшее равномерное приближение функции $\varphi(t) \in C$ алгебраическими полиномами степени не выше n, и наилучшее равномерное приближение функции $x(s) \in \widetilde{C}$ тригонометрическими полиномами степени не выше n.

Пусть

$$Jx \equiv J(x;s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}d\sigma \tag{1.5}$$

- сингулярный интеграл с ядром Гильберта, где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Всюду через

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\sigma)e^{-ik\sigma}d\sigma, \quad \varphi \in L_1, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

будем обозначать комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1 \equiv L$. Кроме того, регулярные ядра и правые части сингулярных интегральных уравнений без ограничения общности будет считать вещественными.

Пусть $L_n^T : \widetilde{C} \to H_n^T$ - оператор Лагранжа, ставящий в соответствие любой функции $x(s) \in \widetilde{C}$ ее тригонометрический полином Лагранжа порядка $n = \frac{N}{2}$.

$$L_n^T x = L_n^T(x;s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} x(s_k)\Delta_n(s - s_k) \tag{1.6}$$

по узлам

$$s_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N} \tag{1.7}$$

Здесь

$$\Delta_n(s) = D_n(s) = \frac{\sin(n + 1/2)s}{2\sin(s/2)}, \quad N = 2n + 1$$

- обыкновенное ядро Дирихле порядка n и

$$\Delta_n(s) = D_n^{\star}(s) = \frac{1}{2}\sin(ns)\operatorname{ctg}(\frac{s}{2}), \quad N = 2n$$

- так называемое модифицированное ядро Дирихле.

Задача решения уравнения называется корректно поставленной на паре пространств (X, Y), если выполнены следующие условия:

1) решение уравнения $x \in X$ существует при любой правой части $y \in Y$;

2) решение единственно;

3) решение устойчиво, т.е. малым изменениям правых частей соответствуют малые изменения решения.

Если существует правый обратный оператор $K_r^{-1} : Y \to X$, то решение уравнения (1.1) существует.

Если существует левый обратный оператор $K_l^{-1} : Y \to X$, то решение, в случае его существования, единственно.

Если существует двусторонний обратный оператор $K^{-1} : Y \to X$, и он является ограниченным, т.е. существует $M = const < \infty : \|K_l^{-1}\|_{Y \to X} \leq M$, то решение устойчиво.

§2. Постановка задачи и структура обратного оператора

Введем в рассмотрение интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью вида

$$Ax = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \qquad (2.1)$$

где $h(s,\sigma), y(s)$ - известные 2π-периодические непрерывные функции, $x(\sigma)$ - искомая 2π-периодическая функция, а слабо сингулярный интеграл

$$Sx \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right| x(\sigma)d\sigma \qquad (2.2)$$

понимается как несобственный.

Обозначим через $V = V[0,2\pi]$ линейное пространство непрерывных 2π-периодических функций $\varphi(s)$, для которых сингулярный интеграл с ядром Гильберта $J\varphi$, понимаемый в смысле главного значения по Коши, является также непрерывной функцией.

Норму в пространстве $V[0,2\pi]$ определим следующим образом:

$$\|\varphi\|_V = \|\varphi\|_{\widetilde{C}} + \|J\varphi\|_{\widetilde{C}}. \qquad (2.3)$$

Через $V^1 = V^1[0,2\pi]$ обозначим линейное пространство непрерывных 2π-периодичных функций, имеющих первые производные из пространства $V[0,2\pi]$, и с нормой

$$\|\varphi\|_{V^1} = \|\varphi\|_{\widetilde{C}} + \|\varphi'\|_V. \qquad (2.4)$$

В [8] показано, что эти пространства банаховы, и оператор $S : V \to V^1$ непрерывно обратим. Для полного слабосингулярного интегрального уравнения (2.1) установлены лишь достаточные условия корректности задачи его решения в указанных пространствах.

В дипломной работе ставится задача установить корректность задачи существования решения уравнения (2.1) в случае, когда ядро $h(s,\sigma)$ разностное.

Рассматривается частный случай уравнения (2.1), а именно уравнение вида

$$Kx = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| x(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s-\sigma)x(\sigma)d\sigma = y(s), \qquad (2.5)$$

где искомая функция $x(s)$ ищется в пространстве $V[0,2\pi]$, а $h(s) \in V^1[0,2\pi]$ и $y(s) \in V^1[0,2\pi]$ - известные 2π-периодические функции, причем $h(s)$ - четная функция.

В [2] установлен явный вид обратного оператора $K^{-1} : W_2^1 \to L_2$.

Следуя [2], если ядро $h(s)$ таково, что

$$c_0(h) \neq -\ln 2, \quad 2|k|c_k(h) \neq -1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \qquad (2.6)$$

то оператор $K : V^1 \to V$ имеет обратный.

Покажем, что

$$K^{-1}(y;s) = \frac{c_0(y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2i\sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')\ \mathrm{sgn}k}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks}, \quad y \in V^1. \qquad (2.7)$$

Действительно, разложим функции $x(s)$, $y(s)$, $h(s)$ и $g(s)$ в ряды Фурье:

$$\begin{aligned} (s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks}, \qquad & y(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{iks}, \\ h(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(h)e^{iks}, \qquad & g(s) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(g)e^{iks}, \end{aligned} \qquad (2.8)$$

где

$$c_k(g) = \left\{ \ln 2 \ \textit{при} \ k = 0, \ \frac{1}{2|k|} \ \textit{при} \ k \neq 0 \right\}, \ g(\sigma) = -\ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right|. \qquad (2.9)$$

Делая замену переменных и учитывая 2π-периодичность функций, имеем

$$Kx = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\ \left|\sin\frac{\sigma}{2}\right| x(s-\sigma)d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(\sigma)x(s-\sigma)d\sigma = y(s). \qquad (2.10)$$

Подставив (2.8) в (2.10), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(g)e^{iks} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(h)e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{iks}. \qquad (2.11)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)[c_k(g)+c_k(h)]e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{iks}. \qquad (2.12)$$

Откуда

$$c_k(x) = \frac{c_k(y)}{c_k(g)+c_k(h)} \equiv c_k(x^\star), \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Поскольку $c_k(g) = O(\frac{1}{k})$, а $h(s) \in W_1^1$, то $c_k(g){+}c_k(h)c_k(g)$ и $|k|c_k(h) = o(1)$, $k \to \infty$; поэтому, учитывая соотношения (2.6) и (2.8), находим

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{c_k(g)+c_k(h)}e^{iks} =$$

$$= \frac{c_0(y)}{c_0(g)+c_0(h)} + \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y)e^{iks}}{c_k(g)+c_k(h)} =$$

$$= \frac{c_0(y)}{c_0(g)+\ln 2} - 2i\sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')\ \mathrm{sgn} k}{1+2|k|c_k(h)}e^{iks} \equiv x^\star(s) \equiv K^{-1}y.$$

Таким образом (2.7) установлено.

§3. Ограниченность обратного оператора

Лемма 3.1. Если существует $\lambda = const > 0$ такая, что

$$|c_0(h) + \ln 2| \geq \frac{1}{\lambda}, \quad |1 + 2|k|c_k(h)| \geq \frac{2}{\lambda}, \quad k \neq 0,$$

то справедлива оценка

$$\|K^{-1}y\|_{V^1 \to V} \leq 2\lambda. \tag{3.1}$$

Доказательство. Учитывая определение нормы (2.3) и вид обратного оператора $K^{-1} : V^1 \to V$ (2.7), имеем

$$\|K^{-1}y\|_V = \|K^{-1}y\|_{\widetilde{C}} + \|I(B^{-1}y)\|_{\widetilde{C}} =$$

$$= \left\| \frac{c_0(y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks} \right\|_{\widetilde{C}} +$$

$$+ \left\| J \left(\frac{c_0(y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks} \right) \right\|_{\widetilde{C}}.$$

Применяя для первого слагаемого неравенство треугольника и учитывая свойства сингулярного интеграла с ядром Гильберта, получим

$$\|K^{-1}y\|_V \leq \left\| \frac{c_0(y)}{c_0(h) + \ln 2} \right\|_{\widetilde{C}} + \left\| 2i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks} \right\|_{\widetilde{C}} +$$

$$+ \left\| 2iJ \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks} \right\|_{\widetilde{C}} =$$

$$= \left\| \frac{c_0(y)}{c_0(h) + \ln 2} \right\|_{\widetilde{C}} + \left\| 4i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y') \operatorname{sgn} k}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks} \right\|_{\widetilde{C}}$$

Оценим первое слагаемое

$$\left\|\frac{c_0(y)}{c_0(h)+\ln 2}\right\|_{\widehat{C}} = \left|\frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y(s)ds}{c_0(h)+\ln 2}\right| \leq \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |y(s)|ds}{|c_0(h)+\ln 2|}$$

$$\leq \lambda \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |y(s)|ds \leq \lambda \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max_{0\leq s\leq 2\pi} |y(s)|ds \leq \lambda \max_{0\leq s\leq 2\pi} |y(s)| \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ds =$$

$$\lambda \|y\|_{\widetilde{C}} \frac{1}{2\pi} 2\pi = \lambda \|y\|_{\widetilde{C}}.$$

Оценим второе слагаемое

$$\left\| 4i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y') \operatorname{sgn}}{1+2|k|c_k(h)} e^{iks} \right\|_{\widetilde{C}} \leq \left| \max_{0\leq s\leq 2\pi} |4i| \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y') \operatorname{sgn}}{1+2|k|c_k(h)} e^{iks} \right| \leq$$

$$\leq 4 \frac{\lambda}{2} \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|=1}^{\infty} \max_{0\leq s\leq 2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} y'(t) e^{-ikt} dt \; e^{iks} \right) \leq \lambda \|y'\|_{\widetilde{C}}.$$

Тогда

$$\|K^{-1}y\|_V \leq 2\lambda(\|y\|_{\widetilde{C}} + \|y'\|_{\widetilde{C}}) \leq 2\lambda(\|y\|_{\widetilde{C}} + \|y'\|_{\widetilde{C}} + \|Iy'\|_{\widetilde{C}}) =$$

$$= 2\lambda(\|y\|_{\widetilde{C}} + \|y'\|_V) = 2\lambda\|y\|_{V^1}.$$

§4. Проекционные методы

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде тригонометрического полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \quad \overline{\alpha_k} = \alpha_{-k}, \quad n \in N, \tag{4.1}$$

коэффициенты которого определим исходя из минимальности невязки

$$r_n \equiv y - Ax_n \equiv \Psi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^{n}) = r_n(s). \tag{4.2}$$

Минимальность невязки может пониматься по-разному.

Если невязка ортогональна системе функций $\left\{e^{iks}\right\}$, то есть

$$\int_0^{2\pi} \Psi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^{n}) e^{-ijs} ds = 0, \quad j = \overline{-n, n}, \tag{4.3}$$

то имеем метод Галеркина по тригонометрической системе функций.

Если невязка обращается в нуль на некотором конечном множестве точек, то есть

$$\Psi(s_j; \{\alpha_k\}_{-n}^{n}) = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{4.4}$$

где $\{s_j\}$ - некоторая система попарно неэквивалентных узлов, то имеем метод коллокации.

Каждое из условий (4.3)-(4.5) приводит к СЛАУ порядка $N = 2n + 1$. В случае разностного ядра матрица этой системы явдяется очень простой, а именно диагональной с элементами $c_k(g) + c_k(h), \quad k = \overline{-n, n}$. Поэтому проекционные методы очень просты при численной реализации.

Обозначим $\{\alpha_k^{\star}\}_{-n}^{n}$ - решение (4.3) или (4.4), тогда за приближенное решение слабо сингулярного уравнения (2.1) будем принимать полином

$$x_n^\star(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\star e^{iks}, \quad \overline{\alpha_k^\star} = \alpha_{-k}^\star,$$

Условия (4.3) и (4.4), представляющие собой СЛАУ, могут быть представлены в операторном виде следующим образом.

$$K_n x_n = P_n K x_n = P_n y, \tag{4.5}$$

где

$$x_n \in H_n^T \subset V, \quad P_n y \in H_n^T \subset V^1,$$

$P_n : V \to V^1$ - линейный проекционнный оператор.

С учетом проекционности и свойства слабо сингулярного интеграла, имеем

$$P_n K x_n = K x_n.$$

И окончательно это означает, что приближенное уравнение может быть представлено в виде

$$K_n x_n = K x_n = P_n y. \tag{4.6}$$

Теорема 4.1. Если с.и.у. (2.5) имеет единственное решение $x^\star \in V$ при любой $y \in V^1$, то при любых $n = 0, 1, \ldots$ приближенное уравнение (4.5) также имеет единственное решение

$$x_n^\star(s) = \frac{c_0(P_n y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2i \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k((P_n y)') \operatorname{sgn} k}{1 + 2|k| c_k(h)} e^{iks}, \tag{4.7}$$

и справедлива оценка

$$\|x^\star - x_n^\star\|_{\widetilde{C}} \le 2\lambda \|y - P_n y\|_{V^1}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Как отмечалось выше, приближенное решение (4.5) принимает вид (4.6). Иными словами, для с.и.у. (2.5) оператор K_n приближенного уравнения рассматриваемого проекционного метода совпадает с сужением исходного оператора K на $X_n \subset X$. Следовательно, для всех $n = 0, 1, \dots$ существует приближенное решение

$$x_n^\star = K_n^{-1} P_n y = K^{-1} P_n y. \tag{4.9}$$

Учитывая (4.9) и вид обратного оператора (2.7), получаем представление (4.7).

Установим справедливость оценки (4.8).

$$\|x^\star - x_n^\star\|_{\widetilde{C}} \le \|x^\star - x_n^\star\|_V = \|K^{-1}y - K^{-1}P_n y\|_V \le \|K^{-1}\|_{V^1 \to V} \|y - P_n y\|_{V^1} =$$

$$= 2\lambda \|y - P_n y\|_{V^1}.$$

Таким образом, оценка (4.8) установлена.

Следствие. Если $\|y - P_n y\| \to 0$, то $x_n^\star \to x^\star$ равномерно.

§5. Метод коллокации

Решение уравнения (2.1) будем искать в виде тригонометрического полинома вида

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \quad \overline{\alpha_k} = \alpha_{-k}, \tag{5.1}$$

Коэффициенты α_k найдем из условия равенства нулю невязки в узлах. В качестве узлов возьмем равноотстоящие узлы

$$s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}. \tag{5.2}$$

Выведем вычислительную схему метода коллокации.

Вместо $x(\sigma)$ подставляем $x_n(\sigma)$ и рассматриваем невязку:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s-\sigma) \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma} d\sigma - y(s).$$

Приравниваем невязку нулю в узлах (5.2):

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s_j-\sigma}{2}\right| \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_j-\sigma) \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\sigma} d\sigma - y(s_j) = 0.$$

Учитывая свойства определенного интеграла, имеем:

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(-\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s_j-\sigma}{2}\right| e^{ik\sigma} d\sigma + \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(\frac{1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} h(s_j-\sigma) e^{ik\sigma} d\sigma - y(s_j) = 0$$

Интеграл $\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s_j-\sigma}{2}\right| e^{ik\sigma} d\sigma$ вычисляется точно.

$$\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s_j-\sigma}{2}\right| e^{ik\sigma} d\sigma = c_k(g) e^{iks_j}, \textit{где} g = -\ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right|.$$

$$c_k(g) = \left\{ \ln 2 \; \textit{при} \; k = 0, \; \frac{1}{2|k|} \; \textit{при} \; k \neq 0 \right\}, \; g(\sigma) = -\ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right|.$$

Интеграл $h_{jk} \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(s_j - \sigma) e^{ik\sigma} d\sigma$ также может быть вычислен либо точно, либо по квадратурной формуле.

Таким образом, приходим к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(c_k(g) e^{iks_j} + h_{jk} \right) = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{5.3}$$

решив которую, находим $\alpha_k^\star, \quad k = \overline{-n, n}$.

Тогда приближенное решение $x_n^\star(s)$ уравнения (2.1) может быть представлено в виде

$$x_n^\star(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\star e^{iks}.$$

Теорема 5.1 Пусть уравнение (2.5) имеет единственнное решение $x^\star \in V$ при $y \in V^1$. Тогда СЛАУ метода коллокации также однозначно разрешима, и для погрешности приближенного решения справедлива оценка

$$\|x^\star - x_n^\star\|_{\widetilde{C}} \leq 2\lambda \|y - L_n^T y\|_{V^1}.$$

Доказательство. Система метода коллокации (5.3) с учетом с учетом свойств интерполяционного полинома Лагранжа может быть представлена следующим образом

$$K_n x_n = L_n K x_n = K x_n = L_n y.$$

Тогда из теоремы 4.1 при $P_n = L_n$ следует утверждение теоремы.

Следствие. Если $y \in W^{r+1} H_\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1, r \geq 0$. Тогда приближенное решение

$$x_n^\star(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^\star e^{iks}$$

сходится к точному решению $x_n^\star(s)$ равномерно со скоростью

$$\|x^\star - x_n^\star\|_{\widetilde{C}} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Доказательство. В [8] получены следующие оценки приближения функции φ интерполяционными тригонометрическими полиномами:

Для $\varphi \in V[0, 2\pi]$

$$\|L_n^T \varphi\|_V \leq \left(\frac{8}{\pi} + \frac{1}{n} + \frac{4}{\pi} \ln \frac{2}{\pi}(2n+1)\right) \|\varphi\|_V,$$

$$\|\varphi - L_n^T \varphi\|_V \leq O\left\{\omega(\varphi, \frac{1}{n}) \ln n + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(\varphi, t)}{t} dt\right\},$$

и для $\varphi \in V^1[0, 2\pi]$

$$\|\varphi - L_n^T \varphi \ \|_{V^1} = O\left\{\omega(\varphi', \frac{1}{n}) \ln n + \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\omega(\varphi', t)}{t} dt\right\},$$

откуда слудует утверждение следствия.

§6. Метод Галеркина

Решение уравнения (2.5) будем искать в виде тригонометрического полинома вида (5.1).

Коэффициенты α_k определим из равенства нулю $2n+1$ момента невязки по тригонометрической системе функций.

Это условие приводит к системе уравнений

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ik\sigma}d\sigma+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h(s-\sigma)\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{ik\sigma}d\sigma-y(s)e^{-ijs}ds=0. \qquad (6.1)$$

После преобразований получим

$$\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\left(-\frac{1}{2\pi}\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|e^{ik\sigma}e^{-ijs}d\sigma ds+$$

$$+\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h(s-\sigma)e^{ik\sigma}e^{-ijs}d\sigma ds=\int\limits_0^{2\pi}y(s)e^{-ijs}ds.$$

Обозначим

$$h_{jk}\equiv\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}h(s-\sigma)e^{ik\sigma}e^{-ijs}d\sigma ds.$$

Таким образом

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k c_k(g)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{ik\sigma}e^{-ijs}d\sigma ds-\sum_{k=-n}^{n}h_{jk}\alpha_k=c_j(y).$$

Следовательно, условия (4.3) эквивалентны СЛАУ

$$\alpha_j c_j(g)+\sum_{k=-n}^{n}h_{jk}\alpha_k=c_j(y), \quad j=\overline{-n,n}, \qquad (6.2)$$

где $c_j(g)$ определены в (2.9), а $c_j(\varphi)$ - коэффициенты Фурье функции $\varphi(s) \in L_1[0, 2\pi]$.

Теорема 6.1 В условиях леммы 3.1, если $y \in W^{r+1}H_\alpha$, то приближенное решение, полученное по методу Галеркина, равномерно сходится к точному со следующей скоростью

$$\|x_n^\star - x^\star\|_{\widetilde{C}} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Из оценки приближения функций отрезками рядов Фурье по тригонометрической системе функций в V^1, полученной в [8], следует

$$\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_{V^1} = \|\varphi - \Phi_n\varphi\|_{\widetilde{C}} + \|(\varphi - \Phi_n\varphi)'\|_V \leq$$

$$\leq (3 + \ln n)E_n(\varphi) + \|\varphi' - \Phi_n\varphi'\|_V \leq$$

$$\leq (3 + \ln n)E_n(\varphi) + \left(5 + \left(3 + \frac{2}{\pi}\ln n\right)\right) E_n(\varphi') + \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\omega(\varphi' - T_n; \sigma)}{\sigma} d\sigma.$$

Если $\varphi \in W^{r+1}H_\alpha$, то справедлива оценка

$$\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_{V^1} = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\right).$$

Тогда при $P_n = \Phi_n$ из теоремы 4.1 следует утверждение теоремы.

Теорема 6.2.Если с.и.у. однозначно разрешимо при любой правой части из V^1, то при любом n система метода Галеркина однозначно разрешима, и погрешность приближенного решения может быть представлена в виде

$$x^\star(s) - x_n^\star(s) = -2i \sum_{|k|=n+1}^{\infty} \frac{c_k(y')\,\mathrm{sgn} k}{1 + 2|k|c_k(h)} e^{iks}, \tag{6.3}$$

и справедлива оценка

$$\|x^{\star}(s)-x_n^{\star}(s)\|_{\widetilde{C}}=2\frac{E_n^T(y')_{\widetilde{C}}}{\min_{k\geq n+1}|1+2kc_k(h)|}. \tag{6.4}$$

Доказательство. Поскольку оператор K_n операторного уравнения метода Галеркина совпадает с сужением исходного оператора K на X_n, то для всех $n=0,1,\ldots$ существует приближенное решение

$$x_n^{\star}=K_n^{-1}\Phi_n y=K^{-1}\Phi_n y,$$

и тогда справедливо представление

$$x_n^{\star}(s)=\frac{c_0(\Phi_n y)}{c_0(h)+\ln 2}-2i\sum_{|k|=1}^{n}\frac{c_k(\Phi_n y)'\,\mathrm{sgn}k}{1+2|k|c_k(h)}e^{iks}.$$

Так как

$$c_k(\Phi_n\varphi)=c_k(\varphi),\quad k=\overline{0,n},$$

то

$$c_k((\Phi_n\varphi)')=c_k(\varphi'),\quad k=\overline{1,n}$$

и

$$c_k((\Phi_n\varphi)')=0,\quad |k|\geq n+1.$$

Тогда получаем представление (6.3). Оценка (6.4) получается используя определение нормы пространства V и определение наилучшего равномерного приближения.

Список литературы

1. Воронин В.В., Цецохо В.А. Численное решение интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью методом интерполяции и коллокации// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1981. Т.21, № 1. С. 40 - 53.

2. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006. 137 с.

3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. 167 с.

4. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике. — М.: МАКС Пресс, 2010. 316 с.

5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва: Физматгиз, 2007. 684 с.

6. Плещинский П.И. Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. - Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987. 157 с.

7. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. М: Л:Гостехиздат, 1949. 688 с.

8. Ожегова А.В. Равномерные приближения решений слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: дисс. канд. физ.-мат. наук. Казан. гос. университет, Казани, 1996.

9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наукова думка, 1984. 344 с.