Известия вузов. Математика
2008, № 9, с. 27–39

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.И. КАСЬЯНОВ

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ИНДЕКСАМИ

Аннотация. В случае неотрицательных индексов для полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши на вещественной оси и бисингулярного интегрального уравнения на плоскости с вырожденной характеристической частью дается теоретическое обоснование полиномиальных методов моментов и коллокации. Для соответствующего одномерного уравнения доказана также сходимость метода механических квадратур.

Ключевые слова: сингулярный интеграл на вещественной оси, линейное одномерное и двумерное уравнение, прямой метод, сходимость метода.

УДК: 517.544

Abstract. In this paper we consider a complete singular integral equation with the Cauchy kernel on the real axis and a bisingular integral equation on a plane with a degenerate characteristic part. We theoretically substantiate the polynomial methods of moments and collocation in the case of nonnegative indices. We also prove the convergence of the method of mechanical quadratures for the corresponding one-dimensional equation.

Keywords: singular integral on the real axis, linear one-dimensional and two-dimensional equations, direct method, convergence of a method.

Прямым методам решения полных сингулярных интегральных уравнений (СИУ) посвящено значительное число работ (напр., [1]–[9]). В частности, прямые методы решения одномерных СИУ с переменными коэффициентами и ненулевыми индексами на конечных контурах исследовались ранее в ([6], гл. 19). Там же предложена и обоснована вычислительная схема интерполяционного метода. В ([6], гл. 20; [9]) рассмотрены вопросы теоретического обоснования прямых методов решения бисингулярных интегральных уравнений (БСИУ) первого рода.

Ниже предложены и обоснованы некоторые прямые методы решения линейных СИУ на вещественной оси с неотрицательными индексами, а также прямые методы решения полных вырожденных БСИУ первого рода.

В отличие от упомянутых работ [1]–[9] в данной статье наряду с теорией таких уравнений [10]–[13] существенно использованы результаты по дробно-рациональной аппроксимации функций и интегралов на всей вещественной оси [14], [15].

1. *Постановка задачи. Вспомогательные результаты.* Рассмотрим СИУ

$$(Kx)(t) \equiv a(t)x(t) + b(t)(S)x(t) + T(hx)(t) = y(t); \tag{1}$$

Поступила 02.06.2006

здесь

$$(Sx)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)d\tau}{\tau-t},\quad t\in\Re=(-\infty,+\infty);\quad (Thx)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(\tau,t)x(\tau)d\tau}{1+\tau^2},$$

где $(Sx)(t)$ понимается в смысле главного значения по Коши. При этом $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$, $t\in\Re$; $\varkappa\equiv\operatorname{ind}\left(\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right)\geq 0$.

Как известно (напр., [11], гл. 2, с. 139), СИУ (1) с неотрицательными индексами разрешимы неоднозначно. Решение уравнения (1) будем искать на классе функций, ограниченных на бесконечности, при этом $a(\infty)\neq 0$. Для однозначной разрешимости СИУ (1), следуя [6], введем дополнительные условия

$$\Im(x,\alpha_k)=d_k,\quad k=\overline{1,\varkappa},\tag{2}$$

где d_k, $k=\overline{1,\varkappa}$, — заданная совокупность чисел, а функционал $\Im$ далее конкретизируется.

Ниже будем использовать функции [14] $c_k(t)=\sin 2k\operatorname{arctg}t$; $s_k(t)=\cos 2k\operatorname{arctg}t$, $\varphi_k(t)=c_k(t)+is_k(t)$, $t\in\Re$.

Отметим, что [14]

$$\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k=(-1)^k\varphi_k(t).\tag{3}$$

2. *Метод моментов.* Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x_{n+\varkappa}(t)=x_n^0(t)+\widetilde{x}_\varkappa(t),\qquad \widetilde{x}_\varkappa(t)=\sum_{l=n+1}^{n+\varkappa}\alpha_l\varphi_l(t),\tag{4}$$

$$x_n^0(t)=\sum_{k=-n}^{n}c_k\varphi_k(t),\tag{4'}$$

а неизвестные коэффициенты находить из условий равенства “моментов” левой и правой частей уравнения (1), что равносильно системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k(a_{ks}+b_{ks}+(-1)^{k+1}\widetilde{b}_s+T_{ks})+\sum_{l=n+1}^{n+\varkappa}\alpha_l(a_{ls}+b_{ls}+(-1)^{l+1}\widetilde{b}_s+T_{ls})=y_s,\quad s=\overline{-n,n},\tag{5}$$

где

$$a_{ks}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a(t)\varphi_k(t)}{1+t^2}\overline{\varphi_s(t)}dt,\quad b_{ks}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b(t)\varphi_k(t)}{1+t^2}\overline{\varphi_s(t)}dt,$$
$$\widetilde{b}_s=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b(t)}{1+t^2}\overline{\varphi_s(t)}dt,\qquad T_{ks}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{T(h\varphi_k)(t)}{1+t^2}\overline{\varphi_s(t)}dt.$$

Следуя [6], условия (2) с учетом (4) и (4$'$) возьмем в виде

$$(x_{n+\varkappa},\varphi_j)=d_j,\quad j=\overline{n+1,n+\varkappa};\tag{6}$$

здесь через $(*,*)$ обозначено скалярное произведение соответствующих элементов в $L_{2,\frac{1}{1+t^2}}(\Re)$ [1], d_j — заданная совокупность чисел. С учетом (6) к СЛАУ (5) добавятся равенства

$$\alpha_j=d_j,\quad j=\overline{n+1,n+\varkappa}.\tag{7}$$

Соотношения (5), (7) образуют систему метода моментов (м. м.) для приближенного решения СИУ (1) в случае $\varkappa>0$.

Теорема 1. *Пусть относительно СИУ* (1) *выполнены условия*

a) $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$,

b) $\varkappa \equiv \operatorname{ind}\left(\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right) \geq 0$,

c) a, b, y, h (*по каждому из аргументов соответственно*) $\in H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$.

Тогда в условиях однозначной разрешимости СИУ (1) (*в условиях* (6)) *СЛАУ* (5), (7) *имеет единственное решение* c_k^*, $k = \overline{-n,n}$, $\alpha_l^* = d_l$, $l = \overline{n+1, n+\varkappa}$ (*хотя бы при достаточно больших* n), *причем*

$$\|x^* - x^*_{n+\varkappa}\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

где x^*, $x^*_{n+\varkappa}$ — *точное и соответственно приближенное* (*найденное посредством* (4), (4′) *при* $c_k = c_k^*$, $k = \overline{-n,n}$, $\alpha_l = \alpha_l^*$, $l = \overline{n+1, n+\varkappa}$) *решения уравнения* (1).

Доказательство. Предварительно рассмотрим случай $\varkappa = 0$. Уравнение (1) эквивалентно операторному уравнению [1]

$$(Kx)(t) = y(t), \quad x \in X = L_{2,(1+t^2)}(\Re), \quad y \in Y = \widetilde{L}_{2,(1+t^2)}(\Re).$$

Здесь, как обычно, оператор K определяется левой частью исходного уравнения. Следуя [2], [3], запишем последнее уравнение в виде эквивалентной ему краевой задачи

$$(Bx)(t) \equiv (Gx)(t) + \widetilde{g}(t)T(hx)(t) = g(t), \quad (Gx)(t) \equiv \psi^-(t)x^+(t) - \psi^+(t)x^-(t),$$
$$g(t) = y(t)\psi^-(t)/(a(t)+b(t)), \quad \widetilde{g}(t) = g(t)/y(t), \quad \psi(z) = \exp\Gamma(z),$$
$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\right)\frac{d\tau}{\tau - z}.$$

Введем подпространство $\widetilde{X}_n$ пространства $L_{2,1/(1+t^2)}(\Re)$ как множество полиномов $x_n^0(t)$ вида (4′) и оператор P_n, $P_n : Y_n \to Y$, как оператор, ставящий в соответствие каждой функции из $Y = \widetilde{L}_{2,1/(1+t^2)}(\Re)$ ее n-й отрезок ряда Фурье по системе $\{\varphi_k\}_{-n}^{n}$. Тогда с учетом выше введенных подпространств и операторов система м. м. в случае $\varkappa = 0$ будет иметь вид

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(a_{ks} + b_{ks} + (-1)^{k+1}\widetilde{b}_s + T_{ks}) = y_s, \quad s = \overline{-n,n}.$$

Эта система эквивалентна операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv P_n(ax_n + bSx_n + T(hx_n)) = P_n y, \quad K_n : \widetilde{X}_n \to Y_n,$$

которое можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$K_n x_n \equiv P_n\left(\frac{a(t)+b(t)}{\psi^-(t)}\{Gx_n + \widetilde{g}T(hx_n)\}\right) = P_n y, \quad K_n : \widetilde{X}_n \to Y_n. \tag{8}$$

Наряду с уравнением (8) введем вспомогательное уравнение

$$(B_n x_n)(t) \equiv \psi^-(t)x_n^+(t) - \psi_n^+(t)x_n^-(t) + (V_n x_n)(t) = g_n(t), \tag{9}$$

где $\psi_n(t)$, $g_n(t)$, $(V_n x_n)(t)$ суть элементы наилучшего равномерного приближения функций $\psi(t)$, $g(t)$, $\widetilde{g}T(hx_n)(t)$ соответственно, построенные посредством дробно-рациональных функций [14]. Применяя методы [16], с учетом теоремы 7 из ([8], с. 19) в условиях доказываемой теоремы вспомогательная задача (9) имеет при достаточно больших n единственное решение $\overline{x}_n^*(t)$, так как

$$\|Bx_n - B_nx_n\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha})\|x_n\|_{2,1/(1+t^2)},$$
$$\|g - g_n\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}),$$

причем

$$\|x^* - \overline{x}_n^*\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \le 1, \quad \overline{x}_n^* = B^{-1}g_n. \tag{10}$$

Однако уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\widetilde{K}_nx_n \equiv P_n\biggl(\frac{a(t)+b(t)}{\psi^-(t)}\{G_nx_n + V_nx_n\}\biggr) = P_n\biggl(\frac{a(t)+b(t)}{\psi^-(t)}g_n(t)\biggr).$$

Применяя лемму Бакстера [3], приходим к линейной обратимости в $\widetilde{X}_n$ оператора $\widetilde{K}_n$. Далее,

$$\|\widetilde{K}_nx_n\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha})\|x_n\|_{2,1/(1+t^2)}$$

и

$$\biggl\|P_ny - P_n\biggl(\frac{a(t)+b(t)}{\psi^-(t)}g_n(t)\biggr)\biggr\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}).$$

Отсюда с учетом той же теоремы 7 из [8]

$$\|\overline{x}_n^* - x_n^{0*}\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}). \tag{11}$$

Перейдем теперь к случаю $\varkappa > 0$. Отметим, что матрица СЛАУ (5)–(7) будет иметь вид

$$B_n = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} & A_{1,n+1} & A_{1,n+2} & \dots & A_{1,n+\varkappa} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} & A_{2,n+1} & A_{2,n+2} & \dots & A_{2,n+\varkappa} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1} & A_{k,2} & \dots & A_{k,n} & A_{k,n+1} & A_{k,n+2} & \dots & A_{k,n+\varkappa} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} & A_{n+1,n+1} & A_{n,n+2} & \dots & A_{n,n+\varkappa} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и при достаточно больших n

$$\det B_n = \det \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k,1} & A_{k,2} & \dots & A_{k,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix} \ne 0.$$

Элементы этого определителя совпадают с элементами матрицы системы м. м. для приближенного решения уравнения (1) в случае $\varkappa = 0$. Таким образом, система м. м. (5), (7) и в этом случае при достаточно больших n, для которых

$$q_n \equiv \|B^{-1}\|O(n^{-\alpha}) < 1,$$

однозначно разрешима.

Из (10), (11) после применения неравенства треугольника получим

$$\|x^* - x_n^{*0}\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}),$$

поэтому

$$\|x^* - x^*_{n+\varkappa}\|_{2,1/(1+t^2)} \le \|x^* - x^{*0}_n\|_{2,1/(1+t^2)} + \|x^{0*}_n - x^*_{n+\varkappa}\|_{2,1/(1+t^2)} =$$
$$= O(n^{-\alpha}) + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{n+\varkappa} |\alpha_k^2|} \le O(n^{-\alpha}) + \frac{1}{n} = O(n^{-\alpha}). \quad \square$$

3. *Методы механических квадратур и коллокации.* Как и выше, будем предполагать относительно СИУ (1) выполненными условия теоремы 1. Приближенное решение уравнения (1) будем находить в виде

$$x_{n+\varkappa}(t) = x^0_n(t) + \widetilde{x}_\varkappa(t), \quad \widetilde{x}_\varkappa(t) = \sum_{l=n+1}^{n+\varkappa} \beta_l q_{l,n+\varkappa}(t), \tag{12}$$

$$x^0_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k q_{kn}(t), \tag{13}$$

где $q_{kn}(t) = \frac{2}{2n+1}\Big(\frac{1}{2} + \sum\limits_{l=1}^{n} c_l(t_k)c_l(t) + s_l(t_k)s_l(t)\Big)$, $q_{l,n+\varkappa}(t)$ — фундаментальный полином Лагранжа степени $n+\varkappa$ по заданной совокупности узлов t^*_j, $j = \overline{-n-\varkappa, n+\varkappa}$.

По аналогии с [1] система метода механических квадратур (м. м. к.) будет иметь вид

$$\alpha_j a(t_j) + b(t_j)\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \widetilde{q}_{kn}(t_j) - \frac{i}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k h(t_k, t_j) +$$
$$+ \sum_{l=n+1}^{n+\varkappa} \beta_l \Big\{ a(t_j) q_{l,n+\varkappa}(t_j) + b(t_j)\widetilde{q}_{l,n+\varkappa}(t_j) - \frac{i}{2n+1}\sum_{k=n+1}^{n+\varkappa} h(t_k, t_j) q_{l,n+\varkappa}(t_k)\Big\} =$$
$$= y(t_j), \quad t_j = \operatorname{tg}\frac{i\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{-n, n}, \quad \text{где } \widetilde{q} = Sq. \tag{14}$$

Дополнительные условия (2) возьмем в виде

$$x_{n+\varkappa}(t^*_j) = d_j, \quad j = \overline{n+1, n+\varkappa}, \quad t^*_j = \operatorname{tg}\frac{j\pi}{2(n+\varkappa)+1}, \tag{15}$$

где $x_{n+\varkappa}(t)$ — приближенное решение СИУ (1), d_j, $j = \overline{n+1, n+\varkappa}$, — заданная совокупность чисел. Присоединяя к этим уравнениям дополнительные условия (15), приходим к соотношениям

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k q_{k,n}(t^*_\sigma) + \sum_{l=n+1}^{n+\varkappa} \beta_l q_{l,n+\varkappa}(t^*_\sigma) = d_\sigma, \quad \sigma = \overline{n+1, n+\varkappa}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть относительно СИУ* (1) *выполнены условия теоремы* 1. *Тогда система метода механических квадратур* (16), (18) *имеет единственное решение* $\alpha_k = \alpha^*_k$, $\beta_l = \beta^*_l$, $k = \overline{-n, n}$, $l = \overline{n+1, n+\varkappa}$ (*хотя бы при достаточно больших* n), *причем*

$$\|x^* - x^*_{n+\varkappa}\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \le 1,$$

где x^*, $x^*_{n+\varkappa}$ — *точное и соответственно приближенное* (*найденное посредством* (12) *при* $\alpha_k = \alpha^*_k$, $k = \overline{-n, n}$, $\beta_l = \beta^*_l$, $l = \overline{n+1, n+\varkappa}$) *решения уравнения* (1).

Доказательство. Предварительно рассмотрим случай $\varkappa = 0$. Как и выше, уравнение (1) эквивалентно уравнению $(Kx)(t) = y(t)$, $X = L_{2,(1+t^2)}(\Re)$, $Y = \widetilde{L}_{2,(1+t^2)}(\Re)$.

Введем подпространство X_n пространства X как множество полиномов вида (13) и оператор $P_n : Y \to Y_n$ как оператор, ставящий каждой непрерывной функции $y(t)$ ее интерполяционный полином $(P_n y)t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} y(t_k) q_{kn}(t)$. Тогда система м. м. к.

$$\alpha_j a(t_j) + b(t_j) \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \widetilde{q}_{kn}(t_j) - \frac{i}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k h(t_k, t_j) = y(t_j), \quad j = \overline{-n, n},$$

будет равносильна операторному уравнению $(K_n x_n^0)(t) = P_n(a x_n^0 + bS x_n^0 + T P_n^\tau x_n^0)(t) = P_n y(t)$, однозначная разрешимость которого установлена в [17].

Переходя к случаю $\varkappa > 0$ и повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к требуемым утверждениям теоремы.

Рассмотрим теперь вопрос об обосновании метода коллокации, который заключается в следующем.

Приближенное решение СИУ (1) в условиях (15) будем находить по-прежнему в виде (12), а неизвестные коэффициенты α_j, $j = \overline{-n, n}$, β_l, $l = \overline{n+1, n+\varkappa}$, — из системы метода коллокации, которая в данном случае будет иметь вид

$$\begin{gathered} a_j \widetilde{\alpha}_j + b_j \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\alpha}_k \widetilde{q}_{kn}(t_j) + \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\alpha}_k T_{kj} + \sum_{l=n+1}^{n+\varkappa} \widetilde{\beta}_l \{ a(t_j) q_{l,n+\varkappa} + b(t_j) q_{l,n+\varkappa}(t_j) \} + \\ + \sum_{l=n+1}^{n+\varkappa} \widetilde{\beta}_l T_{lj} = y(t_j), \quad j = \overline{-n, n}; \\ \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\alpha}_k q_{kn}(t_\sigma^*) + \sum_{l=n+1}^{n+\varkappa} \widetilde{\beta}_l q_{l,n+\varkappa}(t_\sigma^*) = d_\sigma, \quad \sigma = \overline{n+1, n+\varkappa}. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь, по-прежнему, $t_j = \operatorname{tg} \frac{j\pi}{2n+1}$, $j = \overline{-n, n}$, — узлы коллокации.

Относительно предложенной вычислительной схемы приближенного решения СИУ (1) методом коллокации, описываемой соотношениями (12), (13), (17), справедлива

Теорема 3. *Пусть относительно СИУ* (1) *выполнены условия предыдущей теоремы. Тогда система метода коллокации* (17) *имеет единственное решение* $\widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\alpha}_k^*$, $k = \overline{-n, n}$, $\widetilde{\beta}_l = \widetilde{\beta}_l^*$, $j = \overline{n+1, n+\varkappa}$ *(хотя бы при достаточно больших n), причем*

$$\|x^* - x_{n+\varkappa}^*\|_{2,1/(1+t^2)} = O(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \le 1,$$

где x^*, $x_{n+\varkappa}^*$ — точное и соответственно приближенное (найденное посредством (12) *при $\widetilde{\alpha}_k = \widetilde{\alpha}_k^*$, $k = \overline{-n, n}$, $\widetilde{\beta}_l = \widetilde{\beta}_l^*$, $l = \overline{n+1, n+\varkappa}$) решения уравнения* (1).

Доказательство, как и выше, проводится в два этапа. Утверждение теоремы и оценка (17) для $\varkappa = 0$ получены в [17]; случай $\varkappa > 0$ доказывается аналогично доказательству теоремы 1.

4. *Полные бисингулярные интегральные уравнения с вырожденной характеристической частью в случае неотрицательных частных индексов.* К полным линейным бисингулярным интегральным уравнениям (БСИУ) относят уравнения, в состав которых входят операторы

$$(S_1x)(Q) \equiv (S_1x)(t_1,t_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau_1,t_2)}{\tau_1-t_1}d\tau_1,$$

$$(S_2x)(Q) \equiv (S_2x)(t_1,t_2) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(t_1,\tau_2)}{\tau_2-t_2}d\tau_2,$$

$$(S_{12}x)(Q) \equiv (S_{12}x)(t_1,t_2) = \frac{1}{(\pi i)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2,$$

$$T(hx)(Q) \equiv T(hx)(t_1,t_2) = \frac{1}{(\pi i)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(\tau_1,\tau_2;t_1,t_2)}{(1+\tau_1^2)(1+\tau_2^2)}x(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2, \quad Q \in \Re_2 = \Re\times\Re.$$

В [4], [18]–[21] приведены и обоснованы вычислительные схемы некоторых прямых методов решения линейных полных БСИУ. Однако в настоящее время до сих пор не найдены достаточные условия разрешимости таких уравнений. В некоторых частных случаях анализ таких условий для характеристических вырожденных БСИУ удается провести при помощи соответствующих результатов и методов В.А. Какичева [12], [13].

Будем рассматривать полные вырожденные уравнения первого рода, например, уравнения вида

$$(Kx)(Q) \equiv a_0(Q)x(Q) + a_1(Q)(S_1x)(Q) + T(hx)(Q) = y(Q), \quad Q \in \Re_2. \tag{18}$$

Если ввести интеграл типа Коши

$$\varPhi(z_1,z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-z_1)(\tau_2-z_2)} \quad (z_1,z_2 \in Z^{\pm\pm}), \tag{19}$$

и если $x \in H_{\alpha,\beta}(M)$, $0<\alpha,\beta\le 1$, то с учетом формул Сохоцкого–Племеля [12] уравнение (17) можно записать в виде вырожденной задачи Римана

$$\varPhi^{++}(Q) - \varPhi^{+-}(Q) - G(Q)(\varPhi^{-+}(Q) - \varPhi^{--}(Q)) + g(Q)T(h(\varPhi^{++}(Q)-$$
$$- \varPhi^{+-}(Q) - \varPhi^{-+}(Q) + \varPhi^{--}(Q))) = f(Q), \quad Q \in \Re_2, \tag{20}$$

причем

$$\varPhi^{\substack{-+\\--}}(\infty,z_2) = \varPhi^{\substack{++\\+-}} = (\infty,z_2) = 0 \ \ \forall z_2 \in Z_2^{\pm}; \ \ \varPhi^{\substack{+-\\--}}(z_1,\infty) = \varPhi^{\substack{++\\-+}} = (z_1,\infty) = 0 \ \ \forall z_1 \in Z_1^{\pm}, \tag{21}$$

$$G(Q) = \frac{a_0(Q)-a_1(Q)}{a_0(Q)+a_1(Q)}, \quad f(Q) = \frac{y(Q)}{a_0(Q)+a_1(Q)}, \quad g(Q) = \frac{f(Q)}{y(Q)}.$$

Здесь используются обозначения работ [4], [18]–[22].

Отметим, что уравнение (20) в условиях (21) эквивалентно уравнению (18) в том смысле, что если уравнение (18) разрешимо, то разрешимо и (20), и его решение находится посредством (19) и наоборот, т. е. если разрешимо (20), то разрешимо и (18), и его решение находится как скачок граничных значений кусочно-аналитических функций $\varPhi^{\pm\pm}(z_1,z_2)$.

В [13] вырожденная краевая задача Римана 1-го рода исследована для бицилиндров $D^{\pm\pm}$. Перефразируя эти результаты для уравнения (20) при $h\equiv 0$ в предположении, что

$$\operatorname{ind}_1 G(Q) \equiv \varkappa_1 > 0, \quad \operatorname{ind}_2 G(Q) \equiv \varkappa_2 > 0, \quad \varkappa_1 = \varkappa_2,$$

нетрудно построить решение вырожденной задачи Римана 1-го рода на биполуплоскости в замкнутой форме.

Итак, следуя [2], положим

$$\begin{aligned} &\Phi^{++}(t_1,t_2)-\Phi^{+-}(t_1,t_2)=\Phi(+\cdot)(t_1,t_2),\\ &\Phi^{-+}(t_1,t_2)-\Phi^{--}(t_1,t_2)=\Phi^{-\cdot}(t_1,t_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда с учетом (21) и [2] приходим к краевой задаче Римана на полуплоскости $Z_2^{\pm}$:

$$\begin{aligned} &\Phi^{+\cdot}(t_1,t_2)=G(t_1,t_2)\Phi^{-\cdot}(t_1,t_2)+f(t_1,t_2),\\ &\Phi^{+\cdot}(\infty,t_2)=\Phi^{-\cdot}(\infty,t_2)=0 \end{aligned} \tag{23}$$

(t_2 — параметр).

Таким образом, решая задачу (23) при помощи формул (14.25)–(14.29) из ([10], с. 119–120) и пару задач о скачке (22), можно построить решение вырожденной краевой задачи Римана на биполуплоскости (и, следовательно, решение характеристического БСИУ) в форме [22]:

$$\begin{gathered} \Phi^{\substack{+\ +\\+\ -}}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi^{+\cdot}(z_1,\tau_2)d\tau_2}{\tau_2-z_2}+\frac{P_{\varkappa_2-1}(z_2)}{(z_2+i)^{\varkappa_2}},\quad (z_1,z_2)\in Z^{\substack{+\ +\\+\ -}},\\ \Phi^{\substack{-\ +\\-\ -}}(z_1,z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi^{-\cdot}(z_1,\tau_2)d\tau_2}{\tau_2-z_2}+\frac{P_{\varkappa_2-1}(z_2)}{(z_2+i)^{\varkappa_2}},\quad (z_1,z_2)\in Z^{\substack{-\ +\\-\ -}},\\ \Phi^{\pm\cdot}(z_1,t_2)=\Phi_0^{\pm\cdot}(z_1,t_2)\left(\Psi(z_1,t_2)+\frac{P_{\varkappa_1-1}(z_1)}{(z_1+i)^{\varkappa_1}}\right),\\ \Psi(z_1,t_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\tau_1,t_2)d\tau_1}{\Phi_0^{+\cdot}(\tau_1,t_2)(\tau_1-z_1)},\\ \Phi_0^{+\cdot}(z_1,t_2)=\exp\Gamma^{+\cdot}(z_1,t_2),\\ \Phi^{-\cdot}(z_1,t_2)=\left(\frac{z_1-i}{z_1+i}\right)^{-\varkappa_1}\left(\frac{t_2-i}{t_2+i}\right)^{-\varkappa_2}\exp\Gamma^{-\cdot}(z_1,t_2). \end{gathered} \tag{24}$$

Применим к решению (18) прямые методы.

Отметим, что для однозначной разрешимости уравнения (18) недостаточно, чтобы $\varkappa_1\geq 0$, $\varkappa_2\geq 0$. Для однозначности решения уравнения (21) необходимы дополнительные условия

$$\tau(x,\psi_{ks})=d_{ks},\quad k=\overline{1,\varkappa_1},\quad s=\overline{1,\varkappa_2}, \tag{25}$$

где d_{ks}, $k=\overline{1,\varkappa_1}$, $s=\overline{1,\varkappa_2}$, — заданная совокупность чисел, а функционал τ определен ниже.

а) *Метод моментов.* Пусть БСИУ (18) таково, что $\varkappa_1\geq 0$, $\varkappa_2\geq 0$. Условия (25) возьмем в виде

$$(x,\psi_{ks})=d_{ks},\quad k=\overline{n+1,n+\varkappa_1},\quad s=\overline{m+1,m+\varkappa_2}, \tag{26}$$

где $\{d_{ks}\}$ — заданные числа, $\psi_{ks}(t_1,t_2)=\varphi_k(t_1)\varphi_s(t_2)$ ($\varphi_j(t)=\exp(i2j\operatorname{arctg}t)$, $(*,*)$ — скалярное произведение соответствующих элементов из $L_{2\rho}(\Re_2)$, $\rho(t_1,t_2)=(1+t_1^2)^{-1}(1+t_2^2)^{-1}$).

Приближенное решение БСИУ (18) находится в виде

$$x_{nm,\varkappa_1\varkappa_2} = x^0_{nm}(t_1,t_2) + \widetilde{x}^{\varkappa_1\varkappa_2}_{nm}(t_1,t_2),$$
$$\widetilde{x}^{\varkappa_1\varkappa_2}_{nm}(t_1,t_2) = \sum_{l_1=n+1}^{n+\varkappa_1}\sum_{l_2=m+1}^{m+\varkappa_2} \alpha_{l_1l_2}\psi_{l_1l_2}(t_1,t_2), \tag{27}$$

$$x^0_{nm}(t_1,t_2) = \sum_{k=-n}^{n}\sum_{r=-m}^{m} c_{kr}\psi_{kr}(t_1,t_2), \tag{28}$$

а неизвестные коэффициенты будем определять из СЛАУ вида

$$\sum_{k=-n}^{n}\sum_{r=-m}^{m} c_{kr}(A^{(0)}_{kl,rq} + A^{(1)}_{kl,rq} + T_{kl,rq}) + \sum_{l_1=n}^{n+\varkappa_1}\sum_{l_2=m}^{m+\varkappa_2} \alpha_{k_1k_2}(A^{(0)}_{k_1k_2,rq} +$$
$$+ A^{(1)}_{k_1k_2,rq} + T_{k_1k_2,rq}) = y_{rq}, \quad r = \overline{-n,n}, \quad q = \overline{-m,m}. \tag{29}$$

С учетом условий (26) приходим к равенствам

$$\alpha_{j_1j_2} = d_{j_1j_2}, \quad j_1 = \overline{n+1, n+\varkappa_1}, \quad j_2 = \overline{m+1, m+\varkappa_2}. \tag{30}$$

Соотношения (29), (30) образуют СЛАУ метода моментов для приближенного решения уравнения (18).

В уравнениях (29) через $A^{(0)}_{kl,rq}$, $A^{(1)}_{kl,rq}$, y_{rq}, $T_{kl,rq}$ обозначены коэффициенты Фурье функций $a_0(Q)\psi_{kl}(Q)$, $a_1(Q)S_1\psi_{kl}(Q)$, $y(Q)$, $T(h\psi_{kl})(Q)$ соответственно по системе функций $\psi_{kl}(Q)$ $(Q \in \Re_2)$.

Теорема 4. *Пусть в БСИУ* (18) $a_0(Q)$, $a_1(Q)$, $h(Q',Q)$ *не равны нулю одновременно. Пусть, кроме того, БСИУ* (18) *таково, что*

a) $a_0^2(Q) - a_1^2(Q) \neq 0$, $Q \in \Re_2$;
b) $\varkappa_1 \geq 0$, $\varkappa_2 \geq 0$;
c) *выполнены дополнительные условия* (25);
d) $a_0(Q), a_1(Q), h(Q',Q) \in H_{\alpha,\beta}(M)$, $0 < \alpha,\beta \leq 1$ (*по каждому из аргументов* $Q \equiv (t_1,t_2)$, $Q' \equiv (\tau_1,\tau_2)$).

Тогда, если БСИУ (18) *в условиях* (25) *однозначно разрешимо, то и СЛАУ* (29), (30) *имеет единственное решение* $c_{rq} = c^*_{rq}$, $r = \overline{-n,n}$, $q = \overline{-m,m}$, $\alpha_{k_1k_1} = \alpha^*_{k_1k_2}$, $k_1 = \overline{n+1, n+\varkappa_1}$, $k_2 = \overline{m+1, m+\varkappa_2}$ (*хотя бы при достаточно больших* n *и* m), *причем*

$$\|x^* - x^*_{nm,\varkappa_1,\varkappa_2}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)} = O(n^{-\alpha} + m^{-\beta}), \tag{31}$$

где x^*, $x^*_{nm,\varkappa_1,\varkappa_2}$ — *точное и соответственно приближенное, найденное посредством* (27) *при* $c_{rq} = c^*_{rq}$, $r = \overline{-n,n}$, $q = \overline{-m,m}$, $\alpha_{k_1k_1} = \alpha^*_{k_1k_2}$, $k_1 = \overline{n+1, n+\varkappa_1}$, $k_2 = \overline{m+1, m+\varkappa_2}$, *решения уравнения* (18).

Доказательство. Предварительно рассмотрим случай, когда $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Уравнение (18) равносильно [14] операторному уравнению $Kx = y$ (оператор K определен левой частью уравнения (18), $K : X \to Y$, $X = L_{2,\rho}(\Re_2)$, $Y = \widetilde{L}_{2,\rho}(\Re_2)$).

Для дальнейшего понадобятся конечномерные подпространства пространств X и Y (см. [18]). В качестве подпространства X_{nm} пространства X выберем множество элементов (27). Введем оператор P_{nm} как оператор, ставящий в соответствие каждому элементу y из $L_{2,\rho}(\Re_2)$

элемент

$$y_{nm}(t_1,t_2)=\sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-m}^{m}y_{kl}\psi_{kl}(t_1,t_2),$$

где y_{kl} суть коэффициенты Фурье по системе $\psi_{kl}(t_1,t_2)$, $P_{nm}:Y\to Y_{nm}$, $\dim X_{nm}=$ $=\dim Y_{nm}<\infty$. С учетом введенных подпространств и операторов СЛАУ метода моментов (29) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения вида

$$\begin{gathered}(K_{nm}x^0_{nm})(Q)\equiv P_{nm}\big(a_0(Q)x^0_{nm}+a_1(Q)(S_1x^0_{nm})(Q)+t(hx^0_{nm}(Q)\big)=P_{nm}y,\\ K_{nm}:X_{nm}\to Y_{nm}.\end{gathered}\tag{32}$$

Воспользуемся, далее, краевой задачей (20). Тогда уравнение (18) эквивалентно уравнению

$$(Kx)(Q)\equiv\frac{a_0(Q)+a_1(Q)}{\varPhi^{-\cdot}(Q)}\big((\sigma x)(Q)+g(Q)T(hx)(Q)\big)=y(Q),\quad Q\in\Re_2,$$

где $(\sigma x)(Q)\equiv\varPhi_0^{+\cdot}(Q)\varPhi^{-\cdot}(Q)-\varPhi^{-\cdot}(Q)\varPhi^{+\cdot}(Q)$, $\varPhi^{\pm\cdot}(Q)=\pm\frac{x(Q)}{2}+\frac12(S_1x)(Q)$.

Пусть $(\widetilde{\sigma}x)(Q)\equiv(\sigma x)(Q)+g(Q)T(hx)(Q)$. Тогда уравнение (32) равносильно уравнению

$$(K_{nm}x^0_{nm})(Q)\equiv P_{nm}\left\{\frac{a_0(Q)+a_1(Q)}{\varPhi^{-\cdot}(Q)}\big((\sigma x^0_{nm})(Q)+g(Q)T(hx^0_{nm})(Q)\big)\right\}=y_{nm}.\tag{33}$$

Используем также вспомогательное уравнение

$$\sigma_{nm}\overline{x}^0_{nm}(Q)\equiv\varPhi^{+\cdot}_{nm}(Q)\varPhi^{-\cdot}_{0,nm}(Q)-\varPhi^{-\cdot}_{nm}(Q)\varPhi^{+\cdot}_{0,nm}(Q)+(V_{nm}\overline{x}^0_{nm})(Q)\equiv\mathbf{f}_{nm}(Q),\tag{34}$$

где через $\varPhi^{\pm\cdot}_{0,nm}(Q)$, $(V_{nm}\overline{x}^0_{nm})(Q)$, $\mathbf{f}_{nm}(Q)$ обозначены полиномы степени (n,m) наилучшего равномерного приближения функций $\varPhi^{\pm\cdot}_{nm}(Q)$, $(\widetilde{g}T(h\overline{x}^0_{nm})(Q)\equiv\varPhi^{+\cdot}_{nm}(Q)\varPhi^{-\cdot}_{0,nm}(Q)-$ $\varPhi^{-\cdot}_{nm}(Q))(Q)$, $g(Q)$ соответственно, построенные на основе функций [14]. С учетом условий доказываемой теоремы имеем

$$\begin{gathered}\|K\overline{x}^0_{nm}-\sigma_{nm}\overline{x}^0_{nm}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)}=O(n^{-\alpha}+m^{-\beta})\|\overline{x}^0_{nm}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)},\\ \|g-\mathbf{f}_{nm}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)}=O(n^{-\alpha}+m^{-\beta}).\end{gathered}\tag{35}$$

Таким образом, с учетом (35) и [8] будем иметь

$$\begin{gathered}\|\sigma^{-1}_{nm}\|=O(1),\\ \|x^*-\overline{x}^*_{nm}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)}=O(n^{-\alpha}+m^{-\beta}),\quad \overline{x}^*_{nm}=\sigma^{-1}_{nm}\mathbf{f}_{nm}.\end{gathered}\tag{36}$$

Уравнение (34) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned}(\widetilde{K}_{nm}x^0_{nm})(Q)\equiv P_{nm}\left[\frac{a_0(Q)+a_1(Q)}{\varPhi^{-\cdot}(Q)}\big((\sigma_{nm}x^0_{nm}(Q)+(V_{nm}x^0_{nm})(Q)\big)\right]&=\\ =P_{nm}\left[\frac{a_0(Q)+a_1(Q)}{\varPhi^{-\cdot}(Q)}\mathbf{f}_{nm}(Q)\right]&.\end{aligned}$$

В силу леммы Бакстера оператор $P_{nm}\big[\frac{a_0(Q)+a_1(Q)}{\varPhi^{-}(Q)}\big]P_{nm}$ линейно обратим в X_{nm}, следовательно, линейно обратим в X_{nm} и оператор $\widetilde{K}_{nm}$.

Далее, по аналогии с [16], возвращаясь к уравнению (32), с учетом условий теоремы находим

$$\begin{gathered}\|\sigma_{nm}\overline{x}^0_{nm}-\widetilde{K}_{nm}\overline{x}^0_{nm}\|=O(n^{-\alpha}+m^{-\beta})\|\overline{x}^0_{nm}\|,\\ \left\|P_{nm}y-P_{nm}\left[\frac{a_0(Q)+a_1(Q)}{\varPhi^{-\cdot}(Q)}\mathbf{f}_{nm}\right]\right\|=O(n^{-\alpha}+m^{-\beta}).\end{gathered}$$

Применяя лемму 7 из [8], приходим к линейной обратимости оператора K_{nm} и оценке

$$\|\overline{x}^*_{nm} - x^*_{nm}\| = O(n^{-\alpha} + m^{-\beta});$$

здесь x^*_{nm} — точное решение уравнения (32). Остальные утверждения доказываемой теоремы, в частности, оценка (31), есть простое следствие неравенства треугольника, (36) и последней оценки.

Случай $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ приводит к рассмотрению определителя СЛАУ (29), (30). При этом, как и в одномерном случае, этот определитель будет отличен от нуля.

Действительно, если через A обозначить минор (nm)-го порядка матрицы СЛАУ (29), что соответствует случаю нулевых частных индексов (исчезает лишний "довесок"), то согласно выше проведенным выкладкам при достаточно больших n и m $\varepsilon_{nm} = \|B^{-1}\|O(n^{\alpha}+m^{\beta}) < 1$.

Сама же матрица СЛАУ (29), (30), начиная с $(n + \varkappa_1 + 1;\, m + \varkappa_2 + 1)$-го элемента, будет пополняться диагональными элементами, равными 1. В остальном доказательство утверждений теоремы для случая неотрицательных индексов почти полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения для одномерного случая.

b) *Метод коллокации.* Условия (25) возьмем в виде

$$x(t^*_{1j_1}, t^*_{2j_2}) = d_{j_1 j_2}, \quad j_1 = \overline{1, \varkappa_1}, \quad j_2 = \overline{1, \varkappa_2}, \tag{37}$$

где $(t^*_{1j_1}, t^*_{2j_2})$ и $d_{j_1 j_2}$ суть заданные совокупности узлов и чисел соответственно. Согласно методу коллокации (м. к.) приближенное решение БСИУ (18) находится в виде

$$\begin{gathered} x_{nm,\varkappa_1,\varkappa_2}(t_1,t_2) = x^0_{nm}(t_1,t_2) + \widetilde{x}^{\varkappa_1\varkappa_2}_{nm}(t_1,t_2), \\ \widetilde{x}^{\varkappa_1\varkappa_2}_{nm}(t_1,t_2) = \sum_{l_1=n+1}^{n+\varkappa_1} \sum_{l_2=m+1}^{m+\varkappa_2} \alpha_{l_1 l_2} \psi_{l_1 l_2}(t_1,t_2), \end{gathered} \tag{38}$$

$$x^0_{nm}(t_1,t_2) = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{r=-m}^{m} c_{kr} q_{kn}(t_1) q_{rm}(t_2), \tag{39}$$

а неизвестные коэффициенты — из СЛАУ

$$\begin{gathered} c_{ij} a_0(t_{1i}, t_{2j}) + \sum_{k=-n}^{n} \sum_{r=-m}^{m} c_{kr} \{a_1(t_{1i}, t_{2j}) \widetilde{q}_{kn}(t_{1i}) \delta_{rj} + (Thq_{kn}q_{rm})(t_{1i}, t_{2j})\} + \\ + \sum_{l_1=n+1}^{n+\varkappa_1} \sum_{l_2=m+1}^{m+\varkappa_2} \alpha_{l_1 l_2} \{[a_0(t_{1\delta}, t_{2\nu}) + a_1(t_{1i}, t_{2j})] \varphi_{l_1}(t_{1i}) \varphi_{l_2}(t_{2j}) + \\ +(-1)^{k+1} a_1(t_{1i}, t_{2j}) \varphi_k(t_{2j}) + (Th\varphi_{l_1}\varphi_{l_2})(t_{1i}, t_{2j})\} = y(t_{1i}, t_{2j}), \quad i = \overline{-n, n}, \quad j = \overline{-m, m}, \end{gathered} \tag{40}$$

$$Q_{lr} \equiv (t_{1l}, t_{2r}) = \left(\operatorname{tg} \frac{l\pi}{2n+1}, \operatorname{tg} \frac{r\pi}{2m+1} \right). \tag{41}$$

К СЛАУ (40) присоединим условия (37).

Теорема 5. *В условиях предыдущей теоремы система м. к. (37), (40) при достаточно больших n и m имеет единственное решение $c_{kr} = c^*_{kr}$, $k = \overline{-n, n}$, $r = \overline{-m, m}$, $\alpha_{l_1 l_2} = \alpha^*_{l_1 l_2}$, $l_1 = \overline{n+1, n+\varkappa_1}$, $l_2 = \overline{m+1, m+\varkappa_2}$ и $\|x^* - \widetilde{x}^*_{nm,\varkappa_1,\varkappa_2}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)} = O(n^{-\alpha} + m^{-\beta})$, где x^*, $\widetilde{x}^*_{nm,\varkappa_1,\varkappa_2}$ суть точное и соответственно приближенное (найденное из (38), (40) при $c_{rq} = c^*_{rq}$, $r = \overline{-n, n}$, $q = \overline{-m, m}$; $\alpha_{k_1 k_2} = \alpha^*_{k_1 k_2}$, $k_1 = \overline{n+1, n+\varkappa_1}$, $k_2 = \overline{m+1, m+\varkappa_2}$) решения уравнения (18).*

Доказательство. Предварительно рассмотрим случай, когда $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$. Как и выше, уравнение (18) будем рассматривать как линейное операторное уравнение $Kx = y$; $K: X \to Y$, $X = L_{2,\rho}(\Re_2)$, $Y = \widetilde{L}_{2,\rho}(\Re_2)$.

Определим подпространство $\widetilde{X}_{nm}$ пространства X как множество элементов вида (39), а оператор P_{nm} определим как оператор, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $y(Q)$ ее интерполяционный многочлен $y_{nm}(Q)$ по узлам (41). Тогда система м. к. эквивалентна операторному уравнению

$$(\widetilde{K}_{nm}\widetilde{x}_{nm})(Q) \equiv \widetilde{P}_{nm}\big(a_0(Q)\widetilde{x}_{nm}(Q) + a_1(Q)(S_1\widetilde{x}_{nm})(Q) + T(h\widetilde{x}_{nm})(Q)\big) = \widetilde{P}_{nm}y,$$
$$\widetilde{K}_{nm} : \widetilde{X}_{nm} \to \widetilde{Y}_{nm} \quad (\dim \widetilde{X}_{nm} = \dim \widetilde{Y}_{nm} < \infty).$$

После применения вышеизложенной методики с учетом [7], [10], повторяя рассуждения п. а), приходим к оценке

$$\|K\widetilde{x}_{nm} - \widetilde{K}_{nm}x^0_{nm}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)} = O(n^{-\alpha} + m^{-\beta})\|x^0_{nm}\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)}.$$

При этом для правых частей $\|y - \widetilde{P}_{nm}y\|_{L_{2,\rho}(\Re_2)} = O(n^{-\alpha} + m^{-\beta})$. Применяя теорему 7 из [8], приходим к требуемым утверждениям доказываемой теоремы в случае нулевых частных индексов.

Случай положительных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ рассматривается по аналогии с предыдущими пунктами.

Действительно, как и выше, введем минор nm-го порядка матрицы системы A, соответствующий случаю нулевых частных индексов, который имеет $\det A \neq 0$ (с учетом теоремы 7 из [8] при n и m таких, что $\varepsilon_{nm} = \|K^{-1}\|O(n^{-\alpha} + m^{-\beta}) < 1$). Сама же матрица СЛАУ (37), (40), начиная с $(n+\varkappa_1+1,\ m+\varkappa_2+1)$-го элемента, будет пополняться диагональными элементами. В остальном доказательство утверждений теоремы для случая положительных индексов почти полностью повторяет доказательство соответствующего утверждения предыдущего пункта.

5. *Некоторые замечания и дополнения.* а) Если рассматривать в классах $\{0\}$ ([23], гл. 2) характеристические уравнения типа свертки с постоянными коэффициентами, то, как показано в ([23], гл. 2), такие уравнения эквивалентны соответствующим характеристическим СИУ, приближенное решение которых можно строить по вышеприведенным вычислительным схемам. Здесь также можно кроме функций И. Грегора [14] использовать функции Ш. Эрмита.

б) Следуя [23], под классом $\big\{\{0,0\}\big\}$ будем понимать множество функций из $L_2(\Re_2)$, удовлетворяющих условию Гёльдера; класс $\{0,0\}$ определим как класс функций, Фурье-образы которых являются функциями из $\big\{\{0,0\}\big\}$. Если рассматривать уравнения типа свертки с постоянными коэффициентами в $\{0,0\}$, то нетрудно убедиться в их эквивалентности соответствующим БСИУ со всеми вытекающими отсюда последствиями (см. также [20], [21]).

Литература

[1] Касьянов В.И. *О методе механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 8. – С. 82–87.

[2] Касьянов В.И. *О некоторых приближенных методах решения линейных сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 9. – С. 77–81.

[3] Касьянов В.И., Касьянова Г.Б. *Прямые методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на вещественной оси* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 8. – С. 1438–1443.

[4] Касьянов В.И. *Оптимизация прямых методов решения сингулярных интегральных уравнений в неограниченных областях* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 2. – С. 37–46.

[5] Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 251–307.

[6] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: Янус, 1995. – 520 с.

[7] Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

[8] Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

[9] Хайруллина А.М. *Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1986.

[10] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

[11] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 600 с.

[12] Какичев В.А. *Граничные свойства интегралов типа Коши многих переменных* // Учен. зап. Шахт. пед. ин-та. – Шахты: Изд. ШГПИ, 1959. – С. 25–90.

[13] Какичев В.А. *Методы решения некоторых краевых задач теории аналитических функций для двух комплексных переменных.* – Тюмень: Изд-во Тюменск. ун-та, 1978. – 124 с.

[14] Gregor J. *O aproximaci obrazu v hilbertově transformaci ortogonàlnimi râdami racionalnich lomených funkci* // Apl. Matem. – 1961. – V. 6. – № 3. – S. 161–244.

[15] Онегов Л.А. *Дробно-рациональная аппроксимация сингулярных интегралов по действительной оси* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 3. – С. 43–55.

[16] Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е. *Решение нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом редукции* // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 2. – С. 3–13.

[17] Касьянов В.И. *О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений*, II / Дифф. и интегральные уравнения // Межвузовский сб. – Горький: Изд- во Горьковск. ун-та, 1981. – С. 99–103.

[18] Касьянов В.И. *О некоторых приближенных методах решения многомерных сингулярных интегральных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 3. – С. 51–59.

[19] Касьянов В.И. *О прямых методах решения некоторых краевых задач теории аналитических функций* // Изв. вузов. Математика. – 1981. – № 11. – С. 74–78.

[20] Касьянов В.И. *Прямые методы решения краевых задач теории аналитических функций двух комплексных переменных.* – Казанск. гос. пед. ин-т. – Казань, 1983. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 6566-85 Деп.

[21] Касьянов В.И., Липачев Е.К. *Численная реализация интегральных методов в теории дифракции.* – Казанский ун-т. – Казань, 1993. – 103 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2526–В93.

[22] Касьянов В.И. *Рациональная аппроксимация интегралов типа Коши и приближенное решение задачи Римана на полуплоскости* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 11. – С. 50–55.

[23] Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* – М.: Наука, 1978. – 296 с.

В.И. Касьянов

профессор, кафедра высшей математики,
Альметьевский государственный нефтяной институт,
423450, г. Альметьевск, ул. Ленина, д. 2

V.I. Kas'yanov

Professor, Chair of Higher Mathematics,
Almet'evsk State Petroleum Institute,
2 Lenin str., Almet'evsk, 423450 Russia