

УДК 539.3

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.509-525

КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ПОВРЕЖДЁННОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

И.А. Волков, Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук

*Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Аннотация

Рассмотрены основные закономерности процессов деформирования и деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов (металлов и их сплавов) по механизму длительной прочности. С позиции механики повреждённой среды (МПС) развита математическая модель, описывающая процессы неупругого деформирования и накопления повреждений при ползучести. Модель МПС состоит из трёх взаимосвязанных частей: соотношений, определяющих неупругое поведение материала с учётом зависимости от процесса разрушения; уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений; критерия прочности повреждённого материала.

Разработана экспериментально-теоретическая методика нахождения материальных параметров развитых определяющих соотношений МПС. Определение материальных параметров и скалярных функций модели МПС, оценка её достоверности и определение границ применимости проведены на основе анализа процессов деформирования и разрушения лабораторных образцов в условиях мягкого нагружения (контролируемых напряжений).

Приведены результаты экспериментальных исследований кратковременной ползучести жаропрочного сплава ВЖ-159 при постоянных значениях температуры и разных значениях задаваемых в образцах напряжений.

Проведены численные исследования процесса деформирования и накопления повреждений и выполнено сравнение полученных численных результатов с данными натурных экспериментов. Результаты сопоставления расчётных и экспериментальных данных позволили сделать вывод о достоверности предложенных определяющих соотношений МПС при деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов по механизму длительной прочности.

Ключевые слова: нестационарная ползучесть, длительная прочность, моделирование, определяющее соотношение, механика повреждённой среды, температура, повреждённость, материальный параметр, численный эксперимент, натурный эксперимент

Введение

Ресурс элементов конструкций, работающих в условиях повышенных температур T ($T > 0.5 T_{\text{пл}}$, $T_{\text{пл}}$ – температура плавления) и циклических механических воздействий, определяется в основном физическими процессами деградации начальных прочностных свойств конструкционных материалов (процессами малоциклового усталости и накопления повреждений в результате ползучести), которые приводят к одному из наиболее опасных типов разрушения – хрупкому разрушению конструкций, изготовленных из пластичных материалов.

Существующие на сегодняшний день нормативные методы оценки ресурса элементов конструкций не учитывают реальных процессов, протекающих в материале. Упругий расчёт, используемый при нормативном подходе, не позволяет учесть реальные характеристики вязкопластического деформирования материала, от которых в значительной степени зависит ресурс элементов конструкций. В общем случае прочность конструкций должна учитывать время и историю нагружения. Как следствие этого, критерий разрушения будет тесно связан с определяющими соотношениями, описывающими процесс разрушения [1].

В связи с этим становится необходимой разработка новых методов оценки ресурса элементов конструкции на базе соответствующих уравнений термовязкопластичности, уравнений накопления повреждений и критериев разрушения со всесторонним их обоснованием посредством проведения соответствующих натуральных и численных экспериментов на лабораторных образцах и численного анализа процессов деформирования и разрушения элементов конструкций в эксплуатационных условиях [1, 2].

Зависимость долговечности материала от длительности (частоты) цикла и от наличия и длительности выдержек в цикле, протекающих на фоне повышенных постоянных или меняющихся температур, обусловлена развивающимися деформациями ползучести и вызванными этими деформациями повреждениями, которые в противоположность усталостным повреждениям, развивающимся по телу зерна, накапливаются по границам зерен и приводят к межкристаллитному разрушению.

Наиболее распространенным методом исследования длительной прочности является построение экспериментальной кривой: «растягивающее напряжение / время до разрушения» в экспериментах по одноосному растяжению образцов при постоянной температуре [3]. На кривых ползучести имеется три характерных участка. Первый из них соответствует неустановившейся ползучести, причём скорость деформации ползучести убывает; вторым является участок установившейся ползучести, когда скорость деформации ползучести практически постоянна. С точки зрения исследования характеристик процесса накопления повреждений наибольший интерес представляют время начала третьего участка, скорость ползучести на установившемся участке, закон изменения скорости ползучести на третьем участке, время до разрушения, и деформация ползучести к моменту разрушения. Наличие третьего неустановившегося участка на кривой ползучести вызвано влиянием накопленной повреждённости на деформационные характеристики материала (на скорость ползучести), а закон изменения скорости ползучести на этом участке определяется скоростью накопления повреждения в материале на этом участке. Начало третьего участка есть граница начала влияния накопленной повреждённости на деформационные характеристики материала.

Три стадии деформации ползучести являются ни чем иным, как проявлением на макроуровне последовательных изменений в материале. После продолжительного начального периода с преобладанием вязкого деформирования характерное для третьей стадии быстрое увеличение скорости деформации является прямым следствием ускоренного роста микродефектов с последующим их слиянием, приводящим к разрушению при ползучести. Применительно к конструкционным материалам очень важен вопрос о взаимосвязи процессов деформирования и разрушения, поскольку наличие такой взаимосвязи даёт возможность искать пути оценки повреждённости материала при ползучести по деформационным характеристикам. Экспериментальные исследования показали наличие чётко выраженной связи кинетических процессов деформирования и накоплениями повреждений при ползучести: существует линейная связь между деформацией ползучести на всех стадиях и объёмной долей микродефектов, на третьей стадии наблюдается прямо пропорциональная зависимость между приростом объёмной доли микропор и увеличением

скорости ползучести [4, 5]. Разделить процессы зарождения и роста несплошностей и деформирования на ведущий и ведомый не представляется возможным. Эти процессы взаимосвязаны и влияют друг на друга.

Следовательно, экспериментальное исследование процесса ползучести на третьем участке кривой имеет существенное значение для исследования закономерностей процесса накопления повреждений, хотя в реальных циклических процессах деформирования материала с выдержками различной длительности разрушение (образование макротрещины) вследствие накопления повреждений происходит при малых деформациях ползучести (но при больших её траекториях). Поскольку для реальных условий эксплуатации конструкционных материалов начало установившегося участка достигается за несколько десятков часов, а общее время до разрушения составляет от нескольких сотен до тысяч часов, возникает проблема проведения испытаний на достаточно большой временной базе. Для её решения необходимо установить соответствие между испытаниями на кратковременную ползучесть при повышенных температурах и характеристиками ползучести и длительной прочности для большой временной базы при более умеренных температурах. Существует несколько различных зависимостей, устанавливающих это соответствие [6–10].

Большинство исследований конструкционных материалов на ползучесть и длительную прочность проведено при испытаниях на растяжение цилиндрических образцов при постоянных напряжениях и температурах. Однако реальные задачи ползучести и длительной прочности элементов конструкций связаны с гораздо более сложными условиями, например с переменностью напряжений, с изменением вида напряжённого состояния и циклически меняющимися температурами. Поскольку ползучесть металлов и длительная прочность весьма чувствительны к изменению напряжённого состояния и температуры, которая влияет на все их параметры, возникает проблема исследования закономерностей неизотермической ползучести и длительной прочности при различных видах напряжённых состояний и разработки методов оценки ползучести и длительной прочности материала конструктивных элементов в условиях многоосного напряжённого состояния на основании экспериментальных данных, полученных в результате испытаний при одноосном напряжённом состоянии.

Кривые долговечности, как правило, построены для постоянных напряжений (нагрузок), в то время как на практике напряжения и температуры меняются по довольно сложным законам. Вследствие этого возникает проблема суммирования повреждений для весьма нерегулярных историй нагружения. При оценке времени разрушения в условиях переменных напряжений и температур основным вопросом является возможность проведения расчётов по результатам испытаний при постоянных напряжениях и температурах. В технических приложениях в основном для этих целей используют правило линейного суммирования повреждений, согласно которому принимается, что все части использованной долговечности независимы друг от друга. Разрушение происходит тогда, когда сумма частей долговечности равна единице. Этот закон широко используется в инженерных расчётах для случаев работы конструкций в условиях переменных температур и переменных нагрузжений. Попытки проверить точность расчётов отдельно для изменений температур и напряжений очень малочисленны, хотя даже беглое рассмотрение кинетики процессов повреждения позволяет увидеть очевидное различие. Существует два основных недостатка имеющихся экспериментальных программ. Первый недостаток заключается в том, что к повреждению при ползучести относятся скорее как к теоретическому понятию, чем как к реальному физическому явлению, поддающемуся измерению. Второй недостаток связан с тем, что эксперименты планируются с целью проверки лишь какого-либо конкретного закона суммирования повреждений

и не ставят себе задачу выявления общих закономерностей этого процесса. В результате для каждой серии испытаний (изменений температур или напряжений) можно определить только, является ли закон суммирования пригодным, но нельзя установить причину непригодности. Анализ имеющихся экспериментальных результатов позволяет установить значительное влияние истории изменения напряжения и температуры на длительную прочность и сделать вывод о неприменимости правила линейного суммирования повреждений в условиях изменяющихся напряжений и температур. Была установлена хорошая корреляция между твердостью при комнатной температуре подверженного ползучести образца и длительной прочностью. Сравнение с линейным законом суммирования относительных долговечностей приводит к следующим отклонениям [11]:

- накопление повреждений при ползучести в испытуемой сплаве в общем случае не является линейной функцией времени предварительного воздействия;

- довольно сложно сравнить состояние повреждений для одинаковых по времени частей долговечности, так как отдельное влияние каждого из факторов (температуры или напряжения) на процесс зарождения и роста пор не изучено. Однако установлено, что для каждой заданной части долговечности суммарный объем пор возрастает с уменьшением напряжения (при постоянной температуре) и с уменьшением температуры (при постоянном напряжении). Для одного и того же воздействия в течение части долговечности степень размягчения (объем пор) возрастает с уменьшением напряжения, но почти не чувствительна к температуре;

- не существует какого-либо единого значения повреждения при ползучести, когда разрушение наступает всегда. Каждая совокупность испытаний или условий эксплуатации дает свое характерное значение повреждения при разрушении.

В настоящей работе с позиции механики поврежденной среды развита математическая модель МПС, описывающая процессы накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при механизме деградации, обусловленном развивающимися деформациями ползучести. Проведены численные исследования процессов длительной прочности жаропрочного сплава ВЖ-159 и выполнено сравнение полученных численных результатов с данными натурных экспериментов.

1. Определяющие соотношения механики поврежденной среды

Основные положения рассматриваемого варианта МПС заключаются в следующем:

- материал среды изначально изотропен и повреждения в нём отсутствуют (учитывается только анизотропия, вызванная процессами деформирования; анизотропия упругих свойств, вызванная процессами поврежденности материала, не учитывается);

- компоненты тензоров деформаций e_{ij} и скоростей деформаций \dot{e}_{ij} представляют сумму «мгновенной» и «временной» составляющих. «Мгновенная» составляющая состоит из упругих компонент e_{ij}^e, \dot{e}_{ij}^e , не зависящих от истории деформирования и определяющих конечное состояние процесса, и пластических компонент e_{ij}^p, \dot{e}_{ij}^p , зависящих от истории процесса деформирования. Временная составляющая (деформаций ползучести e_{ij}^c, \dot{e}_{ij}^c) описывает временную зависимость процессов деформирования при низких скоростях нагружения;

- эволюция эквипотенциальных поверхностей ползучести описывается изменением её радиуса C_c и перемещением её центра ρ_{ij}^c ;

- изменение объема элемента тела упруго, то есть $e_{ii}^p = e_{ii}^c = 0$;

- рассматриваются процессы деформирования, характеризующиеся малыми деформациями;

– единственным структурным параметром, характеризующим на макроуровне степень повреждённости материала, является скалярный параметр ω – «повреждённость» ($\omega_0 \leq \omega \leq \omega_f$);

– влияние уровня накопленной повреждённости на процесс деформирования материала учитывается путём введения эффективных напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}$.

Модель повреждённой среды состоит из трёх взаимосвязанных частей:

- 1) соотношений, определяющих вязкопластическое поведение материала с учётом зависимости от процесса разрушения;
- 2) уравнений, описывающих кинетику накопления повреждений;
- 3) критерия прочности повреждённого материала.

1.1. Соотношения термползучести. Связь между тензором напряжений и тензором упругих деформаций на базе уравнений термоупругости

$$\sigma = 3K [e - \alpha T], \dot{\sigma} = 3K [\dot{e} - \dot{\alpha}T - \alpha\dot{T}] + \frac{\dot{K}}{K}\sigma,$$

$$\sigma'_{ij} = 2Ge'_{ij}, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij} + \frac{\dot{G}}{G}\sigma'_{ij}, \quad e'_{ij} = e'_{ij} - e^c_{ij}, \quad (1)$$

где σ , e – шаровые, а σ'_{ij} , e'_{ij} – девиаторные компоненты тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций e_{ij} соответственно; $G(T)$ – модуль сдвига, $K(T)$ – объёмный модуль упругости, $\alpha(T)$ – коэффициент температурного расширения – функция температуры T .

Для описания процессов ползучести введем в пространстве напряжений семейство эквипотенциальных поверхностей ползучести F_c (поверхностей, на которых скорость деформации ползучести постоянна), имеющих общий центр ρ^c_{ij} и различные радиусы C_c , определяемые текущим напряжённым состоянием [12, 13]:

$$F_c^{(i)} = S^c_{ij}S^c_{ij} - C_c^2 = 0, \quad S^c_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho^c_{ij}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Согласно ассоциированному закону

$$\dot{e}^c_{ij} = \lambda_c \frac{\partial F_c^{(i)}}{\partial S^c_{ij}} = \lambda_c S^c_{ij}, \quad (3)$$

где λ_c соответствует текущей поверхности $F_c^{(i)}$, определяющей текущее напряжённое состояние S^c_{ij} .

Среди этих эквипотенциальных поверхностей можно выделить поверхность с радиусом \bar{C}_c , соответствующую нулевой скорости ползучести

$$F_c^{(0)} = \bar{S}^c_{ij}\bar{S}^c_{ij} - \bar{C}_c^2 = 0, \quad \bar{S}^c_{ij} = \bar{\sigma}'_{ij} - \rho^c_{ij}, \quad (4)$$

где \bar{S}^c_{ij} и $\bar{\sigma}'_{ij}$ – совокупность напряжённых состояний, отвечающих (с определённым допуском) нулевой скорости ползучести.

Принимаем, что

$$\bar{C}_c = \bar{C}_c(\chi_c, T), \quad \dot{\chi}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}^c_{ij} \dot{e}^c_{ij}, \quad \chi_c = \int_0^t \dot{\chi}^c dt, \quad (5)$$

$$\lambda_c = \lambda_c(\psi_c, T), \quad \psi_c = \left[\frac{\sqrt{S^c_{ij}S^c_{ij}} - \bar{C}_c}{C_c} \right],$$

$$\lambda_c = \begin{cases} 0, & \psi_c \leq 0; \\ \lambda_c, & \psi_c > 0, \end{cases}$$

где \bar{C}_c и λ_c – экспериментально определяемые функции температуры T .

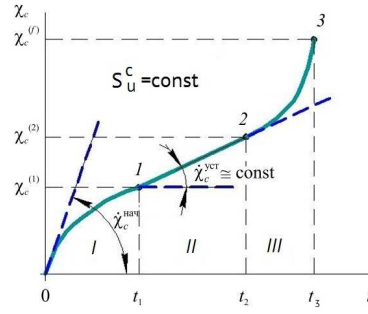


Рис. 1. Зависимость χ_c от времени процесса t при $S_u^c = \text{const}$ при многоосном деформировании по лучевой траектории

Эволюционное уравнение для изменения координат центра поверхности ползучести есть [2]

$$\dot{\rho}_{ij}^c = g_1^c \dot{e}_{ij}^c - g_2^c \rho_{ij}^c \dot{\chi}_c, \quad (6)$$

где g_1^c и $g_2^c > 0$ – экспериментально определяемые материальные параметры.

Конкретизируя соотношение (3), закон градиентальности представим в виде [14]

$$\dot{e}_{ij}^c = \lambda_c(\psi_c, T), \quad S_{ij}^c = \lambda_c \psi_c, \quad S_{ij}^c = \lambda_c \left(\frac{\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c}{C_c} \right) S_{ij}^c, \quad (7)$$

откуда для $\dot{\chi}_c$ имеем [16]

$$\dot{\chi}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{e}_u^c = \sqrt{\frac{2}{3}} \lambda_c \left(\sqrt{S_{ij}^c S_{ij}^c} - \bar{C}_c \right). \quad (8)$$

Зависимость χ_c от t при $S_u^c = \text{const}$ при многоосном деформировании по лучевой траектории имеет вид, показанный на рис. 1.

На кривой $\chi_c(t)$ (рис. 1) с определённой долей условности можно выделить три участка:

(I) участок неустановившейся ползучести $(0 - \chi_c^{(1)})$, на котором скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ убывает;

(II) участок установившейся ползучести $(\chi_c^{(1)} - \chi_c^{(2)})$, на котором скорость деформации ползучести $\dot{\chi}_c$ практически постоянна ($\dot{\chi}_c \cong \text{const}$);

(III) участок неустановившейся ползучести $(\chi_c^{(2)}, \chi_c^{(3)})$, на котором деформации ползучести быстро растут (предшествует разрушению) и $\dot{\chi}_c$ резко возрастает.

Длины участков существенным образом зависят от величины $S_u^c = \text{const}$.

Из (8) для трёх участков кривой ползучести выражение для λ_c примет вид [13]:

$$\lambda_c = \begin{cases} 0, & \psi_c \leq C_c \text{ или } \chi_c = 0; \\ \lambda_c^I, & 0 \leq \chi_c \leq \chi_c^{(1)}; \\ \lambda_c^{II}, & \chi_c^{(1)} \leq \chi_c \leq \chi_c^{(2)}; \\ \lambda_c^{III}, & \chi_c^{(2)} \leq \chi_c \leq \chi_c^{(3)}, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$\lambda_c^I = \lambda_c^{(0)} \left(1 - \frac{e_{11}^c}{e_{11}^{c(1)}} \right) + \lambda_c^{(1)} \frac{e_{11}^c}{e_{11}^{c(1)}}, \quad \lambda_c^{II} = \frac{3}{2} \frac{\dot{e}_{11}^{уст}}{\left(\sigma'_{11} - \frac{3}{2} \rho_{11}^c - \bar{\sigma}_c \right)}, \quad \lambda_c^{III} = \frac{\lambda_c^{II}}{(1 - \omega)^{r_c}}$$

получают из экспериментов при одноосном напряжённом состоянии лабораторного образца [13].

В формулах (9) введены обозначения: $\lambda_c^{(0)}$ и $\lambda_c^{(1)}$ – значение λ_c в начальной и конечной точках первого участка кривой ползучести материала; $e_{11}^{c(1)}$, $e_{11}^{c(2)}$ и $e_{11}^{c(3)}$ – границы участков кривой ползучести при одноосном напряжённом состоянии; $\dot{e}_{11}^{c(\text{нач})}$ – скорость деформации ползучести в начальный момент времени, $\dot{e}_{11}^{c(\text{уст})}$ – скорость деформации ползучести на участке установившейся ползучести (2-й участок кривой ползучести); ω – величина повреждённости материала; $\bar{\sigma}_c = \sqrt{2/3} \bar{C}_c$ – предел ползучести при одноосном напряжённом состоянии; r_c – параметр материала [12, 13].

Уравнения (1)–(9) описывают неустановившиеся и установившиеся участки кривой ползучести при разных уровнях напряжений и основные эффекты процесса ползучести при знакопеременном напряжении.

На стадии развития рассеянных по объёму повреждений наблюдается влияние повреждённости на физико-механические характеристики материала. В первом приближении это влияние может быть учтено на базе концепции деградирующего континуума (введения эффективных напряжений) [2]

$$\tilde{\sigma}'_{ij} = F_1(\omega) \sigma'_{ij} = \frac{G}{\tilde{G}} \sigma'_{ij}, \quad \tilde{\sigma} = F_2(\omega) \sigma = \frac{K}{\tilde{K}} \sigma, \quad (10)$$

где \tilde{G} , \tilde{K} – эффективные модули упругости, определяемые по формулам Маккензи

$$\tilde{G} = G (1 - \omega) \left(1 - \frac{6K + 12G}{9K + 8G} \omega \right), \quad (11)$$

$$\tilde{K} = 4GK \frac{1 - \omega}{4G + 3K\omega}. \quad (12)$$

Аналогичным образом определяется эффективная внутренняя переменная $\tilde{\rho}_{ij}^c$:

$$\tilde{\rho}_{ij}^c = F_1(\omega) \rho_{ij}^c = \frac{G}{\tilde{G}} \rho_{ij}^c. \quad (13)$$

1.2. Эволюционные уравнения накопления повреждений. Экспериментальный и теоретический анализ процессов повреждённости материала позволяет представить эволюционное уравнение накопления повреждений в элементарном объёме материалов в следующем общем виде [2, 4, 5]:

$$\dot{\omega} = f_1(\theta) f_2(\beta) f_3(\omega) f_4(Z) \langle \dot{Z} \rangle \quad (14)$$

где функция $f_1(\theta)$ описывает влияние кривизны траектории деформирования, $f_2(\beta)$ – вид (объёмность) напряжённого состояния, $f_3(\omega)$ – уровень накопленной повреждённости, $f_4(Z)$ – накопленную относительную энергию, затраченную на образование дефектов.

Учитывая тот факт, что к настоящему времени не имеется достаточно надёжных систематизированных экспериментальных данных, характеризующих ползучесть материалов вплоть до разрушения в необходимом диапазоне рабочих нагрузок и температур и значительный разброс экспериментальных данных, эволюционное уравнение при ползучести необходимо формулировать в наиболее «простой» форме [5, 14–17]

$$\dot{\omega} = \frac{\alpha_c + 1}{r_c + 1} f_c(\beta) Z_c^{\alpha_c} (1 - \omega)^{-r_c} \langle \dot{Z}_c \rangle, \quad (15)$$

где

$$Z_c = \frac{W_c - W_c^a}{W_c^f}, \quad (16)$$

$$\langle \dot{Z}_c \rangle = \frac{\langle \dot{W}_c \rangle}{W_c^f}, \quad \dot{W}_c = \rho_{ij}^c \dot{e}_{ij}^c, \quad (17)$$

$$f_c(\beta) = \exp(k_c \beta), \quad (18)$$

где ω – значение величины поврежденности при ползучести; W_c^a – значение энергии разрушения в конце стадии зарождения рассеянных повреждений при ползучести, а W_c^f – значение энергии, соответствующее образованию макроскопической трещины; $f_c(\beta)$ – функция параметра объёмности напряжённого состояния $\beta = \sigma/\sigma_u$; $W_c = \int_0^t \dot{W}_c dt$ – энергии, идущие на образование рассеянных повреждений при ползучести; k_c , α_c , r_c – материальные параметры, зависящие от температуры T .

1.3. Критерий прочности повреждённого материала. В качестве критерия окончания фазы развития рассеянных микроповреждений (стадии образования макротрещины) принимается условие достижения величины поврежденности своего критического значения

$$\omega = \omega_f \leq 1. \quad (19)$$

Интегрируя эволюционное уравнение накопления повреждений (15)–(18) с учётом определяющих соотношений термовязкопластичности (1)–(9) и критерия разрушения (19) по известной истории термомеханического нагружения в данном элементарном объёме материала, можно определить момент образования макроскопической трещины при ползучести.

Определение основных характеристик процесса вязкопластического деформирования повреждённых материалов (параметров состояния), которые в общем случае описываются тензорами σ_{ij} , e_{ij} , e_{ij}^p , ρ_{ij}^p , e_{ij}^c и скалярами χ , C_p , C_c , T и ω , может осуществляться при соответствующей формулировке определяющих соотношений МПС и линеаризации алгоритма нахождения λ , и сводится к формулировке определяющих соотношений МПС в приращениях, которые зависят от выбранного шага Δt . Шаг по времени Δt может корректироваться при прохождении сложных участков траектории деформирования в течении всего расчётного времени при условии устойчивости вычислений. Такой подход [18] наиболее удобен при решении краевых задач механики деформируемого твёрдого тела и используется в настоящей работе.

В общем случае напряжения, пластические деформации и деформации ползучести определяются интегрированием уравнений термоползучести (1)–(13) четырёхточечным методом Рунге–Кутты с коррекцией девиатора напряжений и последующим определением напряжений согласно уравнений термопластичности [5] с учётом средней скорости деформации ползучести в момент времени: $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

2. Методика определения параметров определяющих соотношений МПС

Для практического применения уравнений термоползучести (1)–(18) необходимо иметь следующую информацию:

– зависимости $G(T)$, $K(T)$, $\alpha(T)$, где T – температура;

- зависимость текущего радиуса поверхности ползучести, соответствующего нулевой скорости ползучести $\tilde{C}_c = \tilde{C}_c(\chi_c, T)$;
- зависимость $\lambda_c = \lambda_c(T)$ для различных участков кривой ползучести;
- зависимости модулей кинематического упрочнения $g_1^c(T)$, $g_2^c(T)$.

Материальные параметры эволюционных уравнений термоползучести определяются из базовых экспериментов [2].

В качестве основных базовых экспериментов принимаются эксперименты на одноосное растяжение-сжатие цилиндрических лабораторных образцов.

Основные типы базовых экспериментов – изотермические при постоянных базовых температурах T_j ($j = 1, 2, \dots$).

Типы образцов – цилиндрический сплошной и цилиндрический трубчатый. Выбранные типы образцов обеспечивают однородное распределение полей напряжений деформаций и температур в пределах рабочей части, исключают возможность потери устойчивости и формоизменения образца при знакопеременном нагружении, максимально исключают влияние концентраторов на напряжённо-деформированное состояние при переходе от рабочей части образца к утолщённым местам [2, 12, 13].

Для определения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения $g_1^c(T)$ и $g_2^c(T)$ и зависимости для радиуса поверхности ползучести, соответствующего нулевой скорости ползучести $\tilde{C}_c = \tilde{C}_c(\chi_c, T)$ образец нагревается до значения температуры «базового» эксперимента $T = T_j = \text{const}$ и проводятся испытания на ползучесть при одноосном напряжённом состоянии по схеме «мягкого» нагружения.

В начале образец нагружается до величины напряжения $\sigma_{11}^{(1)}$ в точке 1 (рис. 2, а). Этот уровень напряжений выбирается из анализа имеющегося веера кривых ползучести, полученных при «базовой» температуре $T = T_j$ (кривая ползучести, соответствующая нулевой скорости ползучести). В результате релаксации процесс заканчивается в точке 2 (напряжение $\sigma_{11}^{(2)}$), где скорость деформации ползучести близка к нулю.

Далее образец нагружается до напряжения обратного знака $\sigma_{11}^{(3)}$ (точка 3 на рис. 2, а), и в результате процесса релаксации оказывается в точке 4. Таким образом, напряжения $\tilde{\sigma}_{11}^{(0)+}$ (точка 2) и $\tilde{\sigma}_{11}^{(0)-}$ (точка 4) характеризуют (с определённым допуском на остаточную деформацию) начальную верхнюю и нижнюю границы поверхности ползучести, соответствующие нулевой скорости ползучести.

Для определения трансформации поверхности ползучести на том же самом образце при заданном напряжении $\sigma_{11}^* = \text{const}$ проводится ряд аналогичных действий после достижений назначенных уровней деформаций ползучести $\epsilon_{11}^{c(1)}$, $\epsilon_{11}^{c(2)}$, ..., $\epsilon_{11}^{c(m)}$.

Полученный таким образом набор точек 2, 7, 12, 17 и т. д. характеризует изменение верхней (при растяжении) границы поверхности ползучести в зависимости от накопленной деформации ползучести.

Точки 4, 8, 13, 19 и т. д. соответственно характеризуют изменение нижней (при сжатии) границы поверхности ползучести.

Таким образом, по результатам эксперимента при базовых постоянных температурах $T = T_j$ найдены

- геометрическое место пределов ползучести при растяжении с заданным допуском на остаточную деформацию;
- геометрическое место обратных пределов ползучести при сжатии.

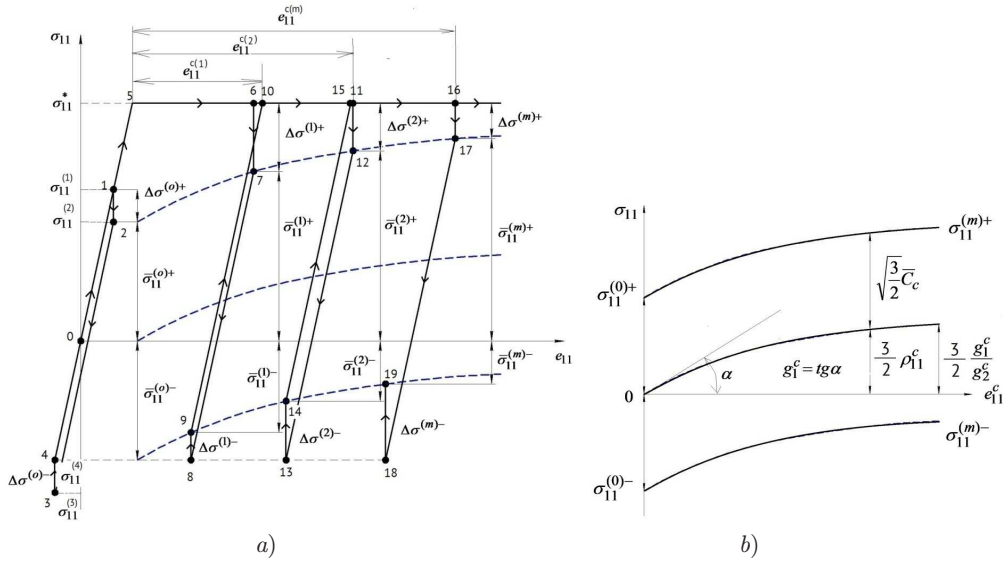


Рис. 2. Испытания на ползучесть при одноосном напряжённом состоянии по схеме «мягкого» (контролируемое напряжение) нагружения: а) экспериментальная информация для радиуса поверхности ползучести, соответствующей нулевой скорости деформации; б) экспериментальная информация для нахождения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения

Зависимость радиуса поверхности ползучести соответствующей нулевой скорости деформации ползучести определяется по формуле

$$\tilde{C}_c = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_{11}^{(m)+} + \sigma_{11}^{(m)-}}{2}, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

Для определения модулей кинематического (анизотропного) упрочнения $g_1^c(T)$ и $g_2^c(T)$ необходимо проинтегрировать соотношение (6) при $T = T_j = \text{const}$.

Имеем

$$\rho_{11}^c = \frac{g_1^c}{g_2^c} \left(1 - e^{-g_2^c e_{11}^c} \right),$$

где e – основание натуральных логарифмов; g_1^c – тангенс угла наклона касательной к кривой $\rho_{11}^c \sim e_{11}^c$ в начале координат (рис. 2.); $\rho_{\text{max}}^c = g_1^c/g_2^c$ – предельное асимптотическое значение ρ_{11}^c при данной температуре $T = T_j$. Отсюда определяются модули g_1^c и g_2^c анизотропного (кинематического) упрочнения.

Экспериментальное определение материальных параметров эволюционных уравнений накопления повреждений производится на второй стадии процесса накопления повреждений, с которой начинается влияние повреждённости на физико-механические характеристики материала, при одновременном расчёте экспериментальных процессов деформирования на этой стадии с использованием соотношений термовязкопластичности. Метод заключается в том, что все отклонения результатов численного моделирования процессов деформирования без учёта влияния повреждённости от экспериментальных на второй стадии процесса накопления повреждений приписываются влиянию повреждённости ω .

Приближенно границы W_c^a, W_c^f могут быть определены из испытаний на усталость при заданной амплитуде напряжений (или деформаций) на момент начала разупрочнения материала.

Для определения параметров эволюционного уравнения (15)–(18) при ползучести используется третий участок кривых ползучести $e_{11}^c(\sigma_{11}, T_j)$ при различных постоянных напряжениях и температурах. При этом значительное упрощение достигается, если имеет место подобие кривых ползучести [2]. В этом случае в качестве базовой кривой выбирают относительную кривую при $T = T_j$. Известное отношение скорости ползучести на третьем участке $e_{11}^{c(3)}$ к скорости установившейся ползучести $e_{11}^{c(2)}$ позволяет определить параметр $r_c(\omega, T)$ как функцию ω и T .

3. Результаты исследований

В [19] приведены результаты экспериментальных исследований процессов кратковременной высокотемпературной ползучести жаропрочного сплава ВЖ-159, которые были получены в лаборатории испытаний физико-механических свойств конструкционных материалов Научно-исследовательского института механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского под общим руководством Д.А. Казакова. Эксперименты выполнены на универсальной испытательной машине ZWICKZ030 (Германия), с нагревательным устройством МАУТЕС-НТ080/1. Измерительная аппаратура включает в себя: датчик силы класса 1 по ISO 7500-1 (отклонение от задаваемого усилия в пределах одного опыта не превышает 15Н) и высокотемпературный датчик продольной деформации (тип – РМА-12/V7-1). Для контроля температуры внутри высокотемпературной печи по трём зонам и на образце используются три термопары (тип К). Поддерживание заданной температуры (отклонение не превышает 2 °С) осуществляется электронным блоком управления НТО-08/1.

Опыты были выполнены на цилиндрических образцах сплошного сечения с длиной рабочей части $l = 50$ мм и диаметром $d = 8$ мм в условиях одноосного растяжения для различных уровней нормальных напряжений σ_{11} и температур T .

Расчёт процесса кратковременной ползучести до образования макротрещины по механизму длительной прочности проводился с помощью программы EXPMODEL, предназначенной для численного моделирования неизотермического вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при нерегулярном нестационарном термомеханическом нагружении [20]. Физико-механические характеристики жаропрочного сплава ВЖ-159 и материальные параметры модели МПС следующие:

при $T = 750$ °С
 $K = 137000$ МПа, $G = 64000$ МПа, $\bar{C}_c = 265$ МПа, $\lambda_c^{(0)} = 0.0005$ (МПа·ч)⁻¹,
 $\lambda_c^{(1)} = 0.0005$ (МПа·ч)⁻¹, $g_1^c = 1100$ МПа, $g_2^c = 150$ МПа, $W_c^f = 57.5$ МДж/м³,
 $W_c^a = 14.3$ МДж/м³, $\alpha_c = 1$, $r_c = 0.1$, $k_c = 1$, $\chi_c^{(1)} = 0$, $\chi_c^{(2)} = 0.025$, $\omega_f = 0.83$;

при $T = 850$ °С
 $K = 113000$ МПа, $G = 52000$ МПа, $\bar{C}_c = 85$ МПа, $\lambda_c^{(0)} = 0.00068$ (МПа·ч)⁻¹,
 $\lambda_c^{(1)} = 0.00068$ (МПа·ч)⁻¹, $g_1^c = 1000$ МПа, $g_2^c = 150$ МПа, $W_c^f = 14$ МДж/м³,
 $W_c^a = 5$ МДж/м³, $\alpha_c = 1$, $r_c = 0.1$, $k_c = 1$, $\chi_c^{(1)} = 0$, $\chi_c^{(2)} = 0.06$, $\omega_f = 0.83$.

На рис. 3–6 представлены кривые ползучести. Здесь сплошными линиями отмечены результаты численного моделирования с использованием определяющих соотношений МПС (1)–(19), а пунктирной – соответствующие экспериментальные результаты. Видно качественное и количественное совпадение опытных и расчётных данных.

На рис. 7–11 приведены зависимости, полученные из эксперимента, проведенного при режиме нагрузки, характеристики которого представлены на рис. 6.

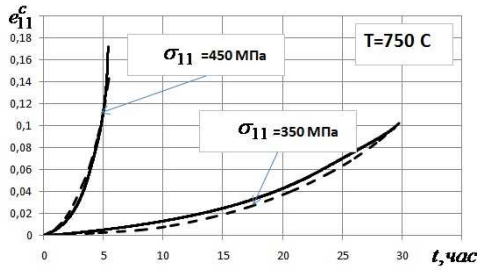


Рис. 3. Кривые ползучести при температуре $T = 750^\circ\text{C}$ и напряжениях $\sigma_{11} = 350$ МПа и $\sigma_{11} = 450$ МПа

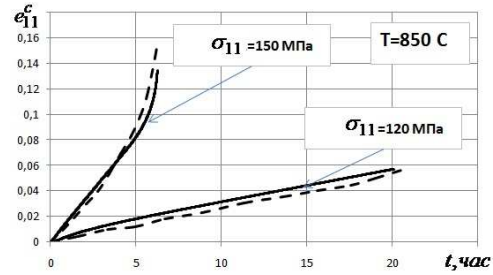


Рис. 4. Кривые ползучести при температуре $T = 850^\circ\text{C}$ и напряжениях $\sigma_{11} = 120$ МПа и $\sigma_{11} = 150$ МПа

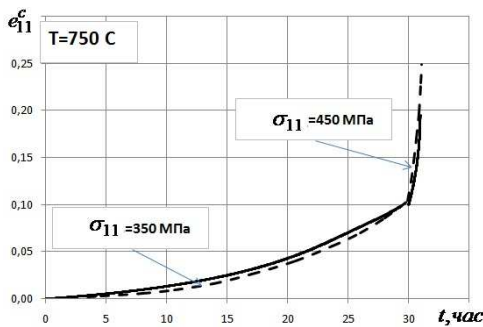


Рис. 5. Кривые ползучести при температуре $T = 750^\circ\text{C}$ и переходе с уровня напряжений $\sigma_{11} = 350$ МПа на уровень $\sigma_{11} = 450$ МПа

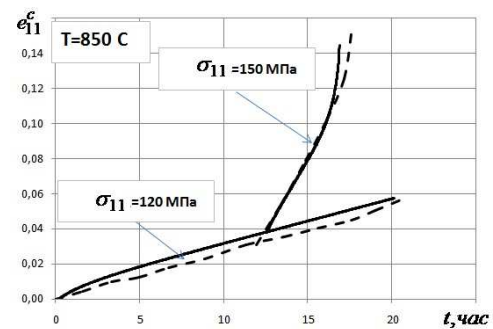


Рис. 6. Кривые ползучести при температуре $T = 850^\circ\text{C}$ и переходе с уровня напряжений $\sigma_{11} = 120$ МПа на уровень $\sigma_{11} = 150$ МПа

В целом, анализируя полученные численные результаты, можно отметить, что предложенная модель повреждённой среды качественно и количественно описывает основные эффекты наблюдаемые при нестационарной ползучести конструкционных материалов (металлах и их сплавах) и деградацию начальных прочностных свойств материалов при деградации по механизму длительной прочности.

Заключение

Развита математическая модель механики повреждённой среды, описывающая процессы неупругого деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах (металлах и их сплавах) при деградации начальных прочностных свойств материалов по механизму длительной прочности.

Методом численного моделирования и сравнения полученных результатов с опытными данными проведена оценка достоверности определяющих соотношений МПС при ползучести, которая позволяет сделать вывод о достоверности развитых модельных представлений и точности разработанной методики определения материальных параметров, входящих в указанные соотношения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-11-2019-050).

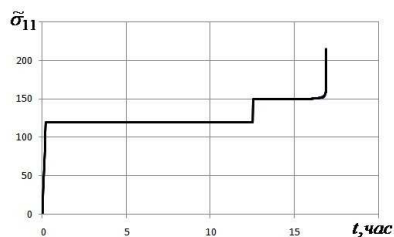


Рис. 7. График зависимости эффективных напряжений $\tilde{\sigma}_{11}$ от времени процесса t

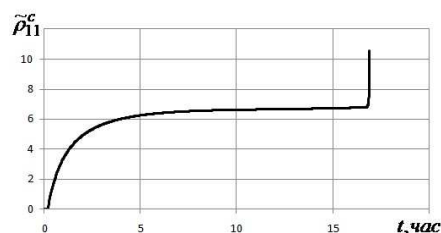


Рис. 8. График зависимости $\tilde{\rho}_{11}^c$ от времени процесса t

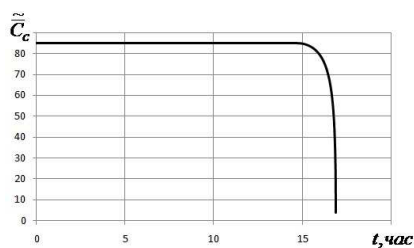


Рис. 9. График зависимости эффективного радиуса поверхности ползучести нулевого уровня \tilde{C}_c от времени процесса t

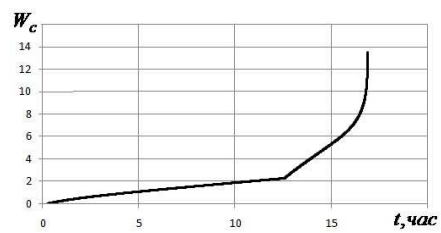


Рис. 10. График зависимости энергии разрушения при ползучести W_c от времени процесса t

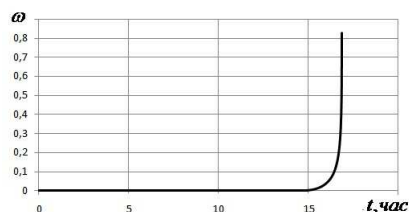


Рис. 11. График зависимости величины повреждённости ω от времени процесса t

Литература

1. Митенков Ф.М., Кайдалов В.Ф., Коротких Ю.Г. Методы обоснования ресурса ядерных энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2007. – 448 с.
2. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: Физматлит, 2008. – 424 с.
3. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
4. Lemaître J. Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structures // Trans. 5th Int. Conf. SMiRT-5. – Amsterdam: North Holland, 1979. – V. L. – Paper L5/1 b, P. 1–8.
5. Murakami S. Mechanical description of creep damage and its experimental verification // J. Mec. Theor. Appl. – 1982. – V. 1, No 5. – P. 743–761.
6. Manson S.S., Ensign C.R. A quarter-century of progress in the development of correlation and extrapolation methods for creep rupture data // J. Eng. Mater. Technol. – 1979. – V. 101, No 4. – P. 317–325. – doi: 10.1115/1.3443696.

7. *Le May I.* Developments in parametric methods for handling creep and creep-rupture data // J. Eng. Mater. Technol. – 1979. – V. 101, No 4. – P. 326–330. – doi: 10.1115/1.3443697.
8. *Larson F.R., Miller J.A.* A time-temperature relationship for rupture and creep stresses // Trans. ASME. – 1952. – V. 74, No 5. – P. 539–605.
9. *Никитенко А.Ф.* Экспериментальное обоснования гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения. Сообщение 1 // Проблемы прочности. – 1984. – № 8. – С. 3–8.
10. *Никитенко А.Ф.* Экспериментальное обоснования гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения. Сообщение 2 // Проблемы прочности. – 1984. – № 8. – С. 8–10.
11. *Вудфорд Д.А.* Повреждение при ползучести и концепция остаточной долговечности // Труды Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1979. – Т. 101, № 4. – С. 1–8.
12. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г.* Прикладная теория вязкопластичности. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2015. – 318 с.
13. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Казаков Д.А., Шишулин Д.Н., Сметанин И.В.* Определяющие соотношения нестационарной ползучести при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 4. – С. 436–451. – doi: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-436-451.
14. *Боднер С.Р., Линдхолм У.С.* Критерий приращения повреждения для зависящего от времени разрушения материалов // Труды Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1976. – Т. 100, № 2. – С. 51–58.
15. *Леметр Ж.* Континуальная модель повреждения, используемая для расчёта разрушения пластичных материалов // Труды Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – Т. 107, № 1. – С. 90–98.
16. *Пежиса П.* Моделирование закритического поведения и разрушения диссипативного твердого тела // Труды Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1984. – Т. 106, № 4. – С. 107–117.
17. *Локощенко А.М.* К выбору критерия длительной прочности при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. – 1989. – № 9. – С. 3–6.
18. *Бантхья В., Мукерджи С.* Об усовершенствованной схеме интегрирования по времени для системы определяющих соотношений неупругой деформации с нелинейностью жёсткого типа // Труды Америк. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – № 4. – С. 54–60.
19. *Капустин С.А., Казаков Д.А., Чурилов Ю.А., Галущенко А.И., Вахтеров А.М.* Экспериментально-теоретическое изучение поведения изделий из жаропрочного сплава в условиях высокотемпературной ползучести // Проблемы прочности и пластичности. – 2008. – Вып. 70. – С. 100–111.
20. *Волков И.А., Игумнов Л.А., Казаков Д.А., Емельянов А.А., Тарасов И.С., Гусева М.А.* Программная реализация процессов вязкопластического деформирования и накопления повреждений в конструкционных сплавах при термомеханическом нагружении // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т. 78, № 2. – С. 188–207. – doi: 10.32326/1814-9146-2016-78-2-188-207.

Волков Иван Андреевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, к. 6, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *pmptmvgavt@yandex.ru*

Игумнов Леонид Александрович, доктор физико-математических наук, профессор,
директор

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, к. 6, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *igumnov@mech.unn.ru*

Литвинчук Светлана Юрьевна, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, к. 6, г. Нижний Новгород, 603950, Россия
E-mail: *litvinchuk@mech.unn.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 4, pp. 509–525

doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.509-525

A Continual Model of Damaged Media for Describing the Creep Failure Process

*I.V. Volkov**, *L.A. Igumnov***, *S.Yu. Litvinchuk****

*Research Institute of Mechanics, Lobachevsky National Research State University,
Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

E-mail: **pmptmvgavt@yandex.ru*, ***igumnov@mech.unn.ru*, ****litvinchuk@mech.unn.ru*

Received October 1, 2019

Abstract

The main laws of deformation and degradation processes of the initial strength properties of structural materials (metals and their alloys) according to the long-term strength mechanism were considered. From the viewpoint of the mechanics of damaged media (MDM), a mathematical model was created to describe inelastic deformation and damage accumulation during the creep process. An experimental and theoretical methodology for determining material parameters of the derived defining relations of MDM was developed. The material parameters and scalar functions of the MDM model, its reliability and the scope of its applicability were determined based on the analysis of the processes of deformation and failure of laboratory specimens in the conditions of soft loading (controlled stresses). The results of the experimental study of short-term creep of the VZh-159 heat-resistant alloy were presented. The process of deformation and damage accumulation was numerically analyzed; the obtained numerical results were compared with the data of the full-scale experiments. Comparison of the numerical and experimental data shows that the introduced defining relations of MDM

adequately describe the response of materials in the conditions of degradation of the initial strength properties of structural materials according to the long-term strength mechanism.

Keywords: nonstationary creep, long-term strength, simulation, defining relations, mechanics of damaged media, temperature, damage, material parameter, numerical experiment, full-scale experiment

Acknowledgments. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. 075-11-2019-050).

Figure Captions

Fig. 1. Dependences of χ_c on process time t at $S_u^c = \text{const}$ under multiaxial deformation along the ray path.

Fig. 2. Uniaxial stress state creep tests under soft (controlled stress) loading: (a) experimental data for the creep surface radius of zero strain rate; (b) experimental data for finding the kinematic (anisotropic) hardening modules.

Fig. 3. Creep curves at temperature $T = 750$ °C and stresses $\sigma_{11} = 350$ MPa and $\sigma_{11} = 450$ MPa.

Fig. 4. Creep curves at temperature $T = 850$ °C and stresses $\sigma_{11} = 120$ MPa and $\sigma_{11} = 150$ MPa.

Fig. 5. Creep curves at temperature $T = 750$ °C and transition from stress level $\sigma_{11} = 350$ MPa to level $\sigma_{11} = 450$ MPa.

Fig. 6. Creep curves at temperature $T = 850$ °C and transition from stress level $\sigma_{11} = 120$ MPa to level $\sigma_{11} = 150$ MPa.

Fig. 7. Graph of effective stresses $\tilde{\sigma}_{11}$ versus process time t .

Fig. 8. Graph of $\tilde{\rho}_{11}^c$ versus process time t .

Fig. 9. Graph of effective radius of zero level creep surface \tilde{C}_c versus process time t .

Fig. 10. Graph of creep failure energy W_c versus process time t .

Fig. 11. Graph of damage degree ω versus process time t .

References

1. Mitenkov F.M., Kaidalov V.F., Korotkikh Yu.G. *Metody obosnovaniya resursa yadernykh energeticheskikh ustanovok* [Methods of Substantiation of Nuclear Power Plants' Life]. Moscow, Mashinostroenie, 2007. 448 p. (In Russian)
2. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uraveneniya sostoyaniya vyazkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of the State for the Viscoelasticoplastic Media with Defects]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 424 p. (In Russian)
3. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov* [Creep and Long-Term Strength of Metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016. 504 p. (In Russian)
4. Lemaitre J. Damage modelling for prediction of plastic or creep fatigue failure in structures. *Trans. 5th Int. Conf. SMiRT-5*. Amsterdam, North Holland, 1979, vol. L, art. L5/1 b, pp. 1–8.
5. Murakami S. Mechanical description of creep damage and its experimental verification. *J. Mec. Theor. Appl.*, 1982, vol. 1, no. 5, pp. 743–761.
6. Manson S.S., Ensign C.R. A quarter-century of progress in the development of correlation and extrapolation methods for creep rupture data. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1979, vol. 101, no. 4, pp. 317–325. doi: 10.1115/1.3443696.
7. Le May I. Developments in parametric methods for handling creep and creep-rupture data. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1979, vol. 101, no. 4, pp. 326–330. doi: 10.1115/1.3443697.

8. Larson F.R., Miller J.A. A time-temperature relationship for rupture and creep stresses. *Trans. ASME*, 1952, vol. 74, no. 5, pp. 539–605.
9. Nikitenko A.F. Experimental verification of the hypothesis of the existence of surface creep under complex loading conditions. Report No. 1. *Strength Mater.*, 1984, vol. 16, no. 8, pp. 1063–1068. doi: 10.1007/BF01530274.
10. Nikitenko A.F. Experimental verification of the hypothesis of the existence of surface creep under complex loading conditions. Report No. 2. *Strength Mater.*, 1984, vol. 16, no. 8, pp. 1069–1071. doi: 10.1007/BF01530275.
11. Woodford D.A. Creep damage and the remaining life concept. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1979, vol. 101, no. 4, pp. 311–316. doi: 10.1115/1.3443695.
12. Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G. *Prikladnaya teoriya vyazkoplachnosti* [Applied Theory of Viscoplasticity]. Nizhny Novgorod, Izd. NNGU, 2015. 318 p. (In Russian)
13. Volkov I.A., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Shishulin D.N., Smetanin I.V. Constitutive relations of unsteady creep in a complex stress state. *Probl. Prochn. Plast.*, 2016, vol. 78, no. 4, pp. 436–451. doi: 10.32326/1814-9146-2016-78-4-436-451. (In Russian)
14. Bodner S.R., Lindholm U.S. An incremental criterion for time-dependent failure of materials. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1976, vol. 98, no. 2, pp. 140–145. doi: 10.1115/1.3443356.
15. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1985, vol. 107, no. 1, pp. 83–89. doi: 10.1115/1.3225775.
16. Perzyna P. Constitutive modeling of dissipative solids for postcritical behavior and fracture. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1984, vol. 106, no. 4, pp. 410–419. doi: 10.1115/1.3225739.
17. Lokoshchenko A.M. Criteria for determining the long-term strength under conditions of complex loading. *Strength Mater.*, 1989, vol. 21, no. 9, pp. 1121–1124. doi: 10.1007/BF01529282.
18. Banthia V., Mukherjee S. On an improved time integration scheme for stiff constitutive models of inelastic deformation. *J. Eng. Mater. Technol.*, 1985, vol. 107, no. 4, pp. 282–285. doi: 10.1115/1.3225820.
19. Kapustin S.A., Kazakov D.A., Churilov Yu.A., Galushchenko A.I., Vakhterov A.M. Experimental and theoretical study of the behavior of structural parts from heat-resistant alloy under high-temperature creep. *Probl. Prochn. Plast.*, 2008, no. 70, pp. 100–111. (In Russian)
20. Volkov I.A., Igumnov L.A., Kazakov D.A., Emel'yanov A.A., Tarasov I.S., Guseva M.A. Software implementation of viscoplastic deformation and damage accumulation processes in structural alloys under thermal-mechanical loading. *Probl. Prochn. Plast.*, 2016, vol. 78, no. 2, pp. 188–207. doi: 10.32326/1814-9146-2016-78-2-188-207. (In Russian)

Для цитирования: Волков И.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Континуальная модель повреждённой среды для описания процесса разрушения при ползучести // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 509–525. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.509-525.

For citation: Volkov I.V., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu. A continual model of damaged media for describing the creep failure process. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 509–525. doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.509-525. (In Russian)