ОБ ОНЛАЙН-КУРСАХ, СОЗДАВАЕМЫХ В РАМКАХ ПРОГРАММЫ МАГИСТРАТУРЫ «ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Казанский федеральный
УНИВЕРСИТЕТ

ОБ ОНЛАЙН-КУРСАХ, СОЗДАВАЕМЫХ В РАМКАХ ПРОГРАММЫ МАГИСТРАТУРЫ «ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Агафонов Александр Алексеевич
Зав. Каф. Высшей математики и математического моделирования

kpfu.ru/aleksandr.agafonov
AlAAgafonov@kpfu.ru
+7 (843) 233 73 53

Геометрия Лобачевского
Информация о курсе

Краткое описание курса

Данный курс является вводным по геометрии Н.И. Лобачевского. Начала геометрии изложены большей частью бескоординатным методом, подробно изучается модель Бельтрами–Клейна. Рассматривается применение геометрии Лобачевского в специальной теории относительности. Курс предлагает достаточное число практических задач для контроля правильного усвоения основных понятий дисциплины.

Длительность курса

12 недель

Информация об авторах-разработчиках

Сосов Евгений Николаевич, доцент кафедры геометрии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, доктор (физико-математические науки) (08.04.2011) по специальности 01.01.04 – Геометрия и топология, название диссертации "Геометрии выпуклых и конечных множеств геодезического пространства"

Попов Аркадий Александрович, заведующий кафедрой геометрии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, доктор (физико-математические науки) (07.11.2013) по специальности 01.04.02 – Теоретическая физика, название диссертации "Квантовые и классические эффекты неминимально связанного с кривизной скалярного поля"

Геометрия Лобачевского
Компетенции образовательного стандарта

Обучаемый по данной дисциплине должен обладать следующими профессиональными компетенциями:

ПК-1. Способен формулировать и решать актуальные и значимые задачи фундаментальной и прикладной математики; *в части следующих индикаторов ее достижения*:

ПК-1.2 Имеет опыт построения логически последовательных цепочек рассуждений.

ПК-2. Способен публично представлять собственные и известные научные результаты; *в части следующих индикаторов ее достижения*:

ПК-2.2 Знает методы решения базовых математических задач и классических задач естествознания в практической деятельности.

ПК-3. Способен активно участвовать в исследовании новых математических моделей в естественных науках; *в части следующих индикаторов ее достижения*:

ПК-3.2 Знает формы представления новых научных результатов – презентации, статьи в периодической печати, монографии и т.д.

ПК-5 Способен применять полученные знания и навыки для решения теоретических и прикладных задач; *в части следующих индикаторов ее достижения*:

ПК-5.3 Владеет методами построения математических моделей реальных объектов.

Геометрия Лобачевского
Перечень модулей

Тема 1. Пространство Лобачевского. Движения пространства Лобачевского. Элементарная геометрия в плоскости Лобачевского. Теоремы синусов и косинусов. Модели Пуанкаре пространства Лобачевского. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 2. Римановы метрики в пространстве Лобачевского. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 3. Элемент площади. Гиперплоскость в пространстве Лобачевского. Сфера, орисфера и эквидистантная поверхность. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 4. Пространство Минковского. Геометрия пространства скоростей релятивистских частиц. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 5. Законы сохранения энергии и импульса в релятивистской механике и геометрия Лобачевского. Эффект Доплера. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Геометрия Лобачевского
Перечень модулей

Тема 1. Пространство Лобачевского. Движения пространства Лобачевского. Элементарная геометрия в плоскости Лобачевского. Теоремы синусов и косинусов. Модели Пуанкаре пространства Лобачевского. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 2. Римановы метрики в пространстве Лобачевского. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 3. Элемент площади. Гиперплоскость в пространстве Лобачевского. Сфера, орисфера и эквидистантная поверхность. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 4. Пространство Минковского. Геометрия пространства скоростей релятивистских частиц. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Тема 5. Законы сохранения энергии и импульса в релятивистской механике и геометрия Лобачевского. Эффект Доплера. *Лекции, практические занятия, самостоятельная работа*.

Геометрия Лобачевского
Перечень модулей

№	Разделы дисциплины/ модуля	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа	Контроль самостоятельной работы
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы		
1.	Тема 1. Пространство Лобачевского. Движения пространства Лобачевского. Элементарная геометрия в плоскости Лобачевского. Теоремы синусов и косинусов. Модели Пуанкаре пространства Лобачевского.	4	8	0	27	0
2.	Тема 2. Римановы метрики в пространстве Лобачевского.	2	4	0	10	0

Геометрия Лобачевского
Перечень модулей

№	Разделы дисциплины/ модуля	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа	Контроль самостоятельной работы
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы		
3.	Тема 3. Длина дуги. Элемент площади. Гиперплоскость в пространстве Лобачевского. Сфера, орисфера и эквидистантная поверхность.	2	4	0	16	0
4.	Тема 4. Пространство Минковского. Геометрия пространства скоростей релятивистских частиц.	2	4	0	8	0

Геометрия Лобачевского
Перечень модулей

№	Разделы дисциплины/ модуля	Виды и часы контактной работы, их трудоемкость (в часах)			Самостоятельная работа	Контроль самостоятельной работы
		Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы		
5.	Тема 5. Законы сохранения энергии и импульса в релятивистской механике и геометрия Лобачевского. Эффект Доплера.	2	4	0	10	0
	Итого	12	24	0	71	1

Геометрия Лобачевского
Календарный план

1.	**Разработка программы курса**	**03.12.19**	**18.12.2019**
2.	Разработка педагогического сценария видеолекций и рекламного видеоролика	09.01.2020	**28.02.2020**
3.	Подготовка текстовых, графических и других учебно-методических материалов для создания МООК	28.02.20	**11.04.2020**
4.	Разработка фонда оценочных средств	11.04.2020	**01.06.2020**
5.	Подготовка методических рекомендаций для студентов/слушателей по изучению дисциплины	02.06.2020	**01.09.2020**
6.	Запись видеолекций, приветственных видео (указать количество видеороликов) и рекламного видеоролика	01.09.2020	**03.11.2020**
7.	Оформление аннотаций к видеолекциям	04.12.2020	**30.11.2020**
8.	**Публикация курса на платформе**	**30.11.2020**	**18.12.2020**

Тестовые вопросы

После каждого модуля обучающийся по дисциплине получает вариант с тестовыми заданиями на электронном носителе. Самостоятельно выполняет задания. Сдает на проверку. По результатам проверки обучающийся может получить одну из оценок:

«Отлично», если правильно выполнены все задания, продемонстрирован высокий уровень владения материалом, проявлены превосходные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий;

«Хорошо», если правильно выполнена большая часть заданий, присутствуют незначительные ошибки, продемонстрирован хороший уровень владения материалом, проявлены средние способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий;

«Удовлетворительно», если задания выполнены более чем наполовину, присутствуют серьёзные ошибки, продемонстрирован удовлетворительный уровень владения материалом, проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий;

«Неудовлетворительно», если задания выполнены менее чем наполовину, продемонстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом, проявлены недостаточные способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий. Обучающийся имеет возможность проходить тестирование неограниченное количество раз.

Геометрия Лобачевского
Пример тестовых заданий

Темы 1. Пространство Лобачевского. Движения пространства Лобачевского. Элементарная геометрия в плоскости Лобачевского. Теоремы синусов и косинусов. Модели Пуанкаре пространства Лобачевского:

Множество Λ называется пространством Лобачевского над полем $\mathbb{R}$, если существует такое отображение $\pi : \Lambda \to B(O,1)$, что выполняются следующие условия. Выберите один или несколько правильных ответов:

a) π – биекция.

b) Любой паре элементов x, $y \in \Lambda$ сопоставляется число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\rho(x,x) = 0, \; x \neq y \quad \rho(x,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{|\pi(x)v||\pi(y)u|}{|\pi(x)u||\pi(y)v|},$$

c) π – сюръекция.

d) Любой паре элементов x, $y \in \Lambda$ сопоставляется число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\rho(x,x) = 0, \; x \neq y \quad \rho(x,y) = \frac{k}{2} tg \frac{|\pi(x)v||\pi(y)u|}{|\pi(x)u||\pi(y)v|},$$

Геометрия Лобачевского
Методическое сопровождение

Введение

Данное учебно-методическое пособие включает минимум вводного курса по геометрии Лобачевского и ее применению в специальной теории относительности (СТО). Оно предназначено для студентов математиков старших курсов университетов, магистрантов. Автор стремился дать ясное изложение начал геометрии Лобачевского по возможности бескоординатным методом, охватив бесконечномерный случай. Из наиболее известных четырех моделей геометрии Лобачевского более подробно изучается модель Бельтрами–Клейна. Это связано с тем, что эта модель достаточно наглядная, дает возможность быстро изложить основные начальные факты и достаточно просто получить основные применения геометрии Лобачевского в СТО. Например, рассматриваются преобразования Лоренца и устанавливается, что геометрия пространства скоростей частиц в специальной теории относительности является геометрией Лобачевского. Обсуждаются применения эффекта Доплера и разбираются различные случаи упругого столкновения двух частиц. Показывается, что формулы тригонометрии планиметрии Лобачевского интерпретируют законы сохранения энергии и импульса в распаде π^0-мезона на два γ-кванта. Все задачи в пособии служат для контроля правильного усвоения основных понятий.

Глава 1

Геометрия Лобачевского

1.1 Определение пространства Лобачевского. Метрика пространства Лобачевского в модели Бельтрами-Клейна

Пусть $\mathbb{E}$ — полное, сепарабельное евклидово пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ размерности $\dim \mathbb{E} > 1$ и $B(O,1) \subset \mathbb{E}$ ($\mathbb{S}(O,1)$) — открытый шар (сфера) с центром в фиксированной точке $O \in \mathbb{E}$ радиуса 1. Обозначим через $|xy|$ — расстояние между точками $x,\ y \in \mathbb{E}$ и через $L[x,u) \subset \mathbb{E}$ — луч с началом в точке x, содержащий точку $u \neq x$.

Множество Λ называется **пространством Лобачевского** над полем $\mathbb{R}$, если существует такое отображение $\pi : \Lambda \to B(O,1)$, что выполняются следующие условия (аксиомы) :

1. π — биекция.

2. Любой паре элементов $x,\ y \in \Lambda$ сопоставляется число $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\rho(x,x) = 0 \qquad \text{и при } x \neq y \quad \rho(x,y) = \frac{k}{2} \ln \frac{|\pi(x)v||\pi(y)u|}{|\pi(x)u||\pi(y)v|},$$

где v (u) — точка пересечения луча $L[\pi(x),\pi(y))$ ($L[\pi(y),\pi(x))$) со сферой $\mathbb{S}(O,1)$. $k > 0$ — константа.

Размерностью пространства Лобачевского называется размерность $\mathbb{E}$, т.е. $\dim \Lambda = \dim \mathbb{E}$.

Элементы Λ называются **точками** или **л-точками**, когда необходимо отличать их от точек евклидова пространства.

Геометрия Лобачевского
Съемки курса

Пусть сторона, противолежащая этому углу, имеет уравнение $\rho\cos\varphi = b$. Тогда

$$S = k^3\int_0^{\alpha} d\varphi \int_0^{\frac{b}{\cos\varphi}} \frac{\rho\, d\rho}{(k^2-\rho^2)^{3/2}} = k^3\int_0^{\alpha} \frac{1}{(k^2-\rho^2)^{1/2}}\Bigg|_0^{\frac{b}{\cos\varphi}} d\varphi =$$

$$k^2\int_0^{\alpha}\left(\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi-(b/k)^2}}-1\right)d\varphi = k^2\arcsin\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-(b/k)^2}}\Bigg|_0^{\alpha} - k^2\alpha =$$

$$k^2\arcsin\left(\operatorname{ch}\frac{b_l}{k}\sin\alpha_l\right) - k^2\alpha_l = k^2(\arcsin(\cos\beta_l) - \alpha_l) = k^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_l-\beta_l\right).$$

Разбив произвольный треугольный треугольник T на два прямоугольных, получим его площадь в виде

$$S = k^2(\pi-\alpha_l-\beta_l-\gamma_l) = k^2\sigma(T).$$

Таким образом, **площадь треугольника плоскости Лобачевского пропорциональна его дефекту**.

Отметим также что, если все вершины треугольника лежат на абсолюте, то его площадь равна $k^2\pi$.

Геометрия Лобачевского
Онлайн курс

При $p = 0$ это уравнение $(n, x) = 0$ гиперплоскости, содержащей 0.

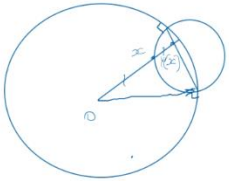
А при $0 < p < r$ это уравнение $p(x^2 + r^2) - 2r^2(n, x) = 0$ сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{E}$ с вектором нормали $px - r^2 n$.

В точках пересечения этой сферы со сферой $\mathbb{S}(0, r)$ с уравнением $x^2 = r^2$ получим

$$(px - r^2 n, x) = pr^2 - r^2(n, x) = 0,$$

т.е. они пересекаются ортогонально. ⊙

Рассмотрим ограничение инверсии $\theta : B(<0;0>, r) \to \Pi_+$ относительно сферы $\mathbb{S}(<-r;0>, \sqrt{2}r) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ на открытый шар $B(<0;0>, r) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{E}$ и принимающей значения в верхнем открытом полупространстве $\Pi_+ = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{E}$.



Используя свойства инверсии: оставлять инвариантными открытые лучи с началом в точке $<-r;0>$ и

$$|\theta(<x_1;x>) - <-r;0>| \cdot |<x_1;x> - <-r;0>| = 2r^2,$$

получим явный вид инверсии

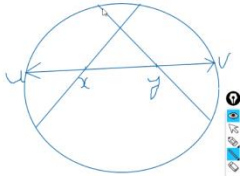
$$\theta(<x_1;x>) = <-r;0> + \frac{2r^2}{<r + x_1;x>^2} <r + x_1;x> = \frac{r}{(r+x_1)^2 + x^2} <r^2 - x_1^2 - x^2; 2rx>.$$

06:52

$z \in B(O,1)$ не принадлежат одному отрезку. По-

$1)$, $\{u\} = L[y,x] \cap \mathbb{S}(O,1)$, $\{s\} = L[y,z] \cap \mathbb{S}(O,1)$,
$1)$, $\{m\} = L[x,z] \cap \mathbb{S}(O,1)$, $\{l\} = L[z,x) \cap \mathbb{E}(O,1)$,
$[s,l] \cap [u,v]$, $\{h\} = [m,t] \cap [u,v]$,
$(l,s) \cap P(t,m)$, $\{w\} = P(p,z) \cap [u,v]$,

я, проходящая через точки l и s, а p может быть
кой в случае параллельности прямых $P(l,s)$ и



Мы разберем случай, когда $w \in [x,y] \setminus \{x,y\}$, поскольку другие случаи тривиальны или аналогичны.

$$\frac{|xv||yu|}{|xu||yv|} = \frac{|xv||wu||wv||yu|}{|wv||xu||yv||wu|} < \frac{|xh||wq||wh||yq|}{|wh||xq||yh||wq|} = \frac{|xm||zl||zt||ys|}{|zm||xl||yt||zs|},$$

так как, например,

$$\frac{|xv|}{|wv|} = \frac{|xh| + |hv|}{|wh| + |hv|} < \frac{|xh|}{|wh|}$$

ОБ ОНЛАЙН-КУРСАХ, СОЗДАВАЕМЫХ В РАМКАХ ПРОГРАММЫ МАГИСТРАТУРЫ «ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Спасибо за внимание!

Агафонов Александр Алексеевич
Зав. Каф. Высшей математики и математического моделирования

kpfu.ru/aleksandr.agafonov
AlAAgafonov@kpfu.ru
+7 (843) 233 73 53