УДК: 621.396.961 DOI: 10.26907/rwp29.2025.504-507

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ РАДИОВОЛН В ПЛАВНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

В.В. Ахияров, С.Д. Сапрыкин, И.В. Тютин, М.А. Утенков

АО НПОДАР имени академика А.Л. Минца,
127083, г.Москва, ул. 8 Марта, д. 10, стр. 1
E-mail: itutin@npodr.ru, mutenkov@npodr.ru

Аннотация. В работе представлен алгоритм аналитического расчета лучевых траекторий при наличии одной точки поворота и выполнено сравнение полученных результатов с вычислениями по методу параболического уравнения. Результаты расчетов для полубесконечного линейного слоя показали, что на качественном уровне оба метода приводят к одинаковому результату и позволяют наблюдать одни и те же каустические особенности. Однако, метод параболического уравнения дает более наглядное представление о моделируемом процессе и позволяет получить количественную оценку амплитуды поля непосредственно на каустике.

Ключевые слова: геометрическая оптика; лучевая траектория; метод параболического уравнения.

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTION OF THE RADIO WAVE PROPAGATION IN A SMOOTHLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

V.V. Akhiyarov, S.D. Saprykin, I.V. Tutin, M.A. Utenkov

Abstract. This paper presents an algorithm for analytical calculation of ray tracing in the presence of a single pivot point and compares the results obtained with calculations using the parabolic equation method. The results of the calculations for a semi-infinite linear layer show that, at the qualitative level, both methods lead to the same result and allow us to observe the same caustic features. However, the parabolic equation method gives a more visual representation of the modeled process and allows us to obtain a quantitative estimate of the field amplitude directly on the caustic.

Keywords: geometrical optics; ray tracing; parabolic equation method.

Введение

Решение задачи распространения волн в плавно-неоднородных средах возможно с использованием лучевых, либо волновых методов. Лучевые методы основаны на приближении геометрической оптики (ГО) и если показатель преломления $n(z)$ зависит только от одной координаты, задачу построения лучевых траекторий можно решить в замкнутой форме [1]. С другой стороны, в настоящее время существуют эффективные волновые методы расчета амплитуды поля [2, 3, 4], основанные на численном решении параболического уравнения (ПУ). В данной работе представлены результаты решения лучевым и волновым методом хорошо известной модельной задачи распространения волн в полубесконечном линейном слое.

Алгоритм вычисления лучевых траекторий и амплитуды поля в плавно-неоднородной среде

В приближении геометрической оптики (ГО) при распространении волн в среде с показателем преломления $n(\boldsymbol{r})$ функция эйконала $\psi(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет уравнению:

$$(\nabla\psi(\boldsymbol{r}))^2 = n^2(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

которое принадлежит к классу уравнений Гамильтона-Якоби. Уравнение (1) решается методом характеристик, который основан на приведении уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 5].

Для двумерной задачи в декартовых координатах будем считать, что показатель преломления $n(z)$ зависит только от вертикальной координаты. В этом случае расчет лучевых траекторий сводится к решению одного уравнения [1]:

$$\frac{dx}{dz} = \pm \frac{p_x^0}{\sqrt{n^2(z) - \left(p_x^0\right)^2}}, \tag{2}$$

где $p_x^0 = n(0)\cos(\theta_0)$, θ_0 – угол выхода луча, $p_z = \pm\sqrt{n^2(z) - \left(p_x^0\right)^2}$, знак «+» соответствует восходящей ветви луча, а «–» – нисходящей ветви.

При наличии точки поворота луча с координатами (x_p, z_p) решение (2) имеет вид:

$$x = \left(\int_{z_0}^{z_p} \mp \int_{h}^{z_p} \frac{\cos(\theta_0) n(0)}{\sqrt{n(z)^2 - \cos(\theta_0)^2 n(0)^2}} dz \right), \tag{3}$$

где h – текущая высота лучевой траектории, знак «–» берется до точки поворота, знак «+» – после нее.

Отметим, что в [1] угол выхода луча отсчитывался от вертикальной оси, в данной работе – от горизонтальной. Поэтому в (3) была выполнена замена $\sin(\theta_0) \to \cos(\theta_0)$. Видно, что алгоритм построения лучевых траекторий (3) является очень простым, однако его очевидным недостатком является требование отсутствия вариаций показателя преломления в горизонтальном направлении.

Решение рассматриваемой задачи с использованием волнового подхода выполняется методом параболического уравнения [2]. Как показали результаты расчетов, стандартное ПУ не обеспечивает требуемой точности вычислений в плавно-неоднородной среде, если показатель преломления изменяется в достаточно широких пределах. Поэтому в данной работе было использовано ПУ, полученное в [6] для линзовых антенн:

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial x} = -jk(z)\left(1 - \sqrt{\frac{1}{k(z)^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1}\right)u(x,z) + jk_0\left(n(z) - 1\right)u(x,z), \tag{4}$$

где $u(x, z)$ – искомая амплитуда поля, $k(z) = k_0 n(z)$, $k_0 = 2\pi/\lambda$.

Отличие (4) от стандартного ПУ заключается в замене волнового числа в свободном пространстве на функциональную зависимость $k(z)$ в первом слагаемом правой части уравнения. В этом случае (4) обладает такой же математической строгостью, что и исходное ПУ для распространения «вперед», которое было получено в результате факторизации уравнения Гельмгольца [2, 6].

Результаты расчетов для полубесконечного слоя

Для сравнения результатов, полученных лучевым и волновым методом, была рассмотрена модельная задача распространения волн в полубесконечном линейном слое $n^2(z) = 1 - az$ при $z \geq 0$ и $n^2(z) = 1$ при $z < 0$. Для расчетов было выбрано значение $a = 0{,}002$, которое ограничивает максимальную высоту при вертикальном распространении волн на уровне 500 км. На рис. 1.а, в, д представлены полученные с использованием (3) лучевые траектории при изменении угла выхода луча θ_0 от 2^0 до 88^0 с шагом 2^0 и различных положениях источника поля. Случай $z_0 = 0$ был рассмотрен в [7], в данной работе были выбраны значения $z_0 = -100\ км$ (источник ниже границы линейного слоя и свободного пространства), $z_0 = 10\ км$ и $z_0 = 50\ км$ (источник внутри линейного слоя). На рис. 1.б, г, е представлены результаты расчетов методом ПУ для тех же самых положений источника. Сравнение представленных результатов показывает, что метод ПУ с хорошей точностью воспроизводит каустические особенности поля (при $z_0 = -100\ км$ и $z_0 = 10\ км$ хорошо видна каустика «ласточкин хвост»). Отметим, что результаты расчета лучевых траекторий не зависят от длины волны, при решении ПУ (4) было выбрано значение $\lambda = 50\ м$.

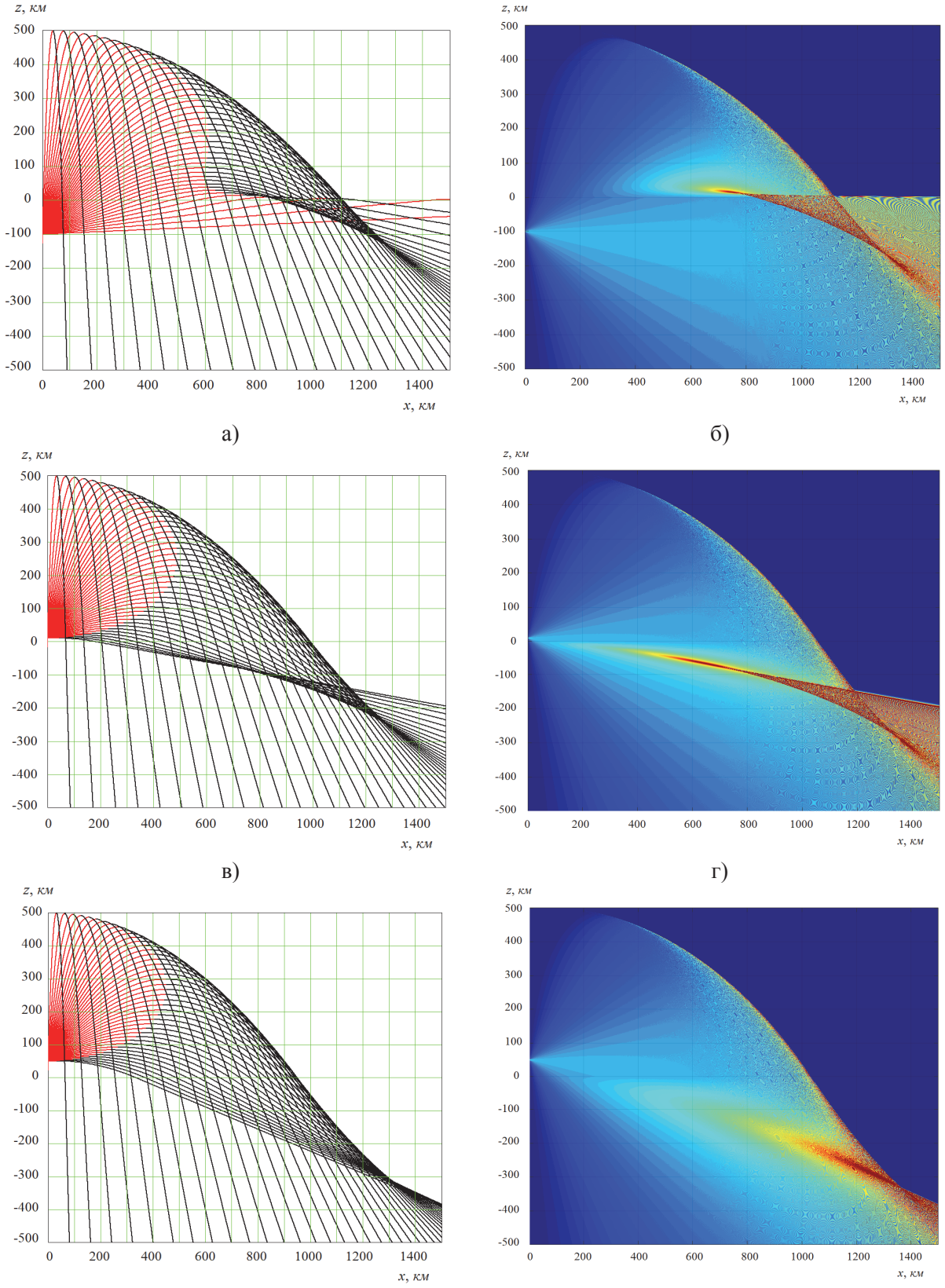
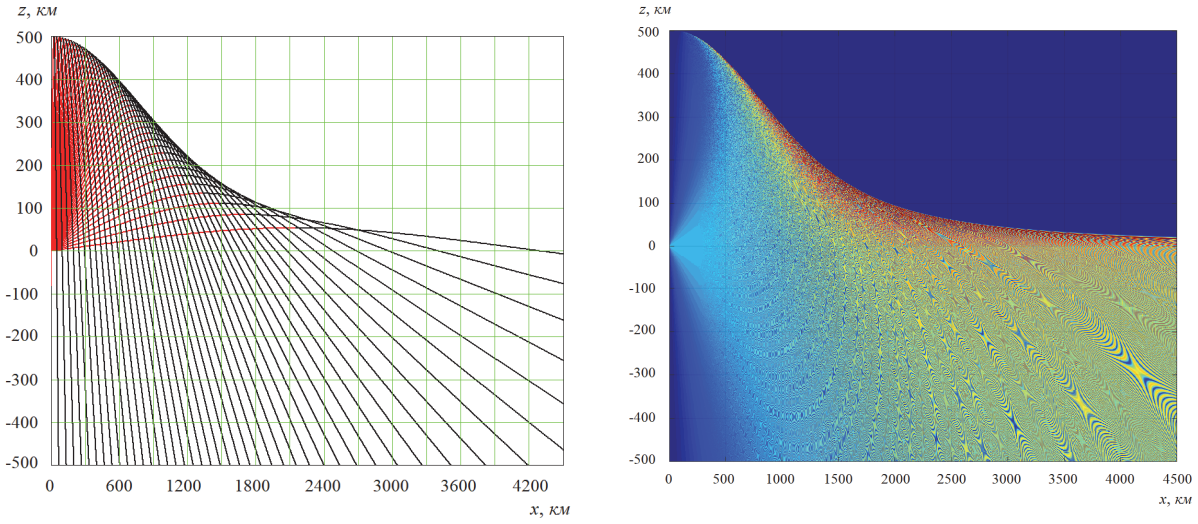


Рис. 1. Лучевые траектории (а, в, д) и решение методом ПУ (б, г, е)
для полубесконечного линейного слоя
при $z_0 = -100$ *км* (а, б), $z_0 = 10$ *км* (в, г) и $z_0 = 50$ *км* (д, е)

В полубесконечном квадратичном слое образуется только гладкая каустика [1]. То же самое можно сказать и о полубесконечном кубическом слое $n^2(z)=1-(az)^3$ при $z\ge 0$ и $n^2(z)=1$ при $z<0$, соответствующие расчеты для $a=0{,}002$ и $z_0=0$ представлены на рис.2. Как и в предыдущем случае, наблюдается полное соответствие каустик, полученных лучевым и волновым методом.



а) б)

Рис. 2. Лучевые траектории (а) и решение методом ПУ (б)
для полубесконечного кубического слоя

Заключение

Таким образом, в работе представлены результаты решения задачи распространения радиоволн в плавно-неоднородной среде лучевым и волновым методом. Достоинством лучевого подхода является простота и возможность получить решение в замкнутой форме, если показатель преломления изменяется только по одной координате. Волновой метод свободен от данного ограничения и, кроме того, он дает количественную оценку амплитуды поля в области очень протяженной (на рис.2 до 4500 км) каустики.

Список литературы

1. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
2. Levy M.F. Parabolic equation method for electromagnetic wave propagation. London: IEE, 2000. – 336 p.
3. Ахияров В.В. Результаты решения скалярных задач излучения и дифракции методом параболического уравнения // Электромагнитные волны и электронные системы. 2014. – № 2. – С. 12–18.
4. Ахияров В.В., Тютин И.В., Сапрыкин С.Д. Моделирование распространения радиоволн КВ диапазона в ионосфере Земли // Сборник докладов XXVIII Всероссийской открытой научной конференции «Распространение радиоволн». Йошкар-Ола, 2023. – С. 475–478.
5. Крюковский А.С., Лукин Д.С., Кирьянова К.С. Метод расширенной бихарактеристической системы при моделировании распространения радиоволн в ионосферной плазме // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57. – № 9. – С. 1028–1034.
6. Ахияров В.В. Исследование линзовых антенн из неоднородного диэлектрика методом параболического уравнения // Журнал радиоэлектроники. 2015. – № 12. – URL: http://jre.cplire.ru/jre/dec15/13/text.pdf.
7. Ахияров В.В. Результаты аналитического расчета лучевых траекторий в плавно–неоднородной среде // Сборник докладов XXX Международной научно–технической конференции «Радиолокация, навигация, связь»: в 5-ти томах. – Воронеж, 2024. – С. 250–257.