Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

6 класс

Вариант № 1

---

1. Решите уравнение $|x| + |x-3| + |x+3| + |x-5| + |x+5| = 16$.

Ответ: $x = 0$.

Решение. $|x-a|$ выражает расстояние между числами x и a на числовой прямой. Тогда $|x-3|+|x+3|$ выражает сумму расстояний от числа x до числа 3 и от числа x до числа -3, которая не может быть менее 6, а $|x-5|+|x+5|$, в свою очередь, не может быть меньше 10. Таким образом, $|x-3|+|x+3|+|x-5|+|x+5|$ не меньше 16, а значит $|x|$ не больше 0. Значит, среди корней данного уравнения не может быть чисел, отличных от 0. Непосредственная проверка показывает, что 0 является корнем уравнения.

2. Саша пометил шифром свои 660 карандашей, пользуясь буквами. Он использовал 24 греческих букв. Комбинация шифров: AAA, AAB, AAГ, AAD, AAE, AAZ, AAH, AAQ, AAI, AAK, AAL, AAM, AAN, ..., AAW, ABA, ... Постарайтесь рассчитать шифр последнего карандаша.

Ответ: BDM.

3. Дана прямоугольная таблица, которая разделена на ячейки. Нужно заполнить каждую ячейку так, чтобы и по длине, и по ширине сумма равна была 13 в любых 3 соседних ячейках.

	5						
					1		
6							
			3				

Ответ:

3	5	5	3	5	5	3	5
4	8	1	4	8	1	4	8
6	0	7	6	0	7	6	0
3	5	5	3	5	5	3	5

4. В каждой клетке доски размера 15×15 написано какое-то натуральное число от 1 до 29. Будем считать, что ладья бьёт все клетки, расположенные с ней на одной горизонтали, на одной вертикали, и клетку, на которой она стоит. У Вовочки есть 15 ладей, но он расстроится, если какая-то из ладей будет бить хотя бы две клетки с одинаковыми числами. Сможет ли Вовочка расставить все свои ладьи так, чтобы они не били друг друга, и при этом не расстроиться?

Ответ: нет, не сможет.

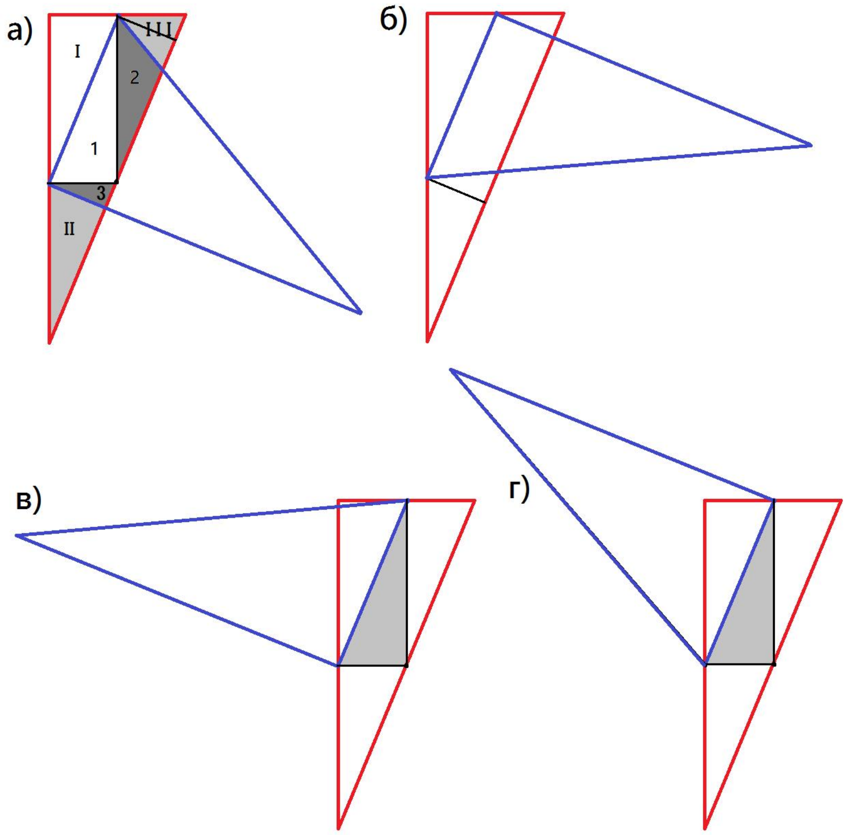
Решение. Для того чтобы ладьи на доске не били друг друга, на каждой горизонтали и на каждой вертикали не должно находиться более 1 ладьи. С учетом того, что ладей ровно 15 штук, на каждой горизонтали и на каждой вертикали доски 15×15 ладей должно быть ровно по одной. Тогда всякая клетка бьётся двумя ладьями, если она свободна от ладей, и ровно одной ладьей, если на этой клетке стоит ладья (ей самой). Предположим, что Вовочке удалось расставить их так, и к тому же не расстроиться. Под боем всякой ладьи находится 29 клеток доски, значит эти клетки содержат все числа от 1 до 29 ровно по одному разу. Таким образом, каждое число должно оказаться под боем каждой ладьи ровно 1 раз. Всего ладей 15 штук, а значит каждое число должно быть записано на доске минимум $14/2{=}7$ и ещё 1 раз. Но для этого требуется $29 \times 8 = 232$ клетки, в то время как всего на доске 225 клеток – противоречие.

5. У Димы было два прямоугольных листа бумаги: красный – со сторонами 20 и 48, и синий – со сторонами 26 и 52. Он разрезал оба этих листа пополам по диагоналям и получил 4 треугольника – 2 красных и 2 синих. После этого Дима положил красный треугольник на стол, а сверху положил синий треугольник (не сгибая никакие из них), причем две вершины верхнего оказались в серединах двух меньших сторон нижнего треугольника. Какая часть нижнего треугольника больше по площади: накрытая верхним, или не накрытая?

Ответ: Площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части.

Решение. На рисунке 1 представлены 4 случая расположения верхнего (синего) треугольника относительно нижнего (красного) треугольника, с некоторыми дополнительными построениями. В случае а) накрытая часть нижнего треугольника состоит из треугольников 1, 2 и 3, а открытая часть - из треугольников I, II и III. Площадь треугольника I равна площади треугольника 1, площадь треугольника II больше площади треугольника 2 и площадь

Рис. 1: К задаче № 5



треугольника III больше площади треугольника 3. Таким образом, площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части. В случае б) площадь накрытой части нижнего треугольника равна площади накрытой части нижнего треугольника в случае а). Результаты сравнений в случаях в) и г) с выполненными дополнительными построениями очевидны.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

6 класс

Вариант № 2

---

1. Решите уравнение $|x-4|+|x-2|+|x|+|x+2|+|x+4|=12$.

Ответ: $x=0$.

Решение. $|x-a|$ выражает расстояние между числами x и a на числовой прямой. Тогда $|x-4|+|x+4|$ выражает сумму расстояний от числа x до числа 4 и от числа x до числа -4, которая не может быть менее 8, а $|x-2|+|x+2|$, в свою очередь, не может быть меньше 4. Таким образом, $|x-4|+|x+4|+|x-2|+|x+2|$ не меньше 12, а значит $|x|$ не больше 0. Значит, среди корней данного уравнения не может быть чисел, отличных от 0. Непосредственная проверка показывает, что 0 является корнем уравнения.

2. Иван пометил шифром свои 630 карандашей, пользуясь буквами. Он использовал 24 греческих букв. Комбинация шифров: AAA, AAB, AAΓ, AAD, AAE, AAZ, AAH, AAQ, AAI, AAK, AAL, AAM, AAN, ..., AAW, ABA, ... Постарайтесь рассчитать шифр последнего карандаша.

Ответ: BΓZ.

3. Дана прямоугольная таблица, которая разделена на ячейки. Нужно заполнить каждую ячейку так, чтобы и по длине, и по ширине сумма равна была 12 в любых 3 соседних ячейках.

	5						
					1		
6							
			2				

Ответ:

2	5	5	2	5	5	2	5
4	7	1	4	7	1	4	7
6	0	6	6	0	6	6	0
2	5	5	2	5	5	2	5

4. В каждой клетке доски размера 17×17 написано какое-то натуральное число от 1 до 33. Будем считать, что ладья бьёт все клетки, расположенные с ней на одной горизонтали, на одной вертикали, и клетку, на которой она стоит. У Вовочки есть 17 ладей, но он расстроится, если какая-то из ладей будет бить хотя бы две клетки с одинаковыми числами. Сможет ли Вовочка расставить все свои ладьи так, чтобы они не били друг друга, и при этом не расстроиться?

Ответ: нет, не сможет.

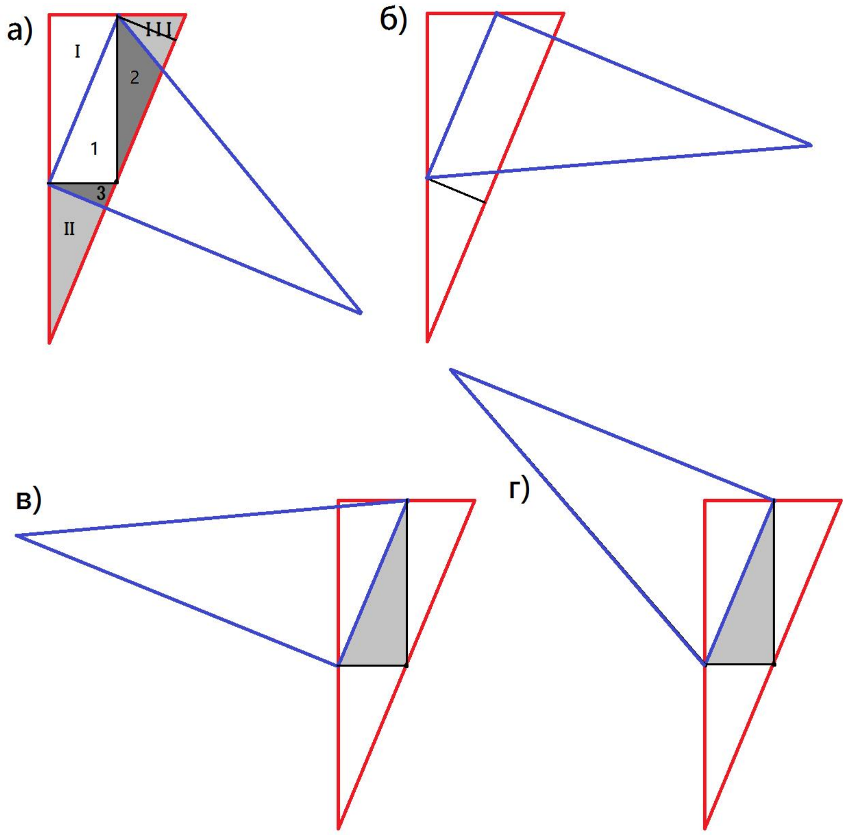
Решение. Для того чтобы ладьи на доске не били друг друга, на каждой горизонтали и на каждой вертикали не должно находиться более 1 ладьи. С учетом того, что ладей ровно 17 штук, на каждой горизонтали и на каждой вертикали доски 17×17 ладей должно быть ровно по одной. Тогда всякая клетка бьётся двумя ладьями, если она свободна от ладей, и ровно одной ладьей, если на этой клетке стоит ладья (ей самой). Предположим, что Вовочке удалось расставить их так, и к тому же не расстроиться. Под боем всякой ладьи находится 33 клетки доски, значит эти клетки содержат все числа от 1 до 33 ровно по одному разу. Таким образом, каждое число должно оказаться под боем каждой ладьи ровно 1 раз. Всего ладей 17 штук, а значит каждое число должно быть записано на доске минимум $16/2{=}8$ и ещё 1 раз. Но для этого требуется $33 \times 9 = 297$ клетки, в то время как всего на доске 289 клеток – противоречие.

5. У Димы было два прямоугольных листа бумаги: красный – со сторонами 10 и 24, и синий – со сторонами 13 и 26. Он разрезал оба этих листа пополам по диагоналям и получил 4 треугольника – 2 красных и 2 синих. После этого Дима положил красный треугольник на стол, а сверху положил синий треугольник (не сгибая никакие из них), причем две вершины верхнего оказались в серединах двух меньших сторон нижнего треугольника. Какая часть нижнего треугольника больше по площади: накрытая верхним, или не накрытая?

Ответ: Площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части.

Решение. На рисунке 2 представлены 4 случая расположения верхнего (синего) треугольника относительно нижнего (красного) треугольника, с некоторыми дополнительными построениями. В случае а) накрытая часть нижнего треугольника состоит из треугольников 1, 2 и 3, а открытая часть - из треугольников I, II и III. Площадь треугольника I равна площади треуголь-

Рис. 2: К задаче № 5



ника 1, площадь треугольника II больше площади треугольника 2 и площадь треугольника III больше площади треугольника 3. Таким образом, площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части. В случае б) площадь накрытой части нижнего треугольника равна площади накрытой части нижнего треугольника в случае а). Результаты сравнений в случаях в) и г) с выполненными дополнительными построениями очевидны.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

6 класс

Вариант № 3

---

1. Решите уравнение $|x| + |x-1| + |x-5| + |x+1| + |x+5| = 12$.

Ответ: $x = 0$.

Решение. $|x-a|$ выражает расстояние между числами x и a на числовой прямой. Тогда $|x-1|+|x+1|$ выражает сумму расстояний от числа x до числа 1 и от числа x до числа -1, которая не может быть менее 2, а $|x-5|+|x+5|$, в свою очередь, не может быть меньше 10. Таким образом, $|x-1|+|x+1|+|x-5|+|x+5|$ не меньше 12, а значит $|x|$ не больше 0. Значит, среди корней данного уравнения не может быть чисел, отличных от 0. Непосредственная проверка показывает, что 0 является корнем уравнения.

2. Артем пометил шифром свои 700 карандашей, пользуясь буквами. Он использовал 24 греческих букв. Комбинация шифров: AAA, AAB, AAГ, AAD, AAE, AAZ, AAH, AAQ, AAI, AAK, AAL, AAM, AAN, ..., AAW, ABA, ... Постарайтесь рассчитать шифр последнего карандаша.

Ответ: BZD.

3. Дана прямоугольная таблица, которая разделена на ячейки. Нужно заполнить каждую ячейку так, чтобы и по длине, и по ширине сумма равна была 14 в любых 3 соседних ячейках.

	5						
					1		
6							
			4				

Ответ:

4	5	5	4	5	5	4	5
4	9	1	4	9	1	4	9
6	0	8	6	0	8	6	0
4	5	5	4	5	5	4	5

4. В каждой клетке доски размера 19×19 написано какое-то натуральное число от 1 до 37. Будем считать, что ладья бьёт все клетки, расположенные с ней на одной горизонтали, на одной вертикали, и клетку, на которой она стоит. У Вовочки есть 19 ладей, но он расстроится, если какая-то из ладей будет бить хотя бы две клетки с одинаковыми числами. Сможет ли Вовочка расставить все свои ладьи так, чтобы они не били друг друга, и при этом не расстроиться?

Ответ: нет, не сможет.

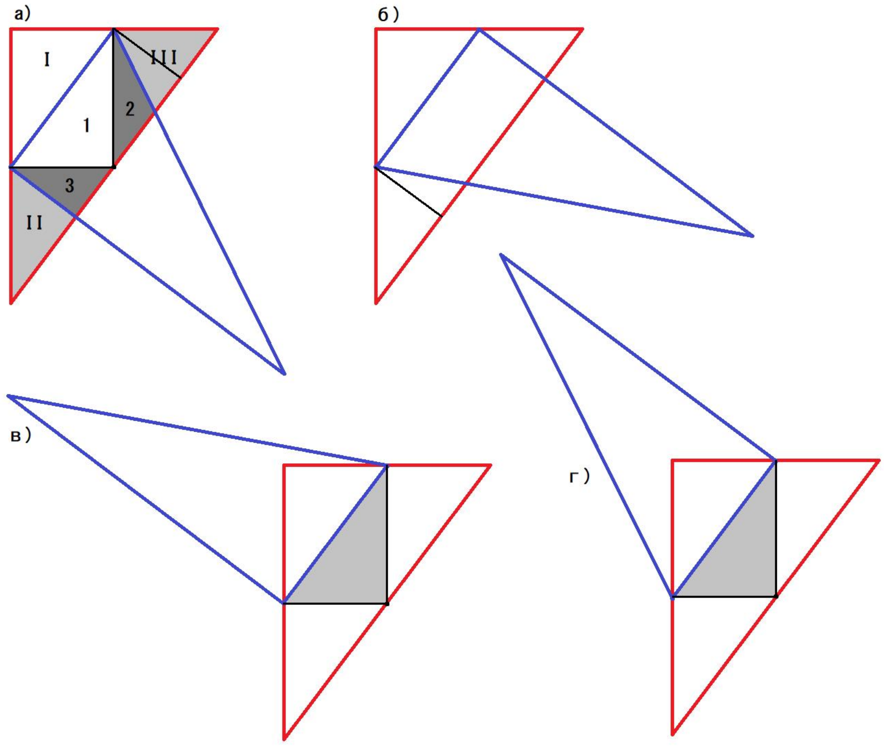
Решение. Для того чтобы ладьи на доске не били друг друга, на каждой горизонтали и на каждой вертикали не должно находиться более 1 ладьи. С учетом того, что ладей ровно 19 штук, на каждой горизонтали и на каждой вертикали доски 19×19 ладей должно быть ровно по одной. Тогда всякая клетка бьётся двумя ладьями, если она свободна от ладей, и ровно одной ладьей, если на этой клетке стоит ладья (ей самой). Предположим, что Вовочке удалось расставить их так, и к тому же не расстроиться. Под боем всякой ладьи находится 37 клеток доски, значит эти клетки содержат все числа от 1 до 37 ровно по одному разу. Таким образом, каждое число должно оказаться под боем каждой ладьи ровно 1 раз. Всего ладей 19 штук, а значит каждое число должно быть записано на доске минимум $18/2=9$ и ещё 1 раз. Но для этого требуется $37 \times 10 = 370$ клеток, в то время как всего на доске 361 клетка – противоречие.

5. У Димы было два прямоугольных листа бумаги: красный – со сторонами 12 и 16, и синий – со сторонами 10 и 20. Он разрезал оба этих листа пополам по диагоналям и получил 4 треугольника – 2 красных и 2 синих. После этого Дима положил красный треугольник на стол, а сверху положил синий треугольник (не сгибая никакие из них), причем две вершины верхнего оказались в серединах двух меньших сторон нижнего треугольника. Какая часть нижнего треугольника больше по площади: накрытая верхним, или не накрытая?

Ответ: Площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части.

Решение. На рисунке 3 представлены 4 случая расположения верхнего (синего) треугольника относительно нижнего (красного) треугольника, с некоторыми дополнительными построениями. В случае а) накрытая часть нижнего треугольника состоит из треугольников 1, 2 и 3, а открытая часть - из треугольников I, II и III. Площадь треугольника I равна площади треуголь-

Рис. 3: К задаче № 5



ника 1, площадь треугольника II больше площади треугольника 2 и площадь треугольника III больше площади треугольника 3. Таким образом, площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части. В случае б) площадь накрытой части нижнего треугольника равна площади накрытой части нижнего треугольника в случае а). Результаты сравнений в случаях в) и г) с выполненными дополнительными построениями очевидны.

Турнир юных математиков им. Н.И. Лобачевского 2023

Казань, 2 апреля 2023 г.

6 класс

Вариант № 4

---

1. Решите уравнение $|x-6|+|x-2|+|x|+|x+2|+|x+6|=16$.

Ответ: $x=0$.

Решение. $|x-a|$ выражает расстояние между числами x и a на числовой прямой. Тогда $|x-6|+|x+6|$ выражает сумму расстояний от числа x до числа 6 и от числа x до числа -6, которая не может быть менее 12, а $|x-2|+|x+2|$, в свою очередь, не может быть меньше 4. Таким образом, $|x-6|+|x+6|+|x-2|+|x+2|$ не меньше 16, а значит $|x|$ не больше 0. Значит, среди корней данного уравнения не может быть чисел, отличных от 0. Непосредственная проверка показывает, что 0 является корнем уравнения.

2. Алексей пометил шифром свои 653 карандашей, пользуясь буквами. Он использовал 24 греческих букв. Комбинация шифров: ААА, ААВ, ААГ, AAD, AAE, AAZ, AAH, AAQ, AAI, AAK, AAL, AAM, AAN, ..., AAW, ABA, ... Постарайтесь рассчитать шифр последнего карандаша.

Ответ: BDE.

3. Дана прямоугольная таблица, которая разделена на ячейки. Нужно заполнить каждую ячейку так, чтобы и по длине, и по ширине сумма равна была 11 в любых 3 соседних ячейках.

	5						
					1		
6							
			1				

Ответ:

1	5	5	1	5	5	1	5
4	6	1	4	6	1	4	6
6	0	5	6	0	5	6	0
1	5	5	1	5	5	1	5

4. В каждой клетке доски размера 21×21 написано какое-то натуральное число от 1 до 41. Будем считать, что ладья бьёт все клетки, расположенные с ней на одной горизонтали, на одной вертикали, и клетку, на которой она стоит. У Вовочки есть 21 ладья, но он расстроится, если какая-то из ладей будет бить хотя бы две клетки с одинаковыми числами. Сможет ли Вовочка расставить все свои ладьи так, чтобы они не били друг друга, и при этом не расстроиться?

Ответ: нет, не сможет.

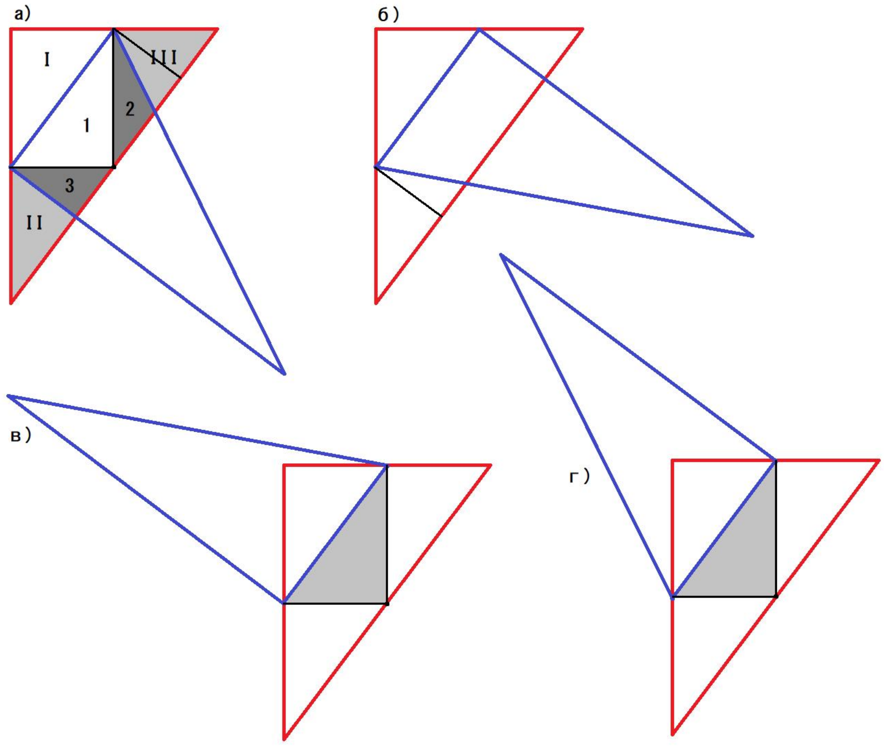
Решение. Для того чтобы ладьи на доске не били друг друга, на каждой горизонтали и на каждой вертикали не должно находиться более 1 ладьи. С учетом того, что ладей ровно 21 штука, на каждой горизонтали и на каждой вертикали доски 21×21 ладей должно быть ровно по одной. Тогда всякая клетка бьётся двумя ладьями, если она свободна от ладей, и ровно одной ладьей, если на этой клетке стоит ладья (ей самой). Предположим, что Вовочке удалось расставить их так, и к тому же не расстроиться. Под боем всякой ладьи находится 41 клетка доски, значит эти клетки содержат все числа от 1 до 41 ровно по одному разу. Таким образом, каждое число должно оказаться под боем каждой ладьи ровно 1 раз. Всего ладей 21 штука, а значит каждое число должно быть записано на доске минимум $20/2{=}10$ и ещё 1 раз. Но для этого требуется $41 \times 11 = 451$ клетка, в то время как всего на доске 441 клетка – противоречие.

5. У Димы было два прямоугольных листа бумаги: красный – со сторонами 6 и 8, и синий – со сторонами 5 и 10. Он разрезал оба этих листа пополам по диагоналям и получил 4 треугольника – 2 красных и 2 синих. После этого Дима положил красный треугольник на стол, а сверху положил синий треугольник (не сгибая никакие из них), причем две вершины верхнего оказались в серединах двух меньших сторон нижнего треугольника. Какая часть нижнего треугольника больше по площади: накрытая верхним, или не накрытая?

Ответ: Площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части.

Решение. На рисунке 4 представлены 4 случая расположения верхнего (синего) треугольника относительно нижнего (красного) треугольника, с некоторыми дополнительными построениями. В случае а) накрытая часть нижнего треугольника состоит из треугольников 1, 2 и 3, а открытая часть - из треугольников I, II и III. Площадь треугольника I равна площади треуголь-

Рис. 4: К задаче № 5



ника 1, площадь треугольника II больше площади треугольника 2 и площадь треугольника III больше площади треугольника 3. Таким образом, площадь открытой части нижнего треугольника больше площади его накрытой части. В случае б) площадь накрытой части нижнего треугольника равна площади накрытой части нижнего треугольника в случае а). Результаты сравнений в случаях в) и г) с выполненными дополнительными построениями очевидны.