Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, №9, с. 47–58 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

М.С. МАТВЕЙЧУК

ОПИСАНИЕ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНДЕФИНИТНЫМИ ВЕКТОРНЫМИ МЕРАМИ

Аннотация. Описана корреляционная функция, порожденная J-ортогональной индефинитной мерой со значением в пространстве Крейна.

Ключевые слова: пространство с индефинитной метрикой, проектор, J-проектор, мера.

Abstract. We describe a correlation function generated by a J-orthogonal indefinite measure, whose value belongs to the Krein space.

Keywords: space with indefinite metrics, projector, J-projector, measure.

УДК: 517.984 : 517.986

На индефинитные векторные меры распространяется основной результат работы ([1], теорема 1) о продолжении квадратичной формы, заданной на ортопроекторах гильбертова пространства и порожденной ортогональной векторной мерой, до билинейного функционала, заданного на множестве всех ограниченных операторов. Основным результатом данной работы является

Теорема. *Пусть H — бесконечномерное комплексное пространство Крейна с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]_H$, каноническим разложением $H^+[\dot{+}]H^-$, $\dim H^- = \dim H^+ = +\infty$, и канонической симметрией J. Пусть $\xi : \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ — индефинитная J-ортогональная мера, заданная на логике всех J-проекторов $\mathcal{P}$ в $B(H)$ со значением в комплексном пространстве Крейна $\mathcal{H}$ с индефинитным произведением $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$ и канонической симметрией $\mathcal{J}$.*

Тогда ξ продолжается до ограниченного линейного оператора (продолжение обозначим через $\overline{\xi}$) на $B(H)$ и индефинитная мера $\mu(P) := [\xi(P),\xi(P)]_{\mathcal{H}}$ $\forall P \in \mathcal{P}$ продолжается до $\mathcal{J}$-корреляционной функции на $B(H)$, описываемой формулой

$$[\overline{\xi}(A),\overline{\xi}(B)]_{\mathcal{H}} = \mathrm{tr}(B^\sharp AM' + AB^\sharp M'') \ \ \forall A,B \in B(H), \tag{1}$$

где M' и M'' — J-положительные ядерные операторы из $B(H)$.

Определения и вспомогательные свойства. Пусть H — комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (с. п.) $(\cdot,\cdot)$ $(= (\cdot,\cdot)_H)$. Обозначим через $B(H)$ множество всех ограниченных операторов в H. Зафиксируем унитарный самосопряженный оператор J, отличный от $\pm I$ и определим индефинитную метрику $[x,y] := (Jx,y)$ $\forall x,\ y \in H$. Пусть Q^+, Q^- — ортогональные проекторы, для которых $I = Q^+ + Q^-$ и

Поступила 15.02.2006

$J = Q^+ - Q^-$. В терминологии [2] H, наделенное $[\cdot,\cdot]$, называется *пространством Крейна* (*=J-пространством*), представление $H = H^+[\dot{+}]H^-$, где $H^+ := Q^+H$, $H^- := Q^-H$, называется *каноническим разложением*, а J — *канонической* симметрией.

Вектор z называется *положительным* (*отрицательным, нейтральным*) если $[z,z] > 0$ ($[z,z] < 0$, $[z,z] = 0$). Пусть β^+ (β^-, β^0) — множество всех положительных (отрицательных, нейтральных) векторов. Множество $\Gamma \equiv \{f \in H : [f,f]^2 = 1\}$ ($= \{f \in H : [f,f] = 1$ или $[f,f] = -1\}$) является индефинитным аналогом единичной сферы $S = \{f \in H : (f,f) = 1\}$. Непосредственно проверяется, что $[Az,y] = [z, A^\sharp y]$ $\forall z,y \in H \Leftrightarrow A^\sharp = JA^*J$, $A \in B(H)$. Оператор $A^\sharp$ называется *J-сопряженным* к A. Очевидно, $((\cdot,f)g)^* = (\cdot,g)f$, $([\cdot,f]g)^\sharp = [\cdot,g]f$ $\forall f,g \in H$.

Множество $\mathcal{P} = \{P \in B(H) : P^2 = P = P^\sharp\}$ всех J-самосопряженных (=J-ортогональных) проекторов (=J-проекторов) из $B(H)$ является индефинитным аналогом решетки $B(H)^{\mathrm{pr}}$ всех самосопряженных (=ортогональных) проекторов из $B(H)$. Иногда $\mathcal{P}$ будем обозначать еще через $\mathcal{P}(H)$. Обозначим через $\mathcal{P}^+$ ($\mathcal{P}^-$) множество всех J-проекторов $P \in \mathcal{P}$, для которых все ненулевые векторы из PH положительны (соответственно отрицательны). J-проекторы из $\mathcal{P}^+$ ($\mathcal{P}^-$) называются *положительными* (*отрицательными* соответственно). Каждый J-проектор $P \in \mathcal{P}$ представляется (не единственным образом!) в виде $P = P_+ + P_-$, где $P_+ \in \mathcal{P}^+$, $P_- \in \mathcal{P}^-$. Заметим, что $P \in \mathcal{P}^+ \Leftrightarrow PJ \geq 0$ ($P \in \mathcal{P}^- \Leftrightarrow PJ \leq 0$). J-проектор $P \in \mathcal{P}$ одномерен $\Leftrightarrow$ существует $f \in \Gamma$ такой, что $P = [f,f][\cdot,f]f$. J-проектор вида $[f,f][\cdot,f]f$, $f \in \Gamma$, будем обозначать через p_f. В частности, если $e_\pm \in H^\pm \cap S$ и числа α, β таковы, что $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, то $(\cdot, \alpha e_+ - \beta e_-)(\alpha e_+ + \beta e_-)$ — положительный J-проектор; если $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = -1$, то $-(\cdot, \alpha e_+ - \beta e_-)(\alpha e_+ + \beta e_-)$ — отрицательный J-проектор. Очевидно, p_f — ортогональный J-проектор $\Leftrightarrow f \in S \cap \Gamma$ $(= S \cap (H^+ \cup H^-))$.

Относительно стандартных отношений: *порядка* $P \leq Q \Leftrightarrow PQ = QP = P$, *ортодополнения* $P \to P^\perp := I - P$, *отношения ортогональности* $P \perp Q \Leftrightarrow PQ = 0$, множество $\mathcal{P}$ является *квантовой логикой*. Любая сумма $P = \sum P_i$, где $P_i \in \mathcal{P}$, $P_i \perp P_j$ $(i \neq j)$, называется *разбиением* P (сумма понимается в слабом смысле).

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное пространство Крейна с индефинитной метрикой $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$. Функция $\xi : \mathcal{P} \to \mathcal{H}$ называется *$\mathcal{H}$-мерой*, если $\xi(P) = \sum \xi(P_i)$ для любого разбиения $P = \sum P_i$. Сумма $\sum \xi(P_i)$ понимается в слабом смысле. Отметим, наше определение является точным аналогом $\mathcal{H}$-меры на $B(H)^{\mathrm{pr}}$. Меры на $\mathcal{P}$ допускают более богатую классификацию, чем меры на $B(H)^{\mathrm{pr}}$.

$\mathcal{H}$-мера ξ называется *J-ортогональной*, если $PQ = 0$ $(P,Q \in \mathcal{P})$ влечет $[\xi(P), \xi(Q)]_{\mathcal{H}} = 0$; *ограниченной*, если $c_\xi \equiv \sup\{\|\xi(P)\|\,\|P\|^{-1} : P \in \mathcal{P}\} < \infty$; *линейной*, если ξ продолжается до линейного оператора $\overline{\xi} : B(H) \to \mathcal{H}$; линейная $\mathcal{H}$-мера называется *индефинитной*, если для любого $A \in B(H)$ и любого положительного (отрицательного) J-проектора $P \in \mathcal{P}$ вектор $\overline{\xi}(PAP)$ ($\overline{\xi}(P^\perp AP^\perp)$) не отрицателен (не положителен соответственно); *самосопряженной*, если $\xi(P) = \xi(P^*)$ $\forall P \in \mathcal{P}$, *полуконстантой*, если существует вектор $h \in H$, для которого $\xi(P) = \dim(P_+H)h$ $\forall P \in \mathcal{P}$.

Отметим, что ненулевая полуконстанта существует тогда и только тогда, когда $\dim H^+ < +\infty$. При этом ненулевая полуконстанта — заведомо не линейная $\mathcal{H}$-мера. В работе ([3], теорема 1) показано, что всякая $\mathcal{H}$-мера единственным образом представляется в виде суммы линейной ограниченной $\mathcal{H}$-меры и полуконстанты. При этом, если $\dim H^+ = \dim H^- = +\infty$, то всякая $\mathcal{H}$-мера линейна и ограничена. Линейное продолжение на $B(H)$ линейной $\mathcal{H}$-меры ξ обозначим через $\overline{\xi}$. Заметим еще, что сужение $\overline{\xi}$ на $B(H)^{\mathrm{pr}}$ является

$\mathcal{H}$-мерой на ортопроекторах. По теореме Орлича [1] сумма $\sum\limits_i \overline{\xi}(E_i)$ сильно сходится к $\overline{\xi}(E)$ для любого разбиения $E = \sum\limits_i E_i$, где $E, E_i \in B(H)^{\mathrm{pr}} \quad \forall i$.

Функция $\mu : \mathcal{P} \to R$ $(\to C)$ называется вещественной (комплексной) *мерой*, если $\mu(P) = \sum \mu(P_i)$ для любого разбиения $P = \sum P_i$.

Здесь сходимость несчетного семейства слагаемых означает, что существует не более счетного числа ненулевых слагаемых в семействе и ряд ненулевых слагаемых сходится абсолютно.

Числовую меру μ назовем *индефинитной*, если $\mu|\mathcal{P}^+ \geq 0$, $\mu|\mathcal{P}^- \leq 0$.

Отметим, если ξ — J-ортогональная индефинитная $\mathcal{H}$-мера, то

$$\mu(P) := [\xi(P), \xi(P)] = [\xi(P), \xi(I)] \quad \forall P \in \mathcal{P}$$

— вещественная индефинитная мера. Всюду ниже будем считать, что последнее равенство определяет самосопряженную линейную индефинитную меру μ. По теореме [4] существует J-неотрицательный (т. е. $MJ \geq 0$) и одновременно самосопряженный ядерный оператор M, для которого $\mu(P) = \operatorname{tr}(PM)$, $P \in \mathcal{P}$. Такой оператор имеет вид $M = M^+ - M^-$, где $M^+ \geq 0$, $M^- \geq 0$ и $M^+Q^+ = Q^+M^+Q^+$, $M^-Q^- = Q^-M^-Q^-$.

Пусть $\{e_a\}_{a\in\mathcal{I}}$ — ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов M. Это означает $\{e_a\}_{a\in\mathcal{I}} \subset H^+ \cup H^-$ и $e_a \in H^+$ влечет $Me_a = \lambda_a e_a$, где $\lambda_a \geq 0$ ($e_a \in H^-$ влечет $Me_a = \lambda_a e_a$, где $\lambda_a \leq 0$). Определим множества $\mathcal{I}^+ := \{a \in \mathcal{I} : e_a \in H^+\}$ ($\mathcal{I}^- := \{a \in \mathcal{I} : e_a \in H^-\}$). Ниже для большей ясности индексы базисных векторов из H^+ (H^-) снабдим знаком плюс (соответственно минус), например, $e_{a^+} \in H^+$, $e_{c^-} \in H^-$. Определим числа (функцию знака) $\gamma(a^+) := 1$, $\gamma(c^-) := -1$ для любых a^+, c^- и $\beta_{ab} := \gamma_a\gamma_b$. Далее будет использоваться оператор (частичная изометрия) $E_{ab}e_c := (\cdot, e_a)e_b \quad \forall a, b, c \in \mathcal{I}$. Всюду ниже δ_{ab} — символ Кронекера.

Из J-ортогональности меры ξ следует, что для любых коммутирующих J-проекторов $P, Q \in \mathcal{P}$

$$[\xi(P), \xi(Q)] = \mu(QP) = \operatorname{tr}(QPM) = \operatorname{tr}(JQ^*JPM) = \sum_a \lambda_a (Pe_a, JQJe_a) =$$
$$= \sum_{ab} \lambda_a (Pe_a, e_b)\overline{(JQJe_a, e_b)} = \sum_{abcd} \lambda_a \delta_{ac}\delta_{bd}(Pe_a, e_b)\overline{(JQJe_c, e_d)}. \quad (2)$$

Доказательство теоремы 1 можно получить двумя способами: привлекая недавние результаты Илинена [5] или модифицируя идею конструктивного, использующего элементарные соображения, но более длинного доказательства соответствующей теоремы из [1]. Мы предлагаем аналог второго способа.

Одно из отличий данной работы от работы [1] состоит в следующем. В своих построениях ортопроекторов P, Q авторы [1] могли исходить из любого ортонормированного базиса $\{e_p\} \subset H$. В индефинитном случае эффективно строить J-проекторы можно лишь исходя из ортонормированного базиса $\{e_p\} \subset H^+ \cup H^-$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Предложение. $\overline{\xi}(E_{a_nb_n}) \to 0$ *в сильной топологии для любой последовательности индексов* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $n \to +\infty$.

Доказательство сводится к случаям, когда обе последовательности индексов принадлежат множеству одного или разных знаков. Если обе последовательности индексов принадлежат множествам одного знака ($\mathcal{I}^+$ или $\mathcal{I}^-$), то предложение сводится к знакопостоянному (=дефинитному) случаю и следует из [1]. Рассмотрим, например, случай, когда

$\{a_n\} \subset \mathcal{I}^+$, а $\{b_n\} \subset \mathcal{I}^-$. Тогда $(\cdot, e_{a_n})e_{b_n}$ есть сумма четырех ортопроекторов, не превосходящих $(\cdot, e_{a_n})e_{a_n} + (\cdot, e_{b_n})e_{b_n}$. Для разных n эти ортопроекторы попарно ортогональны. Вспоминая, что сужение $\overline{\xi}$ на $B(H)^{\mathrm{pr}}$ является $\mathcal{H}$-мерой, и применяя теорему Орлича, получаем предложение. $\square$

Пусть m — конечное подмножество $\mathcal{I}$ и пусть H_m — гильбертово пространство, натянутое на базис $\{e_a\}_{a\in m}$.

Лемма 1. *Существует матрица $(U_{abcd})_{abcd\in\mathcal{I}}$ такая, что для любого конечного $m \subset \mathcal{I}$ и любых проекторов $P, Q \in \mathcal{P}(H_m)$*

$$[\xi(P), \xi(Q)] = \sum_{abcd\in m} U_{abcd}(Pe_a, e_b)\overline{(JQJe_c, e_d)} \tag{3}$$

и

$$\beta_{cd}U_{abcd} = \beta_{ab}\overline{U}_{cdab} \quad \forall a, b, c, d \in m. \tag{4}$$

Доказательство полностью следует доказательству аналогичной леммы из [1] (лемма 2). Функция $(A, B) \to [\overline{\xi}(A), \overline{\xi}(B)]$, $A, B \in B(H)$, линейна относительно A и антилинейна относительно B. По хорошо известным свойствам билинейных отображений для фиксированного конечного подмножества $m \subset \mathcal{I}$ существует матрица $(\widehat{U}^m_{abcd})$, $a, b, c, d \in m$, такая, что

$$[\overline{\xi}(A), \overline{\xi}(B)] = \sum_{abcd\in m} \widehat{U}^m_{abcd}(Ae_a, e_b)\overline{(Be_c, e_d)} = \sum_{abcd\in m} \beta_{cd}\widehat{U}_{abcd}(Ae_a, e_b)\overline{(JBJe_c, e_d)}.$$

Тогда

$$\widehat{U}^m_{abcd} = \sum_{pqrs\in m} \widehat{U}^m_{pqrs}(E_{ab}e_p, e_q)\overline{(E_{cd}e_r, e_s)} = [\overline{\xi}(E_{ab}), \overline{\xi}(E_{cd})] =$$

$$= \overline{[\overline{\xi}(E_{cd}), \overline{\xi}(E_{ab})]} = \overline{\sum_{pqrs=1}^{m} \widehat{U}_{pqrs}(E_{cd}e_p, e_q)\overline{(E_{ab}e_r, e_s)}} = \overline{\widehat{U}^m_{cdab}} = \widehat{U}^{m'}_{abcd}, \tag{5}$$

если $m \subseteq m'$. Из равенства (5) следует, что коэффициенты $\widehat{U}^m_{abcd}$ не зависят от подмножества m и можно положить $\widehat{U}_{abcd} := \widehat{U}^m_{abcd}$. Таким образом, (3) выполнено, если положить $U_{pqrs} := \beta_{rs}\widehat{U}_{pqrs}$. В силу (5) $\beta_{cd}U_{abcd} = \widehat{U}_{abcd} = \overline{\widehat{U}_{cdab}} = \beta_{ab}\overline{U_{cdab}}$ $\forall a, b, c, d \in m$, $m \subseteq m'$. Это означает выполнение (4). $\square$

Замечание. В равенстве (5) попутно установили, что

$$[\overline{\xi}(E_{ab}), \overline{\xi}(E_{cd})] = \widehat{U}_{abcd} = \beta_{cd}U_{abcd}.$$

Позволяет вычислить коэффициенты U_{pqrs}

Лемма 2. *Пусть комплексное гильбертово пространство H_m и матрица U_{abcd} — из леммы 1. Тогда*

$$U_{abcd} = 0, \quad \textit{если} \quad a \neq c \quad \textit{и} \quad b \neq d, \tag{6}$$

$$U_{atbt} = \beta_{ab}\overline{U_{btat}} = -U_{tbta} = -\beta_{ab}\overline{U}_{tatb} = \mu_{ab}, \tag{7}$$

если $a \neq b$ и $t \in m$, (т. е. U_{atbt} не зависит от t) и

$$U_{abab} - \lambda_a = -(U_{baba} - \lambda_b) \quad (\textit{в частности,} \quad U_{aaaa} = \lambda_a), \tag{8}$$

$$(U_{abab} - \lambda_a) + (U_{bcbc} - \lambda_b) + (U_{caca} - \lambda_c) = 0 \tag{9}$$

для любых $a, b, c \in m$.

В базисе $\{e_{a\in\mathcal{I}}\}$ симметрии соответствует матрица $(\gamma(a)\delta_{ab})_{ab\in\mathcal{J}}$. При $\mu_{aa} = 0 \quad \forall a$ из (7) вытекает

Следствие 1. $\overline{\mu}_{ab} = \beta_{ba}\mu_{ba} \quad \forall a, b \in \mathcal{I}$ (т. е. $\overline{\mu}_{a^+c^-} = -\mu_{c^-b^+}$ и матрица (μ_{ab}), $a, b \in \mathcal{I}$, является J-самосопряженной, т. е. произведение $(\gamma(a)\delta_{ab})(\mu_{ab})$ есть самосопряженная матрица.)

В самом деле, $\overline{\mu}_{ab} = \overline{U}_{atbt} = \beta_{ab}U_{btat} = \beta_{ba}\mu_{ba}$. □

Доказательство леммы 2 следует идее доказательства соответствующей леммы 1 работы [1]. Идея такова. Составить конкретные коммутирующие одно- и двумерные J-проекторы $P, Q \in \mathcal{P}$. Затем подставить их в правые части формул (2), (3) и путем приравнивания этих частей сделать выводы о значениях коэффициентов U_{abcd}.

Доказательство достаточно длинное. Рассматривается семь вариантов коммутирующих P, Q. Если индексы a, b, c, d принадлежат множеству одного знака ($\mathcal{I}^+$ или $\mathcal{I}^-$), то лемма сводится к дефинитному случаю и фактически доказана леммой 1 [1]. Таким образом, интересен только случай, когда в равенствах (6)–(9) встречаются индексы разного знака.

1) Пусть $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$. Положим $P := (\cdot, \alpha e_{a^+}+\beta e_{b^+})(\alpha e_{a^+}+\beta e_{b^+})$ и $Q := (\cdot, e_{c^-})e_{c^-}$. Тогда $PQ = 0$. Подставим данные P, Q в формулу (3). В силу J-ортогональности меры ξ левая часть (3) равна нулю. Правая часть равна $U_{a^+a^+c^-c^-}|\alpha|^2 + U_{a^+b^+c^-c^-}\overline{\alpha}\beta + U_{b^+a^+c^-c^-}\alpha\overline{\beta} + U_{b^+b^+c^-c^-}|\beta|^2$, Следовательно имеем равенство

$$U_{a^+a^+c^-c^-}|\alpha|^2 + U_{a^+b^+c^-c^-}\overline{\alpha}\beta + U_{b^+a^+c^-c^-}\alpha\overline{\beta} + U_{b^+b^+c^-c^-}|\beta|^2 = 0.$$

Получили однородный относительно коэффициентов α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ многочлен. Условие $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ можно заменить условием $|\alpha|^2 + |\beta|^2 > 0$. Коэффициенты при различных произведениях переменных α, $\overline{\alpha}$, β, $\overline{\beta}$ должны исчезать. Таким образом, получаем равенства

$$U_{a^+a^+c^-c^-} = U_{a^+b^+c^-c^-} = U_{b^+a^+c^-c^-} = U_{b^+b^+c^-c^-} = 0. \tag{10}$$

В силу симметрии (см. (4))

$$U_{--a^+a^+} = U_{c^-c^-a^+b^+} = U_{c^-c^-b^+a^+} = U_{c^-c^-b^+b^+} = 0. \tag{11}$$

2) Пусть $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Положим $P := (\cdot, \alpha e_{a^+} - \beta e_{c^-})(\alpha e_{a^+} + \beta e_{c^-})$ и $Q := P$. Подставим P, Q в формулы (2), (3). Получим

$$\begin{aligned}
\lambda_{a^+}(|\alpha|^4 - |\alpha^2|\beta|^2) + \lambda_{c^-}(|\beta|^4 - |\alpha^2|\beta|^2) = [\xi(P), \xi(P)]_{\mathcal{H}} =\\
= U_{a^+a^+a^+a^+}|\alpha|^4 + U_{a^+a^+a^+c^-}|\alpha|^2(-\alpha\overline{\beta}) + U_{a^+a^+c^-a^+}|\alpha|^2\beta\overline{\alpha} +\\
+ U_{a^+a^+c^-c^-}(-|\alpha|^2|\beta|^2) + U_{a^+c^-a^+a^+}\overline{\alpha}\beta|\alpha|^2 + U_{a^+c^-a^+c^-}\overline{\alpha}\beta(-\alpha\overline{\beta}) +\\
+ U_{a^+c^-c^-a^+}\overline{\alpha}\beta\beta\overline{\alpha} + U_{a^+c^-c^-c^-}\overline{\alpha}\beta(-|\beta|^2) + U_{c^-a^+a^+a^+}(-\overline{\beta}\alpha)|\alpha|^2 +\\
+ U_{c^-a^+a^+c^-}(-\overline{\beta}\alpha)(-\alpha\overline{\beta}) + U_{c^-a^+c^-a^+}(-\overline{\beta}\alpha)(\beta\overline{\alpha}) + U_{c^-a^+c^-c^-}(\overline{\beta}\alpha)|\beta|^2 +\\
+ U_{c^-c^-a^+a^+}(-|\beta|^2)|\alpha|^2 + U_{c^-c^-a^+c^-}(-|\beta|^2)(-\alpha\overline{\beta}) +\\
+ U_{c^-c^-c^-a^+}(-|\beta|^2)\beta\overline{\alpha} + U_{c^-c^-c^-c^-}|\beta|^4.
\end{aligned}$$

Можно считать, что $|\alpha| \neq |\beta|$. Приравняем коэффициенты при одинаковых сомножителях $|\alpha|^4$, $|\beta|^4$, $|\alpha|^2|\beta|^2$. Получим

$$\begin{gathered}
\lambda_{a^+} = U_{a^+a^+a^+a^+}, \quad \lambda_{c^-} = U_{c^-c^-c^-c^-}, \\
\lambda_{a^+} + \lambda_{c^-} = U_{a^+a^+c^-c^-} + U_{a^+c^-a^+c^-} + U_{c^-a^+c^-a^+} + U_{c^-c^-a^+a^+}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Учитывая (10), (11), получаем $\lambda_{a^+} + \lambda_{c^-} = U_{a^+c^-a^+c^-} + U_{c^-a^+c^-a^+}$.

Следствие 2. Справедливо равенство (8).

Приравняем коэффициенты при $\alpha^2\overline{\beta}^2$, $\overline{\alpha}^2\beta^2$, $\overline{\beta}\alpha|\alpha|^2$, $\beta\overline{\alpha}|\alpha|^2$, $\overline{\beta}\alpha|\beta|^2$. Получим

$$U_{c^-a^+a^+c^-} = 0, \qquad U_{a^+c^-c^-a^+} = 0, \tag{13}$$
$$U_{a^+a^+a^+c^-} + U_{c^-a^+a^+a^+} = 0, \quad U_{a^+a^+c^-a^+} + U_{a^+c^-a^+a^+} = 0,$$
$$U_{c^-a^+c^-c^-} + U_{c^-c^-a^+c^-} = 0, \quad U_{a^+c^-c^-c^-} + U_{c^-c^-c^-a^+} = 0. \tag{14}$$

В силу (10), (11) и (13) получаем

Следствие 3. Справедливо (6), когда $b, d \in \{a, c\}$.

3) Пусть J-проектор P из 2) и $Q := -(\cdot, \overline{\beta}e_{a^+} - \overline{\alpha}e_{c^-})(\overline{\beta}e_{a^+} + \overline{\alpha}e_{c^-})$. Непосредственно проверяется, что $Q \in \mathcal{P}^-$ и $PQ = 0$. Подставим их в (2), (3). Приравняем к нулю коэффициент при $\overline{\alpha}\beta|\alpha|^2$. Получим $U_{a^+c^-c^-c^-} - U_{a^+a^+c^-a^+} = 0$. Используя (14), имеем

$$-U_{a^+c^-a^+a^+} = U_{a^+a^+c^-a^+} = U_{a^+c^-c^-c^-} = -U_{c^-c^-c^-a^+}. \tag{15}$$

Применяя (4), имеем

$$\overline{U}_{a^+a^+a^+c^-} = -\overline{U}_{c^-a^+a^+a^+} = -\overline{U}_{c^-c^-c^-a^+} = \overline{U}_{c^-a^+c^-c^-}. \tag{16}$$

Следствие 4. Равенство (7) выполнено, если индексы a, b имеют разный знак и $t \in \{a, b\}$.

4) Пусть теперь $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$,

$$P := (\cdot, \alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+})(\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}) + (\cdot, e_{c^-})e_{c^-}$$

и

$$Q := (\cdot, \delta(\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}) - \gamma e_{c^-})(\delta(\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}) + \gamma e_{c^-}),$$

где $|\delta|^2 - |\gamma|^2 = 1$. Тогда $P, Q \in \mathcal{P}$ и $PQ = QP = Q$. Подставим J-проекторы P, Q в правую часть формул (2), (3) и приравняем полученные значения. Многочлен, полученный из (3) слишком велик (он имеет 45 слагаемых). Поэтому выпишем только слагаемые, имеющие сомножители вида $\overline{\delta}\gamma$. Эти сомножители появляются только в выражениях, имеющих сомножители $\overline{(JQJe_{c^-}, e_{a^+})} = \gamma\overline{\delta\alpha}$ и $\overline{(JQJe_{c^-}, e_{b^+})} = \gamma\overline{\delta\beta}$. Поскольку $(Pe_{c^-}, e_{a^+}) = 0$, $(Pe_{c^-}, e_{b^+}) = 0$, то подстановка P, Q в правую часть (2) дает нулевой коэффициент при $\overline{\delta}\gamma$. Итак, получим

$$\begin{aligned}0 = U_{a^+a^+c^-a^+}|\alpha|^2\overline{\alpha} + U_{a^+a^+c^-b^+}|\alpha|^2\overline{\beta} + U_{a^+b^+c^-a^+}\overline{\alpha}\beta\overline{\alpha} +&\\ + U_{a^+b^+c^-b^+}\overline{\alpha}\beta\overline{\beta} + U_{b^+b^+c^-a^+}|\beta|^2\overline{\alpha} + U_{b^+b^+c^-b^+}|\beta|^2\overline{\beta} +&\\ + U_{b^+a^+c^-a^+}\overline{\beta}\alpha\overline{\alpha} + U_{b^+a^+c^-b^+}\overline{\beta}\alpha\overline{\beta} +&\\ + U_{c^-c^-c^-a^+}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\overline{\alpha} + U_{c^-c^-c^-b^+}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\overline{\beta}.&\end{aligned}$$

Коэффициенты при $|\alpha|^2\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}^2\beta$, $\alpha\overline{\beta}^2$ равны нулю. Поэтому имеем

$$U_{a^+a^+c^-b^+} + U_{b^+a^+c^-a^+} + U_{c^-c^-c^-b^+} = 0, \tag{17}$$
$$U_{a^+b^+c^-a^+} = U_{b^+a^+c^-b^+} = 0. \tag{18}$$

Аналогично выпишем коэффициент при $(-\delta\overline{\gamma})$. Он появляется в выражениях, имеющих сомножители $\overline{(JQJe_{a^+}, e_{c^-})} = -\delta\overline{\gamma}\alpha$ и $\overline{(JQJe_{b^+}, e_{c^-})} = -\delta\overline{\gamma}\beta$. Имеем

$$0 = U_{a^+a^+a^+c^-}|\alpha|^2\alpha + U_{a^+a^+b^+c^-}|\alpha|^2\beta + U_{b^+a^+a^+c^-}\overline{\beta}\alpha\alpha+ \\ + U_{b^+a^+b^+c^-}\overline{\beta}\alpha\beta + U_{a^+b^+a^+c^-}\overline{\alpha}\beta\alpha + U_{a^+b^+b^+c^-}\overline{\alpha}\beta\beta+ \\ + U_{b^+b^+a^+c^-}|\beta|^2\alpha + U_{b^+b^+b^+c^-}|\beta|^2\beta+ \\ + U_{c^-c^-a^+c^-}(|\alpha|^2+|\beta|^2)\alpha + U_{c^-c^-b^+c^-}(|\alpha|^2+|\beta|^2)\beta.$$

Коэффициенты при $\alpha^2\overline{\beta}$, $|\alpha|^2\beta$ равны нулю. Поэтому

$$U_{b^+a^+a^+c^-} = 0, \tag{19}$$

$$U_{a^+a^+b^+c^-} + U_{a^+b^+a^+c^-} + U_{c^-c^-b^+c^-} = 0. \tag{20}$$

5) Пусть $|\delta|^2 - |\gamma|^2 = 1$ и $P := (\cdot, e_{a^+})e_{a^+}$, $Q := (\cdot, \delta e_{b^+} - \gamma e_{c^-})(\delta e_{b^+} + \gamma e_{c^-}) \in \mathcal{P}^+$. Тогда $PQ = 0$. Подстановка в (2), (3) дает

$$U_{a^+a^+b^+b^+}|\delta|^2 + U_{a^+a^+b^+c^-}(-\delta\overline{\gamma}) + U_{a^+a^+c^-b^+}(\gamma\overline{\delta}) + U_{a^+a^+c^-c^-}(-|\gamma|^2) = 0.$$

Таким образом,

$$U_{a^+a^+b^+c^-} = U_{a^+a^+c^-b^+} = 0. \tag{21}$$

6) Пусть $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, $|\delta|^2 - |\gamma|^2 = 1$ и

$$P := (\cdot, \delta(\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}) - \gamma e_{c^-})(\delta(\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}) + \gamma e_{c^-}),$$
$$Q := (\cdot, \delta'(\alpha' e_{a^+} + \beta' e_{b^+}) - \gamma' e_{c^-})(\delta'(\alpha' e_{a^+} + \beta' e_{b^+}) + \gamma' e_{c^-}),$$

где $|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 = 1$, $|\delta'|^2 - |\gamma'|^2 = 1$. Условие $PQ = 0$ перепишется следующим образом:

$$0 = (\delta'(\alpha' e_{a^+} + \beta' e_{b^+}) + \gamma' e_{c^-}, \delta(\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}) - \gamma e_{c^-}) = \delta'\alpha'\overline{\delta\alpha} + \delta'\beta'\overline{\delta\beta} - \gamma'\overline{\gamma},$$

т. е. $\gamma'\overline{\gamma} = \delta'\overline{\delta}(\overline{\alpha}\alpha' + \overline{\beta}\beta')$.

Равенство $\alpha'\overline{\alpha} + \beta'\overline{\beta} = 0$ означает ортогональность векторов $\alpha e_{a^+} + \beta e_{b^+}$ и $\alpha' e_{a^+} + \beta' e_{b^+}$. Будем считать, что $\overline{\alpha}\alpha' + \overline{\beta}\beta' \neq 0$. Подстановка P, Q в (2), (3) дает многочлен, в котором можно считать $|\alpha|^2 + |\beta|^2 > 0$, $|\alpha'|^2 + |\beta'|^2 > 0$, $|\delta| \neq |\gamma|$, $|\delta'| \neq |\gamma'|$. Выпишем коэффициент при $\overline{\delta\delta'}\gamma\gamma'$

$$0 = U_{a^+c^-c^-a^+}\overline{\alpha\alpha'} + U_{a^+c^-c^-b^+}\overline{\alpha\beta'} + U_{b^+c^-c^-a^+}\overline{\beta\alpha'} + U_{b^+c^-c^-b^+}\overline{\beta\beta'}.$$

Следовательно,

$$U_{a^+c^-c^-b^+} = U_{b^+c^-c^-a^+} = 0. \tag{22}$$

Согласно (4)

$$U_{c^-b^+a^+c^-} = U_{c^-a^+b^+c^-} = 0. \tag{23}$$

Учитывая (10), (11), (22) и (23), имеем

$$U_{b^+a^+c^-c^-} = U_{c^-c^-b^+a^+} = U_{b^+a^+c^-c^-} = U_{a^+b^+c^-c^-} = 0.$$

Следствие 5. Выполнено (6), когда в четверке индексов $\{a, b, c, d\}$ три различных индекса $(=a^+, b^+, c^-)$ и индекс с отрицательным знаком $(=c^-)$ встречаются дважды.

Применяя (4) к равенствам (21), (19) и к первому из равенств (18), получаем

$$U_{b^+c^-a^+a^+} = U_{c^-b^+a^+a^+} = U_{a^+c^-b^+a^+} = U_{c^-a^+a^+b^+} = 0.$$

Следствие 6. Выполнено (6), когда в четверке чисел $\{a, b, c, d\}$ три различных индекса. При этом три индекса — с одним знаком (+ или −) и один — с противоположным знаком.

7) Пусть $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, $|\alpha'|^2+|\beta'|^2=1$, $|\delta|^2-|\gamma|^2=\pm1$ и

$$Q:=(\cdot,\delta(\alpha e_{a^+}+\beta e_{b^+})-\gamma e_{c^-})(\delta(\alpha e_{a^+}+\beta e_{b^+})+\gamma e_{c^-}).$$

Определим оператор $P=(\cdot,\delta'(\alpha' e_{a^+}+\beta' e_{b^+})-\gamma'(\overline{\alpha}\alpha'+\overline{\beta}\beta')e_{c^-})(\delta'(\alpha' e_{a^+}+\beta' e_{b^+})+\gamma'(\overline{\alpha}\alpha'+\overline{\beta}\beta')e_{c^-})$. Для того чтобы $\pm P\in\mathcal{P}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|\delta'|^2-|\gamma'|^2|\overline{\alpha}\alpha'+\overline{\beta}\beta'|^2\neq\pm1.$$

При этом $(\pm P)Q=0$ тогда и только тогда, когда

$$0=(\delta(\alpha e_{a^+}+\beta e_{b^+})+\gamma e_{c^-},\delta'(\alpha' e_{a^+}+\beta' e_{b^+})-\gamma'(\overline{\alpha}\alpha'+\overline{\beta}\beta')e_{c^-})=$$
$$=(\delta\overline{\delta'}-\gamma\overline{\gamma'})(\alpha\overline{\alpha'}+\beta\overline{\beta'}).\quad(24)$$

Пусть $\alpha\overline{\alpha'}+\beta\overline{\beta'}\neq0$. Тогда в силу (24)

$$\delta\overline{\delta'}=\gamma\overline{\gamma'}.\quad(25)$$

Подставим теперь P, Q с условием (25) в (2), (3). Выпишем сначала коэффициенты при $\overline{\alpha'}\beta'\overline{\beta}\alpha$. Получим

$$0=U_{a^+b^+a^+b^+}|\delta'|^2|\delta|^2+U_{a^+c^-a^+c^-}\overline{\delta'}\gamma'(-\delta\overline{\gamma})+U_{c^-b^+c^-b^+}(-\overline{\gamma'}\delta'\gamma\overline{\delta})+U_{c^-c^-c^-c^-}|\gamma'|^2|\gamma|^2.$$

Учитывая равенство (25), последнее выражение можно переписать в виде

$$0=|\delta'|^2|\delta|^2(U_{a^+b^+a^+b^+}-U_{a^+c^-a^+c^-}-U_{c^-b^+c^-b^+}+U_{c^-c^-c^-c^-}).$$

Итак, с учетом (12) имеем $U_{a^+b^+a^+b^+}-U_{a^+c^-a^+c^-}-U_{c^-b^+c^-b^+}+\lambda_{c^-}=0$ или $U_{c^-b^+c^-b^+}-\lambda_{c^-}=U_{a^+b^+a^+b^+}-U_{a^+c^-a^+c^-}$. Используем доказанное в п. 2) равенство (8). Получим

$$(U_{a^+b^+a^+b^+}-\lambda_{a^+})-(U_{a^+c^-a^+c^-}-\lambda_{a^+})=(U_{c^-b^+c^-b^+}-\lambda_{c^-})=-(U_{b^+c^-b^+c^-}-\lambda_{b^+}).$$

Следствие 7. Справедлива формула (9).

Продолжим вычисления далее. Выпишем вначале коэффициент при $|\delta'|^2|\delta|^2|\alpha'|^2$. Затем у этого коэффициента выпишем коэффициент при $\overline{\alpha}\beta$. Получим $U_{a^+a^+b^+a^+}-U_{a^+c^-b^+c^-}$. Приравняем его к нулю. Учтем, что равенство (7) доказано в [1], когда у индексов a, b, t одинаковые знаки. Получим

$$U_{a^+r^+b^+r^+}=U_{a^+a^+b^+a^+}=U_{a^+c^-b^+c^-}.\quad(26)$$

Следствие 8. Равенство (7) справедливо, когда индексы a, b имеют одинаковые знаки.

Подставим вторую часть равенства (21) в (17). Получим

$$U_{b^+a^+c^-a^+}=-U_{c^-c^-c^-b^+}.$$

Следовательно, используя (15), имеем

$$U_{b^+a^+c^-a^+}=-U_{c^-c^-c^-b^+}=U_{b^+c^-c^-c^-}=U_{b^+b^+c^-b^+}.$$

Поэтому, используя (4), получаем

$$-U_{c^-a^+b^+a^+}=U_{c^-b^+c^-c^-}=-U_{c^-c^-b^+c^-}=-U_{c^-b^+b^+b^+}.$$

Следствие 9. Выполнено (7), когда индекс t имеет знак $+$ или $-$, а в паре $\{a,b\}$ находятся индексы разного знака в любом порядке.

Воспользуемся следствием 9 и (15) (или (16)). Получим

$$U_{c^-r^+a^+r^+}=U_{c^-a^+a^+a^+}=U_{c^-c^-a^+c^-}=U_{c^-d^-a^+d^-}.$$

Следствие 10. Равенство (7) выполнено, когда в паре $\{a,b\}$ индексы разного знака.

Вместе со следствием 8 получаем

Следствие 11. Справедливо равенство (7).

Завершим доказательство (6). По следствиям 3, 5, 6 осталось рассмотреть случай, когда все индексы a, b, c, d различны. В этом случае

1) если индексы a, b имеют одинаковый знак ($a, b \in \mathcal{I}^+$ или $a, b \in \mathcal{I}^-$), то положим $P = (\cdot, \alpha e_a + \beta e_b)(\alpha e_a + \beta e_b)$, где $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$;

2) если a, b имеют разные знаки, то положим $f := \alpha e_a + \beta e_b$, где $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = \pm 1$ и $P = [f, f][\cdot, f]f$.

По аналогии для индексов c, d построим J-проектор Q. Только вместо α, β будем использовать числа α', β'. В силу попарной ортогональности векторов e_a, e_b, e_c, e_d будем иметь $PQ = 0$. Подстановка P, Q в левую часть (3) дает нуль, а в правую часть — однородный многочлен четвертого порядка. При этом только у четырех (напр., у $U_{abcd}\overline{\alpha}\beta\alpha'\overline{\beta'}$) из шестнадцати слагаемых все индексы у коэффициента U будут различными. Множитель $\overline{\alpha}\beta\alpha'\overline{\beta'}$ во всей сумме будет встречаться только один раз. Отсюда заключаем, что $U_{abcd} = 0$. $\square$

Воспользуемся теперь индефинитностью $\mathcal{H}$-меры ξ. Определим числа

$$\alpha_{b^+} := \inf_{a^+ \in \mathcal{I}^+} \{U_{a^+b^+a^+b^+}\} \quad (= \inf_{a^+ \in \mathcal{I}^+} \{[\overline{\xi}(E_{a^+b^+}), \overline{\xi}(E_{a^+b^+})] :\} \geq 0),$$
$$\alpha_{r^-} := \sup_{c^- \in \mathcal{I}^-} \{U_{c^-r^-c^-r^-}\} \quad (= \sup_{c^- \in \mathcal{I}^-} \{[\overline{\xi}(E_{c^-r^-}), \overline{\xi}(E_{c^-r^-})]\} \leq 0),$$

и $\beta_a := \lambda_a - \alpha_a \quad \forall a \in \mathcal{I}$.

Лемма 3. $U_{abab} = \beta_a + \alpha_b \quad \forall a, b \in \mathcal{I}$.

Доказательство. Определение чисел α_a существенно отличается от определения, данного в [1]. Поэтому лемма должна быть доказана и в случае одинакового знака индексов $a, b \in \mathcal{I}$.

По (8) и (9)

$$U_{a^+b^+a^+b^+} - \lambda_{a^+} = (U_{c^+b^+c^+b^+} - \lambda_{c^+}) - (U_{c^+a^+c^+a^+} - \lambda_{c^+}) = U_{c^+b^+c^+b^+} - U_{c^+a^+c^+a^+}. \quad (27)$$

Видим, что правая часть (27) не зависит от c^+. Таким образом, можем записать

$$U_{a^+b^+a^+b^+} - \lambda_{a^+} = \inf_{c^+ \in \mathcal{I}^+} \{U_{c^+b^+c^+b^+} - U_{c^+a^+c^+a^+}\} =$$
$$= \inf_{c^+ \in \mathcal{I}^+} \{U_{c^+b^+c^+b^+}\} - \inf_{c^+ \in \mathcal{I}^+} \{U_{c^+a^+c^+a^+}\} = \alpha_{b^+} - \alpha_{a^+}.$$

В силу (27) имеем

$$\alpha_{b^+} \leq U_{a^+b^+a^+b^+} = \lambda_{a^+} + \alpha_{b^+} - \alpha_{a^+} = \beta_{a^+} + \alpha_{a^+} + \alpha_{b^+} - \alpha_{a^+} = \beta_{a^+} + \alpha_{b^+}.$$

Таким образом,

$$\lambda_{a^+} \geq \lambda_{a^+} - \alpha_{a^+} = \beta_{a^+} \geq 0, \quad 0 \leq \alpha_{a^+} \leq \lambda_{a^+}, \quad U_{a^+b^+a^+b^+} = \beta_{a^+} + \alpha_{b^+}. \quad (28)$$

Аналогично (28) для индексов со знаком минус имеем

$$\lambda_{c^-} \leq \beta_{c^-} \leq 0, \quad \lambda_{c^-} \leq \alpha_{c^-} \leq 0, \quad U_{c^-r^-c^-r^-} = \beta_{c^-} + \alpha_{r^-}. \quad (29)$$

Убедимся теперь, что $U_{a^+c^-a^+c^-} = \beta_{a^+} + \alpha_{c^-}$ и $U_{c^-a^+c^-a^+} = \beta_{c^-} + \alpha_{a^+}$.

а) По аналогии с (27)

$$U_{a^+b^+a^+b^+} - \lambda_{a^+} = (U_{c^-b^+c^-b^+} - \lambda_{c^-}) - (U_{c^-a^+c^-a^+} - \lambda_{c^-}) = U_{c^-b^+c^-b^+} - U_{c^-a^+c^-a^+}.$$

Воспользуемся (28) и предыдущим равенством. Получим

$$\alpha_{b^+} - \alpha_{a^+} = \beta_{a^+} + \alpha_{b^+} - (\beta_{a^+} + \alpha_{a^+}) = U_{c^-b^+c^-b^+} - U_{c^-a^+c^-a^+}.$$

Таким образом, $U_{c^-b^+c^-b^+} = \alpha_{b^+} + (U_{c^-a^+c^-a^+} - \alpha_{a^+})$. Кроме того, видим, что разность $U_{c^-a^+c^-a^+} - \alpha_{a^+}$ не зависит от индексов a^+. Положим $\overline{\beta}_{c^-} := U_{c^-a^+c^-a^+} - \alpha_{a^+}$. Имеем

$$U_{c^-b^+c^-b^+} = \overline{\beta}_{c^-} + \alpha_{b^+}. \tag{30}$$

Согласно (8)

$$U_{c^-b^+c^-b^+} - \lambda_{c^-} = -(U_{b^+c^-b^+c^-} - \lambda_{b^+}).$$

Следовательно,

$$U_{c^-b^+c^-b^+} + U_{b^+c^-b^+c^-} = \lambda_{b^+} + \lambda_{c^-}. \tag{31}$$

б) По аналогии с а) $U_{b^+r^-b^+r^-} - U_{b^+c^-b^+c^-} = \alpha_{r^-} - \alpha_{c^-}$. Следовательно, разность $U_{b^+c^-b^+c^-} - \alpha_{c^-}$ не зависит от индекса c^-. Определим число $\overline{\beta}_{b^+} := U_{b^+c^-b^+c^-} - \alpha_{c^-}$. Тогда для любого индекса $c^- \in \mathcal{I}^-$

$$U_{b^+c^-b^+c^-} = \overline{\beta}_{b^+} + \alpha_{c^-}. \tag{32}$$

Подставим (30) и (32) в (31). Получим

$$\overline{\beta}_{c^-} + \alpha_{b^+} + \overline{\beta}_{b^+} + \alpha_{c^-} = \lambda_{b^+} + \lambda_{c^-} = \beta_{b^+} + \alpha_{b^+} + \beta_{c^-} + \alpha_{c^-}.$$

Отсюда $\overline{\beta}_{c^-} - \beta_{c^-} = \beta_{b^+} - \overline{\beta}_{b^+}$. Следовательно, каждая из разностей последнего равенства не зависит от индекса и является константой. Поскольку $\lambda_{b^+} \to 0$, если $b^+ \to \infty$, то в силу (28) имеем $\beta_{b^+} \to 0$, если $b^+ \to \infty$. Согласно (32), замечанию и предложению $\overline{\beta}_{b^+} = -[\overline{\xi}(E_{b^+c^-}), \overline{\xi}(E_{b^+c^-})] - \alpha_{c^-} \to 0$, если $b^+, c^- \to \infty$. Таким образом, $\beta_{b^+} - \overline{\beta}_{b^+} = 0$ и $\beta_{c^-} - \overline{\beta}_{c^-} = 0$. В силу (30) и (32) окончательно получаем

$$U_{b^+c^-b^+c^-} = \beta_{b^+} + \alpha_{c^-}, \quad U_{c^-b^+c^-b^+} = \beta_{c^-} + \alpha_{b^+}, \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $m \subset \mathcal{I}$, как и в лемме 1, — конечное множество, H_m — гильбертово пространство из леммы 1, μ_{ab} — из следствия 1. Определим матрицы $m''_{ac} := \mu_{ac} + \delta_{ac}\beta_a$ и $m'_{bd} := -\overline{\mu}_{bd}\beta_{bd} + \delta_{bd}\alpha_b \quad \forall a, b, c, d \in \mathcal{I}$. Принимая во внимание (6), (7), (8) и лемму 3, непосредственно убеждаемся

$$U_{abcd} = \delta_{bd}\mu_{ac} - \delta_{ac}\beta_{bd}\overline{\mu}_{bd} + (\beta_a + \alpha_b)\delta_{ac}\delta_{bd} =$$
$$= (\mu_{ac} + \beta_a\delta_{ac})\delta_{bd} + (-\beta_{bd}\overline{\mu}_{bd} + \alpha_b\delta_{bd})\delta_{ac} = m''_{ac}\delta_{bd} + m'_{db}\delta_{ac}.$$

В силу следствия 1 для любых $A, B \in B(H_m)$ имеем

$$[\overline{\xi}(A), \overline{\xi}(B)] = \sum_{a,b,c,d \in m} U_{abcd}(Ae_a, e_b)\overline{(JBJe_c, e_d)} =$$
$$= \sum_{abcd \in m} (m''_{ac}\delta_{bd}(Ae_a, e_b)\overline{(JBJe_c, e_d)} + m'_{db}\delta_{ac}(A_a e_a, e_b)\overline{(JBJe_c, e_d)}) =$$
$$= \sum_{ac \in m} m''_{ac}(B^\sharp A_a, e_c) + \sum_{bd \in m} m'_{bd}(AB^\sharp e_b, e_d). \tag{33}$$

Пусть $m^+ := m \cap \mathcal{I}^+$ ($m^- := m \cap \mathcal{I}^-$).

а) Возьмем вектор $f = \sum_{a \in m} \gamma_a e_a$ такой, что

$$\sum_{a \in m^+} |\gamma_a|^2 - \sum_{a \in m^-} |\gamma_a|^2 > 0. \tag{34}$$

Поэтому $f \in \beta^+$. Пусть $n \in \mathcal{I}^+ \setminus m^+$. Тогда f и e_n принадлежат некоторому максимальному равномерно положительному ([2], с. 46) подпространству. Пусть R — J-проектор на него. Имеем $R \in \mathcal{P}^+$ и $R[\cdot, f]e_n R = [\cdot, f]e_n$. Непосредственно убеждаемся, что

$$([\cdot, f]e_n)^\sharp[\cdot, f]e_n = \gamma(n)[.,f]f \quad \text{и} \quad [\cdot, f]e_n([\cdot, f]e_n)^\sharp = [f,f][\cdot, e_n]e_n.$$

Из индефинитности ξ получим $\overline{\xi}([\cdot, f]e_n) \in \beta^+ \cup \beta^0$. Полагая $A = B = [\cdot, f]e_n$, воспользуемся (33). Будем иметь

$$0 \le [\overline{\xi}([\cdot, f]e_n), \overline{\xi}([\cdot, f]e_n)] = \\ = \gamma(n) \sum_{ac \in m} m''_{ac}([e_a, f]f, e_c) + [f,f] \sum_{bd \in m \cup \{n\}} m'_{bd}[e_b, e_n](e_n, e_c) = \\ = \gamma(n) \sum_{ac \in m} m'' \gamma(a) \overline{\gamma_a} \gamma_c + [f,f]\gamma(n) m'_{nn}. \quad (35)$$

В силу соотношений $\gamma(n) = 1$, $m'_{nn} = \alpha_n \to 0$, и неотрицательности (35) заключаем, что

$$\sum_{ac \in m} m''_{ac} \gamma(a) \overline{\gamma_a} \gamma_c \ge 0. \quad (36)$$

б) Рассмотрим случай, когда выполнено неравенство, противоположное (34). Поэтому $f \in \beta^-$. Пусть теперь $n \in \mathcal{I}^- \setminus m^-$. Тогда f, e_n принадлежат некоторому максимальному равномерно отрицательному подпространству. Повторим все рассуждения из а). Тогда выражение в (35) будет неположительным. В силу $\gamma(n) = -1$ снова получим (36).

в) Пусть в (34) левая часть равна нулю. В силу конечномерности матрицы $(m''_{ac})_{ac \in m}$ вновь получаем (36). Итак, матрица $(m''_{ac}\gamma(a))_{ac \in m}$ неотрицательна (т. е. матрица $(m''_{ac})_{ac \in m}$ J-неотрицательна).

Поменяем местами f и e_n, т. е. положим $A = B = [\cdot, e_n]f$ и вновь воспользуемся (33). По аналогии с вышесказанным получим, что матрица $(m'_{bd})_{bd \in m}$ J-неотрицательна.

Таким образом,

$$|m'_{ab}|^2 \le |m'_{aa} m'_{bb}| = \alpha_a \alpha_b \beta_{ab}.$$

Учтем теперь ядерность M. Имеем

$$0 \le \sum_{a \in \mathcal{I}} \alpha_a \gamma(a) \le \sum_{a \in \mathcal{I}} \lambda_a \gamma(a) = \mathrm{tr}|M|.$$

Поэтому для любых $x, y \in H$

$$\sum_{ab \in \mathcal{I}} |(x, e_a)(e_b, y) m'_{ab}| \le \left(\sum_{a \in \mathcal{I}} |\alpha_a|^{1/2} |(x, e_a)| \right) \left(\sum_{b \in \mathcal{I}} |\alpha_b|^{1/2} |(e_b, y)| \le \right. \\ \le \left(\sum_a |\alpha_a| \right)^{1/2} \|x\| \left(\sum_b |\alpha_b| \right)^{1/2} \|y\|.$$

Таким образом, билинейная форма

$$A(x,y) := \sum_{ab \in \mathcal{I}} (x, e_a)(e_b, y) m'_{ab}, \quad x, y \in H,$$

всюду определена и ограничена. Следовательно, существует ограниченный линейный оператор M' такой, что $(M'x, y) = A(x,y) \quad \forall x, y \in H$. Очевидно, $m'_{ab} = (M'e_a, e_b) \quad \forall a, b \in \mathcal{I}$. Таким образом, оператор M' J-самосопряженный и ядерный.

По аналогии доказываем существование J-самосопряженного ядерного оператора M'', для которого $(M''e_a, e_b) = m''_{ab} \quad \forall a, b \in \mathcal{I}$. Для операторов M', M'' выполнено равенство (1). $\square$

Литература

[1] Jajte R., Paszkiewicz A. *Vector measures on the closed subspaces of a Hilbert space* // Studia Math. – 1978. – V. LXIII. – P. 229–251.

[2] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.* – М.: Наука, 1986. – 352 с.

[3] Matvejchuk M.S., Ionova A.M. *Vector measure on the logic of J-projections of a Krein space* // Int. J. Theor. Phys. – 2005. – V. 44. – № 12. – P. 2193–2200.

[4] Матвейчук М.С. *Мера на квантовой логике подпространств J-пространства* // Сиб. матем. журн. – 1991. – Т. 32. – С. 101–112.

[5] Ylinen K. *The structure of bounded bilinear form on products of C^*-algebras* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 102. – № 3. – P. 599–602.

М.С. Матвейчук

профессор, кафедра общей математики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` marjan.matvejchuk@ksu.ru

M.S. Matveichuk

Professor, Chair of General Mathematics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` marjan.matvejchuk@ksu.ru