УДК 517.54

О ВЫХОДЕ ИЗ МНОЖЕСТВА ГАХОВА, КОНТРОЛИРУЕМОМ УСЛОВИЯМИ ПОДЧИНЕННОСТИ

А.В. Казанцев

Аннотация

Множество Гахова $\mathcal{G}$ представляет собой класс всех голоморфных и локально однолистных функций в единичном круге, имеющих не более одного корня уравнения Гахова. Для ряда известных подклассов однолистных функций при наличии нулевого корня уравнения Гахова дано эффективное описание множества траекторий выхода из $\mathcal{G}$; такой выход осуществляется при значении параметра, который отвечает неулучшаемой постоянной в соответствующем условии единственности корня. Показано, что выход из $\mathcal{G}$ может происходить за счет бифуркаций только двух типов: 1) максимум в нуле переходит в два максимума и седло; 2) возникает ненулевое полуседло, распадающееся затем в седло и максимум.

Ключевые слова: гиперболическая производная, конформный радиус, бифуркации критических точек, множество Гахова, класс звездообразных функций, условия подчиненности.

Введение

Известная эквивалентность

$$\nabla\big\{h_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)\big|f'(\zeta)\big|\big\} = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\overline{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \tag{1}$$

объединяет проблематику двух направлений: восходящей к Д. Полиа, Г. Сеге [1] и Х. Хиги [2] задачи определения числа и характера экстремумов конформных радиусов плоских областей (см. также [3]) и начатого Ф.Д. Гаховым в [4] исследования разрешимости внешней обратной краевой задачи по параметру s с нефиксированным полюсом. Фигурирующая в левой части (1) функция h_f называется *гиперболической производной* голоморфной в $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ функции f [5, 6]; в классической постановке Полиа – Сеге – Хиги величина $h_f(\zeta)$ совпадает с (внутренним) конформным радиусом области $f(\mathbb{D})$ в точке $f(\zeta)$ [2].

Эквивалентность (1) была известна еще Ф.Д. Гахову (в терминах $\varphi = f'$) [4] и Э. Пешлю [7], но в связи с экстремумами гиперболических производных впервые появляется только в работе [8]. Основанная на (1) статья [9] (с опорой на многосвязный аналог [10]) переключила поиск условий единственности с решений внешней задачи на критические точки функции h_f (см. [11–13]). Уравнение из правой части (1) называется *уравнением Гахова*.

Пусть H – класс всех функций f, голоморфных в $\mathbb{D}$. Мы будем работать с его подклассом H_0, состоящим из локально однолистных в $\mathbb{D}$ функций f (то есть $f'(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \mathbb{D}$) с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Через M_f обозначим множество всех критических точек функции h_f в $\mathbb{D}$, через k_f – их количество. Элементы $a \in M_f$ исследуются с помощью двух характеристик – гауссовой кривизны

$K_f(\zeta)$ поверхности $h = h_f(\zeta)$ над $\mathbb{D}$ и индекса $\gamma_f(a)$ векторного поля $\nabla h_f(\zeta)$ – и могут быть только трех типов: локальный максимум ($\gamma_f(a) = +1$), седло ($\gamma_f(a) = = -1$) и полуседло ($\gamma_f(a) = 0$) [14].

Рассмотрим *множество Гахова* $\mathcal{G} = \{f \in H_0 : k_f \le 1\}$ (см. [15, 16]). Использование соотношения $k_f \le 1$ (а не $k_f = 1$) обусловлено тем, что некоторые подклассы H_0, в которых из $M_f \ne \varnothing$ следует $k_f = 1$, содержат элементы f с $k_f = 0$. Пример – класс $\mathcal{N}$ функций $f \in H$ с условием Нехари [17]

$$(1 - |\zeta|^2)^2 \big|\{f, \zeta\}\big| \le 2,\ \zeta \in \mathbb{D}, \tag{2}$$

где $\{f, \zeta\} = (f''/f')'(\zeta) - (f''/f')^2(\zeta)/2$ – шварциан; доказательство импликации $f \in \mathcal{N}, f''(0) = 0, f(\mathbb{D}) \ne$ *полоса* $\Rightarrow k_f = 1$ содержится в [18] (см. также [3, 13]). Как известно [17], условия $f \in H$ и (2) обеспечивают однолистность f, откуда, в частности, $\mathcal{N} \subset H_0$. Легко проверить, что $f(\zeta) = \ln(1/(1-\zeta)) \in \mathcal{N}$ и $k_f = 0$.

Множество Гахова распадается в дизъюнктное объединение подмножеств $\mathcal{G}_1 = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) = +1\}$, $\mathcal{G}_0 = \{f \in H_0 : k_f = 0\}$ и $\mathcal{G}_s = \{f \in H_0 : k_f = 1, \gamma_f(M_f) \ne +1\}$. Последнее из них содержит, например, функцию из примера 1 ниже, а также функцию $f(\zeta) = \zeta/(1-\zeta^2)$. В обоих случаях $M_f = \{0\}$, только в первом точка $\zeta = 0$ – полуседло, а во втором – седло поверхности $h = = h_f(\zeta)$.

Одним из способов исследования множества Гахова является погружение функции $f \in H_0$ в семейство ее «линий уровня» $f_r(\zeta) = f(r\zeta)/r$ с последующим изучением динамики множеств M_{f_r}, $0 \le r \le 1$ ($M_{f_0} := \{0\}$). Для этого вводятся слоение $\mathfrak{R}_f[0,1] = \bigcup\limits_{r \in [0,1]} M_{f_r} \times \{r\}$ и функционал

$$\overline{r}_f = \sup\ \{\xi \in [0,1] : r \in [0, \xi] \Longrightarrow k_{f_r} = 1\} \tag{3}$$

первого выхода из множества $\mathcal{G}$ вдоль «линий уровня» функции $f \in H_0$. Корректность определения $\overline{r}_f$ опирается на два момента: 1) при $r < 1$ функция f_r принадлежит малому классу Блоха $\mathcal{B}_0 = \{g \in H : \lim_{\zeta\,\to\,\partial\mathbb{D}} h_g(\zeta) = 0\}$, так что $k_{f_r} > 0$, и 2) множество в (3), точной верхней гранью которого является $\overline{r}_f$, всегда содержит отрезок $[0, \xi_f]$, на котором $k_{f_r} = 1$; в качестве ξ_f можно взять радиус выпуклости функции f.

Локальное строение множеств вида $\mathfrak{R}_f[0,1]$ изучено в работах [3, 6]; часть полученных там результатов, необходимую для дальнейшего изложения, объединяет следующая

Лемма 1. *Пусть $f \in H_0$ и α – изолированный элемент множества M_{f_ρ}, $0 < \rho < 1$. Если $\alpha = 0$, то $0 \in M_{f_r}$ для любого $r \le 1$; слоение $\mathfrak{R}_f[0,1]$ допускает бифуркацию в точке $(0, \rho)$ тогда и только тогда, когда $\rho = \sqrt{2/|\{f, 0\}|}$. При этом $\alpha = 0$ – точка максимума h_{f_r}, когда $r < \rho$, и с ростом r возможны три сценария бифуркации «над» $r = \rho$:* а) *максимум переходит в седло с ответвлением двух максимумов* (*бифуркация типа* Ψ); б) *максимум и два седла сливаются в седло*; в) *максимум и седло меняются ролями, переходя через полуседло.*

Если $\rho = \overline{r}_f$ и неравенство $k_{f_r} > 1$ при $r > \rho$ вблизи ρ выполняется за счет бифуркации $\mathfrak{R}_f[0,1]$ в точке (α, ρ), то эта бифуркация – одного из двух типов: Ψ или $\cup$. Последний может иметь место только в случае $\alpha \ne 0$ и означает, что α – полуседло, распадающееся на максимум и седло с ростом r.

В настоящей статье исследуется нарушение единственности *нулевого* корня уравнения Гахова, то есть нас будут интересовать функции $f \in H_0$ с дополнительным условием $f''(0) = 0$. Для $X \subset H_0$ введем обозначение $\widetilde{X} = \{f \in X : f''(0) = 0\}$; таким образом, $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{G}}_1 \bigsqcup \widetilde{\mathcal{G}}_s$.

Замечание 1. Как показано в [6], множество $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ звездообразно по «линиям уровня»: если $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$, то $f_r \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ для любого $r \in (0,1)$. Если же $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_s$, то при $r < 1$, близких к 1, имеем $k_{f_r} > 1$. Действительно, рассмотрим два случая.

1) Пусть $\gamma_f(0) = -1$. Тогда если $K_f(0) \neq 0$, то по лемме 2 из [6] для любого $r < 1$ вблизи 1 будет $\gamma_{f_r}(0) = -1$, а так как $f_r \in \mathcal{B}_0$, то, по предложению 2 из [6], множество M_{f_r}, кроме седла в $\zeta = 0$, содержит точку максимума. Такой же результат получается и при $K_f(0) = 0$, только уже по лемме 1, так как в этом случае имеет место $|\{f, 0\}| = 2$ (выражение для $K_f(0)$ с точностью до положительного сомножителя совпадает с $4 - |\{f, 0\}|^2$).

2) Если $\gamma_f(0) = 0$, то $K_f(0) = 0$ (см., например, [3]), и вновь применяется лемма 1.

В качестве иллюстрации приведем следующий

Пример 1. Слоение $\mathfrak{R}_f[0,1]$ для функции $f(\zeta) = \int_0^\zeta e^{-2t}(1-t)^{-2}dt \in \widetilde{\mathcal{G}}_s$ состоит из двух компонент – отрезка $\mathfrak{r}_0 = \{0\} \times [0,1]$ и кривой $\mathfrak{r}_1 = \{(x, r(x)) : x \in [0,1]\}$, где $r(x) = 2/(x + \sqrt{4 - 3x^2})$. Имеем $r(0) = r(1) = 1$ и $\overline{r}_f = \min_{x\in[0,1]} r(x) = r(1/\sqrt{3}) = \sqrt{3}/2$. Это означает, что для $r \in [0, \sqrt{3}/2)$ будет $f_r \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ ($M_{f_r} = \{0\}$) и возникающее при $r = \sqrt{3}/2$ полуседло $\zeta = 1/\sqrt{3}$ распадается затем на седло $\zeta_s(r) = (1 - \sqrt{4r^2 - 3})/(2r)$ и максимум $\zeta_m(r) = (1 + \sqrt{4r^2 - 3})/(2r)$; при $r = 1$ седло $\zeta_s(r)$ сливается с максимумом $\zeta = 0$ в полуседло, а $\zeta_m(r)$ выходит на $\partial\mathbb{D}$.

Далее нам понадобятся два известных подкласса однолистных функций: класс $\mathcal{S}^*$ функций $f \in H$, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, удовлетворяющих условию звездообразности $\mathrm{Re}\,\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) > 0$, $\zeta \in D$, а также класс Александера [19], состоящий из голоморфных функций $f(\zeta) = \zeta + a_2\zeta^2 + \cdots$ с оценкой $\mathrm{Re} f'(\zeta) > 0$, $\zeta \in D$; последний класс будем обозначать через $\mathcal{A}$. Если $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$, то из условия звездообразности следует, что

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1 + \varphi(\zeta)}{1 - \varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{4}$$

где 1) $\varphi \in H$ и 2) $|\varphi(\zeta)| < 1$, $\zeta \in \mathbb{D}$, а из (4) и $f''(0) = 0$ – разложение вида 3) $\varphi(\zeta) = \alpha\zeta^2 + \cdots$. Класс функций φ со свойствами 1) – 3) обозначим через $\mathcal{V}$.

Рассмотрим следующую постановку. Пусть X – подкласс H_0, такой что $\widetilde{X} \neq \varnothing$. Введем два объекта – величину

$$\rho(\widetilde{X}) := \inf\{\overline{r}_f : f \in \widetilde{X}\}$$

и связанное с ней экстремальное множество

$$E(\widetilde{X}) := \{f \in \widetilde{X} : \overline{r}_f = \rho(\widetilde{X})\}.$$

Задача состоит в том, чтобы, определив значение $\rho(\widetilde{X})$, дать эффективное описание множества $E(\widetilde{X})$.

В рамках предшествующего этапа исследований по уравнениям Гахова (см., например, [13, с. 36; 20]) величина $\rho(\widetilde{X})$ рассматривалась бы как точная (неулучшаемая) постоянная в условии единственности

$$f \in \widetilde{X}, \quad r \leq \rho(\widetilde{X}) \Longrightarrow k_{f_r} = 1$$

нулевого корня уравнения Гахова для f_r, а множество $E(\widetilde{X})$ – как набор функций, реализующих неулучшаемость указанной постоянной. Это означает, что если $f \in E(\widetilde{X})$, то условие $r \leq \rho(\widetilde{X})$ не только достаточно, но и необходимо для равенства

$k_{f_r} = 1$. Построение условий единственности традиционно предполагало вычисление неулучшаемых постоянных и и указание отдельных элементов экстремальных множеств. Новизна развиваемого подхода состоит в полном описании множества $E(\widetilde{X})$.

В настоящей работе поставленная задача решается в случае, когда X пробегает ряд подклассов $\mathcal{S}^*$ и $\mathcal{A}$. При этом сценарии выхода из множества Гахова вдоль «линий уровня» демонстрируют наличие обеих возможностей, открываемых леммой 1, то есть соответствующих бифуркациям как типа Ψ, так и $\cup$. Кроме того, для однопараметрических семейств условий подчиненности вида (4) вводятся аналоги «линий уровня» (с параметром семейства вместо r), что позволяет использовать приведенную постановку для расширения описания выхода из множества $\widetilde{\mathcal{G}}_1$.

Данная статья продолжает исследования автора по параметрическим семействам конформных радиусов в работах [3, 5, 6, 16, 20–23] и некоторых других (по поводу двупараметрического случая см. [24], а также статью [25] и библиографию к ней). В качестве отправной точки послужили принадлежащие автору результаты § 2 из [11], в особенности пп. 1) и 2) теоремы 4 и пример 1.

1. Ψ-Выход из множества Гахова по «линиям уровня» в $\widetilde{\mathcal{S}}^*$

Будем использовать следующую версию леммы Шварца, конструируемую очевидным образом на основе теорем 1 и 4 из [26, гл. 8, § 1].

Лемма 2. *Если $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^2 + \cdots \in \mathcal{V}$, то $|\gamma| \le 1$. Равенство имеет место только в случае, когда $\varphi(\zeta) = \varepsilon\zeta^2$, $|\varepsilon| = 1$.*

Замечание 2. Для любой $f \in H_0$ слоение $\mathfrak{R}_f[0,1]$ не имеет предельных точек на $\partial\mathbb{D}\times(0,1)$. Действительно, допуская наличие последовательности $\mathfrak{R}_f[0,1] \ni (\xi_n, r_n) \to (\xi_0, r_0) \in \partial\mathbb{D}\times(0,1)$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ в уравнении Гахова

$$(1-|\xi_n|^2)r_n\frac{f''(r_n\xi_n)}{f'(r_n\xi_n)} = 2\overline{\xi}_n,$$

в силу локальной однолистности f получим $0 = 2\overline{\xi}_0$ – противоречие. Этого факта нам будет достаточно, но можно доказать и большее, а именно, существование возрастающей функции $R : (0,1) \to (0,1)$ такой, что для любого $r \in (0,1)$ множество M_{f_r} содержится в круге $|\zeta| \le R(r)$.

Вариант выхода из множества $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ устанавливает

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – семейство функций из $f \in H_0$ с условиями*

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{A|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \tag{5}$$

и $0 < A = \sup_{f\in\mathcal{F}} |\{f,0\}| < +\infty$. Тогда $\rho(\mathcal{F}) = \max\{1, \sqrt{2/A}\}$ и выполняются соотношения $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ при $A \le 2$, $E(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F} : |\{f,0\}| = A\}$ при $A > 2$.

Если, кроме того, существует инъекция $\iota : \mathcal{V} \to \mathcal{F} : \varphi \mapsto f$, задаваемая подчиненностью вида $\Phi(\zeta; f(\zeta)) \prec F(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, так, что $f''(\zeta)/f'(\zeta) = A\gamma\zeta + \cdots$ при $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^2 + \cdots$, то $\rho(\iota(\mathcal{V})) = \rho(\mathcal{F})$. В этом случае $E(\iota(\mathcal{V})) = \iota(\mathcal{V})$ для $A \le 2$ и $E(\iota(\mathcal{V})) = \{f_\varepsilon : \Phi(\zeta; f_\varepsilon) = F(\varepsilon\zeta^2), \zeta \in \mathbb{D}, |\varepsilon| = 1\}$ для $A > 2$.

Доказательство. Из (5) следует оценка

$$\left|\frac{f_r''(\zeta)}{f_r'(\zeta)}\right| < \frac{Ar^2|\zeta|}{1-r^2|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \tag{6}$$

справедливая при всех $r \in (0,1]$, а также утверждение теоремы при $A \le 2$: соотношения $\rho(\mathcal{F}) = 1$ и $E(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ почти очевидны и наследуются любым подсемейством $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$.

Пусть $A > 2$. Тогда из (6) ясно, что $k_{f_r} = 1$ при $0 \le r \le \sqrt{2/A}$ (напомним: $M_{f_0} = \{0\}$ для любой $f \in H_0$). Поэтому $\overline{r}_f \ge \sqrt{2/A}$, $f \in \mathcal{F}$.

Покажем, что найдется $g \in \mathcal{F}$ с $\overline{r}_g = \sqrt{2/A}$. Интегрированием (5) убеждаемся в том, что семейство $\mathcal{F}$ – равномерно ограниченное внутри $\mathbb{D}$. Поэтому к последовательности (f_n) со свойством $|\{f_n, 0\}| \to A$, $n \to \infty$, извлекаемой из $\mathcal{F}$ по определению A, применим принцип сгущения [26, с. 20]: из (f_n) выберем подпоследовательность (f_{n_k}), равномерно сходящуюся внутри $\mathbb{D}$ к голоморфной функции g. Очевидно, $g(0) = g'(0) - 1 = 0$, откуда $g \not\equiv \mathrm{const}$; локальную однолистность функция g наследует у (f_{n_k}) на основе классических теорем 1 и 2 на с. 17 и 19 из [26]. Таким образом, корректен переход в (5) к функции g; в итоге $g \in \mathcal{F}$. Так как $|\{g, 0\}| = A$, а по лемме 1 в точке $(0, \rho)$, $\rho = \sqrt{2/|\{g,0\}|}$, слоение $\mathfrak{R}_g[0,1]$ имеет бифуркацию, то с учетом полученного выше данная бифуркация имеет тип Ψ и $\overline{r}_g = \rho = \sqrt{2/A}$.

Мы установили, что $\rho(\mathcal{F}) = \sqrt{2/A}$, $E(\mathcal{F}) \ne \varnothing$ и что если $f \in \mathcal{F}$ и $|\{f, 0\}| = A$, то $f \in E(\mathcal{F})$. Пусть теперь $f \in E(\mathcal{F})$, то есть $\overline{r}_f = \sqrt{2/A}$. Поскольку $M_{f_{\sqrt{2/A}}} = \{0\}$ (см. (6)), в силу леммы 1 условие $k_{f_r} = 1$ с ростом r может нарушаться только за счет Ψ-бифуркации слоения $\mathfrak{R}_f[0,1]$ в точке $(0, \overline{r}_f)$ (здесь существенно, что $\overline{r}_f < 1$ согласно $A > 2$ и $\mathfrak{R}_f[0,1]$ не имеет предельных точек на $\partial\mathbb{D} \times (0,1)$ в силу (6); см. также замечание 2). Но тогда $\overline{r}_f = \sqrt{2/|\{f,0\}|}$ (вновь по лемме 1), откуда $|\{f,0\}| = A$. Таким образом, $E(\mathcal{F}) = \{f \in \mathcal{F} : |\{f,0\}| = A\}$.

Что касается последнего утверждения теоремы, то разложение f''/f' в зависимости от $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^2 + \cdots$ дает $|\{f,0\}| = A|\gamma|$. Тогда по определению f_ε имеем $|\{f_\varepsilon, 0\}| = A$, а так как $f_\varepsilon \in \iota(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{F}$, то согласно только что доказанному будет $f_\varepsilon \in E(\mathcal{F})$, то есть $\overline{r}_{f_\varepsilon} = \sqrt{2/A}$, $|\varepsilon| = 1$. Как установлено выше, $\overline{r}_f \ge \overline{r}_{f_\varepsilon}$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$, в частности для любой $f \in \iota(\mathcal{V})$. Поэтому $\rho(\iota(\mathcal{V})) = \sqrt{2/A}$, $f_\varepsilon \in E(\iota(\mathcal{V}))$ и $E(\iota(\mathcal{V})) \subset E(\mathcal{F})$.

В предположении $f \in E(\iota(\mathcal{V}))$ последнее включение приводит к соотношению $|\{f,0\}| = A$. Но по лемме 2 ($|\gamma| = 1$) оно выполняется только в случае, когда $f(\zeta) = \iota(\varepsilon\zeta^2) = f_\varepsilon(\zeta)$ для некоторого ε с $|\varepsilon| = 1$. □

Следствие 1. *Имеет место равенство* $\rho(\widetilde{\mathcal{S}}^*) = 1/\sqrt{3}$. *Множество экстремальных функций* $E(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$ *исчерпывается семейством* $f_\varepsilon(\zeta) = \zeta/(1 - \varepsilon\zeta^2)$, $|\varepsilon| = 1$.

Доказательство. Из (4), $\varphi \in \mathcal{V}$, очевидными преобразованиями получаем

$$\zeta \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2\zeta\varphi'(\zeta)}{1 - \varphi^2(\zeta)} + \frac{2\varphi(\zeta)}{1 - \varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D} \quad (\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^2 + \cdots)$$

откуда следует (5) с $A = 6$ согласно [26, с. 323]. Далее, $f''(\zeta)/f'(\zeta) = 6\gamma\zeta + \cdots$, $|\{f,0\}| = 6|\gamma|$ и равенство $|\gamma| = 1$ по лемме 2 приводит к $f = f_\varepsilon$, $|\varepsilon| = 1$, откуда, в частности, $\sup_{f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*} |\{f,0\}| = |\{f_\varepsilon, 0\}| = 6$. Таким образом, теорема 1 применима в случае $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{S}}^*$; при этом ι – биекция, определяемая подчиненностью (4). □

Замечание 3. Вычисление $\overline{r}_f = 1/\sqrt{3}$ для $f(\zeta) = \zeta/(1 - \varepsilon\zeta^2)$, $|\varepsilon| = 1$, было проведено в [21, с. 29]. В данном случае при любом $r \in (1/\sqrt{3}, 1)$ множество M_{f_r} содержит три элемента: седло $\zeta = 0$ и два максимума $\zeta_\pm(r)$ (с явно выписываемыми выражениями), выходящих на $\partial\mathbb{D}$ при $r = 1$.

2. «Линии уровня», определяемые условиями подчиненности

Пусть для любого $b \in [0,1]$ функция $F(w,b) = 1+2B(b)w+\cdots$ голоморфна по w в круге $\mathbb{D}$ и удовлетворяет в нем неравенству $\mathrm{Re}F(w,b) > 0$ (откуда $|B(b)| \le 1$). Пусть, далее, выполняются условия $F(0,w) = 1$, $F(w,1) = (1+w)/(1-w)$ и $F(w,b) \prec F(w,c)$ (в частности, $|B(b)| \le |B(c)|$) при $0 \le b < c \le 1$.

Рассмотрим семейство условий подчиненности

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec F(\zeta,b), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad b \in [0,1], \quad f \in \widetilde{H}_0, \tag{7}$$

каждое из которых определяет подкласс $\widetilde{\mathcal{S}}^*_F[b]$ в $\widetilde{\mathcal{S}}^*$; очевидно, $\widetilde{\mathcal{S}}^*_F[0] = \{f(\zeta) \equiv \zeta\}$ и $\widetilde{\mathcal{S}}^*_F[1] = \widetilde{\mathcal{S}}^*$. Покажем, как с помощью (7) строятся семейства, играющие роль «линий уровня» функций $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$.

Для произвольной функции $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$ представление (4), то есть $\zeta f'/f = F(\varphi,1)$, однозначно вычисляет функцию $\varphi \in \mathcal{V}$. Тогда при любом $b \in [0,1]$ и данной φ функция $f_b \in \widetilde{\mathcal{S}}^*_F[b]$ корректно определена как решение дифференциального уравнения

$$\zeta\frac{f_b'(\zeta)}{f_b(\zeta)} = F(\varphi(\zeta),b), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Более того, для любого $b \in [0,1]$ каждый элемент класса $\widetilde{\mathcal{S}}^*_F[b]$ имеет вид f_b для некоторой функции $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$.

Построенное семейство $\{f_b\}_{b\in[0,1]}$ будем называть F*-семейством* функции f, элементы f_b – ее F*-«линиями уровня»*, а функцию F с перечисленными выше условиями – *порождающей* функцией.

В качестве базовых рассматриваются величины

$$\overline{b}_f = \sup\{\xi \in [0,1] : b \in [0,\xi] \Rightarrow k_{f_b} = 1\} \quad \text{и} \quad \beta(\widetilde{\mathcal{S}}^*) = \inf\{\overline{b}_f : f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*\},$$

а также определяемое ими множество $B(\widetilde{\mathcal{S}}^*) = \{f \in \widetilde{\mathcal{S}}^* : \overline{b}_f = \beta(\widetilde{\mathcal{S}}^*)\}$.

Для того чтобы получить F-аналог теоремы 1, нам понадобятся соответствующие версии лемм 1 и 2. $\widetilde{\mathcal{S}}^*$-версия последней установлена в обосновании следствия 1:

Лемма 3. *Для любой функции $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$ справедливо неравенство $|f''(\zeta)/f'(\zeta)| < 6|\zeta|/(1-|\zeta|^2)$, $\zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, а также оценка $|\{f,0\}| \le 6$ с равенством только при $f \in E(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$.*

Что касается аналога леммы 1, то для наших целей будет достаточно теоремы 1 из [22], которую приведем в следующей форме.

Лемма 4. *Пусть функция $G(\zeta,b) = A(b)\zeta+\cdots$ голоморфна по (ζ,b) в некотором бикруге из $\mathbb{C}^2$ с центром в точке $(0,\beta)$, $\beta > 0$, и*

$$\mathrm{Re}\, A'(\beta)/A(\beta) > 0. \tag{9}$$

Если $|A(\beta)| = 2$, то при вещественных b множество $\mathfrak{B}$ решений уравнения $G(\zeta,b) - 2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2) = 0$ вблизи точки $(0,\beta)$ состоит из двух пересекающихся в ней C^ω-кривых: интервала на оси b и C^ω-дуги вида $(\tau e^{i\theta(\tau)}, b(\tau))$, $|\tau| < \varepsilon$, с $b(0) = \beta$. Если $|A(\beta)| \ne 2$, то в $\mathfrak{B}$ остается только первая кривая.

Выбор знака “$>$” (а не “$\ne$”) в (9) обусловлен приложением леммы 4 к F-семействам, когда $G(\zeta,b) = f_b''(\zeta)/f_b'(\zeta)$ и при $b < \beta$ нулевой корень уравнения Гахова для f_b должен быть максимумом h_{f_b}, то есть $|\{f_b,0\}| < |\{f_\beta,0\}| = 2$.

Последнее неравенство обеспечивается условием возрастания функции $|A(b)| = |\{f_b, 0\}|$ вблизи $b = \beta$, а для этого достаточно (9).

Теперь сформулируем и докажем аналог теоремы 1 для F-«линий уровня».

Теорема 2. *Пусть порождающая функция $F(w,b) = 1 + 2B(b)w + \cdots$ голоморфна по (w,b) в бикруге $\mathbb{D}^2$, причем $a(b) = |B(b)|$ возрастает на $[0,1]$ от $a(0) = 0$ до $a(1) = 1$. Пусть, далее, для любой функции $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$ ее F-семейство $\{f_b\}_{b\in[0,1]}$ удовлетворяет условию*

$$\left|\frac{f_b''(\zeta)}{f_b'(\zeta)}\right| < \frac{6a(b)|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \quad b \in (0,1), \tag{10}$$

а слоение $\mathfrak{B}_f[0,1] = \bigcup_{b\,\in\,[0,1]} M_{f_b}\times\{b\}$ не имеет предельных точек на $\partial\mathbb{D}\times(0,1)$. Тогда $\beta(\widetilde{\mathcal{S}}^*) = a^{-1}(1/3)$ и $B(\widetilde{\mathcal{S}}^*) = E(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$.

Доказательство. Обозначим $\beta := a^{-1}(1/3)$. Из (10) следует, что $k_{f_b} = 1$ при $0 \le b \le \beta$, поэтому $\overline{b}_f \ge \beta$ для всех $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*$. Пусть g – любая функция из $E(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$. Тогда $|\{g,0\}| = 6$, и в силу (8) имеем $|\{g_b,0\}| = 6a(b)$, $b \in [0,1]$. Так как $|\{g_\beta,0\}| = 2$, то по лемме 4 $(0,\beta)$ – точка бифуркации слоения $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_f[0,1]$, а так как $k_{g_b} = 1$, $0 \le b \le \beta$, то данная бифуркация – типа Ψ, значит, $\overline{b}_g = \beta$.

Итак, $\beta(\widetilde{\mathcal{S}}^*) = \beta$ и $E(\widetilde{\mathcal{S}}^*) \subset B(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$. Осталось доказать противоположное включение. Пусть $f \in B(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$, то есть $\overline{b}_f = \beta$. Поскольку уравнение Гахова для f_β не имеет корней в $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, а у слоения $\mathfrak{B}$ нет предельных точек на $\partial\mathbb{D}\times(0,1)$, в силу леммы 4 единственность нулевого корня с ростом b может нарушаться только за счет Ψ-бифуркации $\mathfrak{B}$ в точке $(0,\beta)$, причем $|\{f_\beta,0\}| = 2$. С другой стороны, из (8) и $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^2 + \cdots$ следует, что $|\{f_\beta,0\}| = 6|\gamma|a(\beta) = 2|\gamma|$. В итоге $|\gamma| = 1$, то есть $|\{f,0\}| = 6$, откуда $f \in E(\widetilde{\mathcal{S}}^*)$ по лемме 3. $\square$

Прототипами для предпринятого F-расширения исходной r-постановки послужили два утверждения, полученные автором в [11]. А именно, справедливо

Предложение 1. *Пусть $f \in \widetilde{H}_0$. Заключение $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ выполняется при любом из двух следующих условий для всякого b из неулучшаемого отрезка $[0,1/3]$:*

$$1)\ \ \zeta\,\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec F_1(\zeta,b) = \frac{1+b\zeta}{1-b\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

или

$$2)\ \ \zeta\,\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec F_2(\zeta,b) = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^b, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Можно показать, что функции $F_{1,2}$ – порождающие и удовлетворяют условиям теоремы 2 с $a(b) = b$.

3. Выход из $\widetilde{\mathcal{G}}_1$ по «линиям уровня» звездообразных функций порядка α

Функция $f \in H$ с нормировками $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ называется звездообразной порядка $\alpha \in [0,1)$, если

$$\operatorname{Re}\zeta\,\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} > \alpha, \quad \zeta \in \mathbb{D}; \tag{11}$$

в отличие, например, от [27], мы не требуем, чтобы постоянная α в (11) была неулучшаемой. Класс всех функций с условием $f''(0) = 0$, звездообразных порядка

α, будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$. Для каждого элемента f данного класса будет выполняться следующее представление с подходящей $\varphi \in \mathcal{V}$:

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1+(1-2\alpha)\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{12}$$

При $\varphi(\zeta) = \zeta^2$ дифференциальное уравнение (12) определяет функцию

$$f_\alpha(\zeta) = \frac{\zeta}{(1-\zeta^2)^{1-\alpha}}, \tag{13}$$

при $\varphi(\zeta) = \varepsilon\zeta^2$ – ее вращения $\overline{\varepsilon} f_\alpha(\varepsilon\zeta)$, $|\varepsilon| = 1$. Известно (см., например, [15, с. 12]), что переход от функции к ее вращениям поворачивает корни уравнения Гахова умножением на $\overline{\varepsilon}$. Структуру слоений $\mathfrak{R}_{f_\alpha}[0,1]$ при различных $\alpha \in [0,1)$ рассматривает следующий

Пример 2. Уравнение Гахова

$$\frac{2(1-2\alpha)r^2\zeta^2}{1+(1-2\alpha)r^2\zeta^2} + \frac{2(2-\alpha)r^2\zeta^2}{1-r^2\zeta^2} = \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} \tag{14}$$

для «линии уровня» $f_{\alpha,r}$ имеет только вещественные корни. Полагая в (14) $\zeta = x \in (-1,1)$, отделяя $x = 0$ и производя замену $u = rx$, взаимно-однозначно переносящую исследование из области $\{0 < r \le 1, -1 < x < 1\}$ в область $\Delta = \{0 < r \le 1, -r < u < r\}$, получим явную зависимость $r = r(u)$, параметризующую ненулевые элементы $M_{f_{\alpha,r}}$. Данную зависимость удобно представить в форме $r^2 = R_\alpha(u^2)$, где

$$R_\alpha(t) = t + \frac{(1-t)(1+(1-2\alpha)t)}{(1-\alpha)(3+(1-2\alpha)t)},\ 0 \le t < 1. \tag{15}$$

Из (15) следует, что график $\Gamma = \{(u, r(u)) : -1 < u < 1\}$ лежит в Δ при $0 \le \alpha \le 2/3$ целиком, а при $2/3 < \alpha < 1$ – только над полуинтервалами $\sqrt{\tau(\alpha)} \le |u| < 1$, где $\tau(\alpha) = (3\alpha-2)/(\alpha(2\alpha-1))$.

Дифференцированием (15) легко показать, что знак $r'(u)$ совпадает со знаком выражения $-u(u^2-t_+(\alpha))(u^2-t_-(\alpha))$, где $t_-(\alpha)$ не попадает в промежуток $0 \le t < 1$ ни при каком $\alpha \in [0,1)$, а

$$t_+(\alpha) = \frac{3-2\sqrt{(2-\alpha)/\alpha}}{2\alpha-1}$$

появляется в нем только, когда $8/13 \le \alpha < 1$ (при этом $t_-(\alpha) > 1$). Подсчет выражения для $\overline{R}_\alpha = \min_{t\in[0,1)} R_\alpha(t)$ дает

$$\overline{R}_\alpha = \begin{cases} R_\alpha(0) = \dfrac{1}{3(1-\alpha)}, & \alpha \in [0, 8/13], \\ R_\alpha(t_+(\alpha)) = \dfrac{17\alpha-9}{(2\alpha-1)(3+\alpha+4\sqrt{\alpha(2-\alpha)})}, & \alpha \in (8/13, 1). \end{cases} \tag{16}$$

Величина $\overline{R}_\alpha$ непрерывна как функция от α в силу $t_+(8/13) = 0$ и контролирует выход «линий уровня» $f_{\alpha,r}$ из множества Гахова. Для любого $\alpha \in [0,1)$ при $r < \sqrt{\overline{R}_\alpha}$ будет $M_{f_{\alpha,r}} = \{0\}$, как и в случае $r = \sqrt{\overline{R}_\alpha}$, $0 \le \alpha \le 8/13$. Если же $r = \sqrt{\overline{R}_\alpha}$ и $8/13 < \alpha < 1$, то $M_{f_{\alpha,r}} = \{0, \pm\sqrt{t_+(\alpha)/\overline{R}_\alpha}\}$.

При $0 \le \alpha \le 8/13$ слоение $\mathfrak{R}_{f_\alpha}[0,1]$ имеет в точке $(0, \sqrt{\overline{R}_\alpha})$ бифуркацию типа Ψ, определяющую всю дальнейшую динамику $M_{f_{\alpha,r}}$: при $r > \sqrt{\overline{R}_\alpha}$ множество

$M_{f_{\alpha,r}}$ состоит из седла в нуле и двух максимумов, стремящихся к $\zeta = \pm 1$ с ростом $r \to 1$.

В случае $8/13 < \alpha \le 2/3$ слоение $\mathfrak{R}_{f_\alpha}[0,1]$ имеет две бифуркации типа $\cup$, которым отвечают полуседла $\pm\sqrt{t_+(\alpha)/R_\alpha}$ в $M_{f_{\alpha,\sqrt{R_\alpha}}}$; каждое из них далее распадается на максимум и седло при $r > \sqrt{R_\alpha}$. Максимумы, как и выше, стремятся к $\zeta = \pm 1$ при $r \to 1$, седла сливаются с нулевым максимумом в седло при $r = \sqrt{1/(3(1-\alpha))}$ ($= 1$, когда $\alpha = 2/3$), образуя бифуркацию типа б) из леммы 1.

Та же картина имеет место и при $2/3 < \alpha < 1$, с той лишь разницей, что порождаемые $\cup$-бифуркациями седла не успевают достичь нуля и останавливаются в точках $\zeta = \pm\sqrt{\tau(\alpha)}$ при $r = 1$.

Лемма 5. *Если* $0 \le \alpha < 1/2$, *то для каждой функции* $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$ *выполняется строгое неравенство*

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{6(1-\alpha)|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \tag{17}$$

причем $\sup_{f\in\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)} |\{f,0\}| = 6(1-\alpha)$. *Если* $1/2 \le \alpha < 1$, *то строгая оценка*

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{f''_\alpha(|\zeta|)}{f'_\alpha(|\zeta|)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}\setminus\{0\}, \tag{18}$$

имеет место для всех $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, *кроме функции* (13) *и ее вращений.*

Доказательство. Из представления (12) получим

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{2(1-\alpha)\zeta\varphi'(\zeta)}{(1+(1-2\alpha)\varphi(\zeta))(1-\varphi(\zeta))} + \frac{2(1-\alpha)\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{19}$$

где $\varphi \in \mathcal{V}$, и рассмотрим два случая.

1) $0 \le \alpha < 1/2$. Оценим (19) с использованием инвариантной формы леммы Шварца [26, с. 323] и неравенств $|\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta)| \le |\varphi(\zeta)| \le |\zeta|^2$, $\mathrm{Re}\,(1+(1-2\alpha)\varphi(\zeta)) \le |1+(1-2\alpha)\varphi(\zeta)|$ и $\mathrm{Re}\,(1-\varphi(\zeta)) \le |1-\varphi(\zeta)|$ (их эффективность была продемонстрирована в [12]). В результате имеем

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} H(\mathrm{Re}\,\varphi(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \tag{20}$$

где

$$H(t) = \left(\frac{2(1-2\alpha)}{1+(1-2\alpha)t} + \frac{2(2-\alpha)}{1-t}\right)(1-|t|)$$

(ср. [25, 28]). Легко проверить, что

$$0 < |t| < 1 \Rightarrow H(t) < H(0) = 6(1-\alpha), \tag{21}$$

поэтому (20) продолжается до неравенства (17), пока нестрогого в $\mathbb{D}$.

Предположим, что при некотором $a \in D\setminus\{0\}$ имеет место равенство

$$|f''(a)/f'(a)| = 6(1-\alpha)|a|/(1-|a|^2).$$

Тогда из (20) и (21) следует $\mathrm{Re}\,\varphi(a) = 0$, что вместе с $|1-\varphi(a)| = 1 - \mathrm{Re}\,\varphi(a)$ дает $\mathrm{Im}\,\varphi(a) = 0$, и, таким образом, $\varphi(a) = 0$. Но так как равенство в (20) по лемме Шварца приводит к функции $\varphi(\zeta) = \varepsilon\zeta^2$ с некоторым ε, $|\varepsilon| = 1$, то в итоге получаем $a = 0$ – противоречие. Итак, неравенство (17) установлено.

2) $1/2 \le \alpha < 1$. В этом случае ключевым будет неравенство $|1+(1-2\alpha)\varphi(\zeta)| \ge \ge 1+(1-2\alpha)|\zeta|^2$, $\zeta \in \mathbb{D}$. С его помощью обе формы леммы Шварца (обычная и инвариантная) позволяют перейти от (19) к нестрогой версии (18), а затем отделить единственное семейство $f(\zeta) = \overline{\varepsilon} f_\alpha(\varepsilon\zeta)$, $|\varepsilon| = 1$, из $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, на котором в (18) достигается равенство при $\zeta \ne 0$. □

Следует отметить, что классы функций с условиями (11) при $A = 1$ и $B = 1 - -2\alpha$, $\alpha \in [0,1)$, вкладываются в семейство классов Яновского $\widetilde{\mathcal{S}}^*[A,B]$, $A+B > 0$, $A, B \le 1$, определяемое подчиненностью

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{1+B\zeta}{1-A\zeta}, \quad \zeta \in \mathbb{D}.$$

Однако исследование включений $\widetilde{\mathcal{S}}^*[A,B] \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$ [25, 28] сразу исключает из рассмотрения классы $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$, так как $\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha) \setminus \widetilde{\mathcal{G}}_1 \ne \varnothing$ при всех $\alpha \in [0,1)$. Это послужило дополнительным стимулом к изучению звездообразных функций порядка α с помощью однопараметрических семейств. Привлечение таких семейств к исследованию классов Яновского рассматривалось в докладе [29].

Основной результат настоящего раздела – следующая

Теорема 3. *Для любого* $\alpha \in [0,1)$ *имеют место равенства* $\rho(\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)) = \sqrt{\overline{R}_\alpha}$ *и* $E(\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)) = \{\overline{\varepsilon} f_\alpha(\varepsilon\zeta) : |\varepsilon| = 1\}$, *где* $\overline{R}_\alpha$ *определено в* (16), *а* f_α *– функция* (13).

Доказательство. При $0 \le \alpha < 1/2$ наше утверждение с помощью леммы 5 следует из теоремы 1.

Пусть $1/2 \le \alpha < 1$. В силу соотношения $\lim\limits_{|\zeta|\to 1}(1-|\zeta|^2)|f_r''(\zeta)/f_r'(\zeta)| = 0$, $0 < r < 1$, справедливого по лемме 5 для любой функции $f \in \widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha)$ (в том числе для f_α и ее вращений), слоение $\mathfrak{R}_f[0,1]$ не имеет предельных точек на $\partial\mathbb{D}\times(0,1)$.

С использованием (18) оценим $|\zeta f_r''/f_r'|$. Прибавляя и вычитая $2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2)$ из получающейся правой части, после простых преобразований получим

$$\left|\zeta\frac{f_r''(\zeta)}{f_r'(\zeta)}\right| \le \frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} + \frac{|\zeta|/r}{1-|\zeta|^2}\frac{f_\alpha''}{f_\alpha'}(r|\zeta|)(r^2 - \overline{R}_\alpha),\ \zeta \in \mathbb{D}, \tag{22}$$

причем неравенство – строгое в $\mathbb{D}\setminus\{0\}$, если f отлична от вращений функции f_α.

Пусть $\rho = \rho(\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha))$. Из (22) следует, что $\rho \ge \sqrt{\overline{R}_\alpha}$. Так как $\bar{r}_{f_\alpha} = \sqrt{\bar{R}_\alpha}$ (пример 2), то $\rho = \sqrt{\bar{R}_\alpha}$ и $E(\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha))$ содержит семейство всех вращений функции f_α.

Предположим, что в $E(\widetilde{\mathcal{S}}^*(\alpha))$ найдется функция f, не входящая в указанное семейство. Согласно установленному выше $(0,\rho)$ – единственная предельная точка слоения $\mathfrak{R}_f[0,1]$ в $\overline{\mathbb{D}} \times \{\rho\}$. По лемме 1 это означает, что $|\{f_\rho, 0\}| = 2$, то есть $3(1-\alpha)\rho^2|\gamma| = 1$, где $\varphi(\zeta) = \gamma\zeta^2 + \cdots \in \mathcal{V}$ соответствует f по формуле (12). Если теперь $1/2 \le \alpha \le 8/13$, то $\rho = 1/\sqrt{3(1-\alpha)}$ (см. (16)), значит, $|\gamma| = 1$, и по лемме 2 f есть вращение f_α. Если же $8/13 < \alpha < 1$, то $\bar{R}_\alpha < 1/(3(1-\alpha)) = \rho^2|\gamma| \le \rho^2$. В обоих случаях получается противоречие, которое и завершает доказательство. □

Заметим, что предельным случаем теоремы 3 при $\alpha = 0$ является следствие 1.

4. О классах Александера

Классом Александера порядка $\alpha \in [0,1)$ будем называть класс $\mathcal{A}(\alpha)$ всех функций $f \in H_0$ с условием $\operatorname{Re} f'(\zeta) > \alpha$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Как и выше, нас интересует выход из множества Гахова по «линиям уровня» функций из $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha) = \mathcal{A}(\alpha) \bigcap \{f \in H_0 : f''(0) = 0\}$. Определяющая биекция $\mathcal{V} \to \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ задается аналогично (12); итоговый результат – следующая

Теорема 4. *Если* $1/2 < \alpha < 1$, *то* $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha) \subset \widetilde{\mathcal{G}}_1$. *Если* $\alpha = 1/2$, *то* $\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)$ *содержится в* $\widetilde{\mathcal{G}}_1$, *исключая вращения функции* $f_s(\zeta) = (1/2)\ln((1+\zeta)/(1-\zeta))$ *с континуумом корней уравнения Гахова. Если* $0 \le \alpha < 1/2$, *то* $\rho(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha)) = 1/\sqrt{2(1-\alpha)}$, *а* $E(\widetilde{\mathcal{A}}(\alpha))$ *исчерпывается вращениями функции* $g_\alpha(\zeta) = (2\alpha-1)\zeta + (1-\alpha)f_s(\zeta)$.

Доказательство основано на оценке

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{2a(\alpha)|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad \zeta \in \mathbb{D} \setminus \{0\}, \quad f \in \widetilde{\mathcal{A}}(\alpha),$$

где $a(\alpha) = \max(1, 2(1-\alpha))$, $\alpha \in [0,1)$. Данная оценка обеспечивает принадлежность $f \in \widetilde{\mathcal{G}}_1$ при $1/2 \le \alpha < 1$ (с отмеченным исключением) и позволяет применить теорему 1 при $0 \le \alpha < 1/2$.

Summary

A.V. Kazantsev. On the Exit out of the Gakhov Set Controlled by the Subordination Conditions.

A Gakhov set $\mathcal{G}$ is the class of all holomorphic and locally univalent functions in the unit disk, which have no more than one root of the Gakhov equation. For the series of the well-known subclasses of univalent functions having the zero root of the Gakhov equation, an effective desription is given for the set of all trajectories of the exit out of $\mathcal{G}$; such an exit takes place when the parameter value corresponds to the sharp constant in the appropriate uniqueness condition of the root. It is shown that the exit out of $\mathcal{G}$ may occur due to the bifurcations of the two following types only: 1) the maximum at zero splits into two maxima and the saddle; 2) the non-zero semisaddle appears and then divides into the maximum and the saddle.

Keywords: hyperbolic derivative, conformal (inner mapping) radius, bifurcations of critical points, Gakhov set, class of starlike functions, subordination conditions.

Литература

1. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
2. *Haegi H.R.* Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen // Compositio Math. – 1950. – V. 8, F. 2. – P. 81-111.
3. *Kazantsev A. V.* On a problem of Polya and Szegö // Lobachevskii J. Math. – 2001. – V. 9. – P. 37–46.
4. *Гахов Ф.Д.* Об обратных краевых задачах // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649–652.
5. *Казанцев А.В.* Гиперболические производные с предшварцианами из пространства Блоха // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2002. – Т. 14. – С. 135–144.
6. *Казанцев А.В.* Бифуркации и новые условия единственности критических точек гиперболических производных // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 180–194.
7. *Peschl E.* Über die Werwendung von Differentialinvarianten bei gewissen Funktionenfamilien und die Übertragung einer darauf gegründeten Methode auf partielle Differentialgleichungen vom elliptischen Tipus // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. – 1963. – V. 336/6. – P. 1–22.

8. *Ruscheweyh St., Wirths K.-J.* On extreme Bloch functions with prescribed critical points // Math. Z. – 1982. – Bd. 180. – S. 91–106.

9. *Аксентьев Л.А.* Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 2. – С. 3–11.

10. *Аксентьев Л.А., Киндер М.И., Сагитова С.Б.* Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1983. – Вып. 20. – С. 22–34.

11. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киселев А.В.* О единственности решения внешней обратной краевой задачи // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 10. – С. 8–18.

12. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киндер М.И., Киселев А.В.* О классах единственности внешней обратной краевой задачи // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1990. – Вып. 24. – С. 39–62.

13. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В.* Новое свойство класса Нехари и его применение // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1990. – Вып. 25. – С. 33–51.

14. *Киндер М.И.* Исследование уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1985. – Вып. 22. – С. 104–116.

15. *Казанцев А.В.* Четыре этюда на тему Ф.Д. Гахова: учебное пособие. – Йошкар-Ола: Мар. ун-т, 2012. – 64 с.

16. *Казанцев А.В.* Множество Гахова в пространстве Хорнича при блоховских ограничениях на предшварцианы // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 65–82.

17. *Nehari Z.* The Schwarzian derivative and schlicht functions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55, No 6. – C. 545–551.

18. *Gehring F.W., Pommerenke Ch.* On the Nehari univalence criterion and quasicircles // Comment. Math. Helv. – 1984. – V. 59. – P. 226–242.

19. *Alexander J.W.* Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions // Ann. of Math. Ser. 2. – 1915. – V. 17, No 1. – P. 12–22.

20. *Казанцев А.В.* О внутреннем радиусе для бесконечных областей // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Казан. ун-т, 1992. – Вып. 27. – С. 63–67.

21. *Казанцев А.В.* Экстремальные свойства внутренних радиусов и их приложения: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1990. – 145 с.

22. *Казанцев А.В.* Бифуркации корней уравнения Гахова с левнеровской левой частью // Изв. вузов. Матем. – 1993. – № 6. – С. 69–73.

23. *Kazantsev A.V.* Parametric families of inner mapping radii // 2nd European Congr. Math., Budapest, July 22–26, 1996, Abstracts. – Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1996. – P. 30.

24. *Казанцев А.В., Попов Н.И.* О некоторых задачах, связанных с функционалами изопериметрического типа // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2002. – Т. 14. – С. 144–157.

25. *Жаркова Т.В., Казанцев А.В.* О единственности решения уравнения Гахова для функций из классов Яновского // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-матем. науки. – 2013. – № 2. – С. 108–119.

26. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.

27. *Jack I.S.* Functions starlike and convex of order α // J. London Math. Soc. Ser. 2. – 1971. – V. 3, Pt. 3. – P. 469–474.

28. *Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Попов Н.И.* О теоремах единственности для внешней обратной краевой задачи в подклассах однолистных функций// Изв. вузов. Матем. – 1998. – № 8. – С. 3–13.

29. *Жаркова Т.В., Казанцев А.В.* О методе подчиненности в проблеме единственности корня уравнения Гахова // Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2013. – Т. 46. – С. 189–190.

Поступила в редакцию
11.01.13

Казанцев Андрей Витальевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *kazandrey0363@rambler.ru*