

УДК 535.2

## СТОЛКНОВЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ

*А.П. Сухоруков, В.Е. Лобанов*

### Аннотация

Построена теория взаимодействия оптических импульсов в нелинейной среде с учетом слабой расстройки групповых скоростей и их дисперсии. Проведено численное моделирование динамики прохождения и отражения. Развита геометрическая оптика для нахождения траекторий сигнального импульса. Получены условия полного внутреннего отражения импульсов в нелинейных средах.

**Ключевые слова:** нелинейная среда, кубическая нелинейность, декомпрессия импульсов, расстройка групповых скоростей.

### Введение

В работе [1] обсуждалось явление полного внутреннего отражения при взаимодействии оптических пучков. Если вспомнить основные положения пространственно-временной аналогии между поведением волновых пучков и волновых пакетов [2], то можно ожидать полного отражения при столкновении оптических, акустических или каких-либо других импульсов. Для полного отражения необходимо подобрать вид нелинейности, а также дисперсию среды. Если для пучков подходила дефокусирующая среда, то отражение импульсов может произойти в среде, где работает декомпрессия импульсов. Напомним, что декомпрессия наблюдается при определенном знаке произведения коэффициента нелинейности на величину дисперсии групповых скоростей [3]. Некоторые вопросы отражения электромагнитных импульсов от наведенных неоднородностей рассматривались, например, в [4, 5].

В настоящей работе построена теория взаимодействия оптических импульсов в нелинейной среде при учете небольшой расстройке групповых скоростей и дисперсии групповых скоростей. Приведены результаты численного моделирования динамики прохождения и отражения для разных случаев, описываемых уравнениями для медленно меняющихся амплитуд. Введено понятие критической расстройки групповых скоростей. Если расстройка групповых скоростей взаимодействующих импульсов превышает критическую величину, то сигнальный импульс проходит через основной импульс, в противном случае происходит полное внутреннее отражение. Нами развита геометрическая оптика для нахождения траекторий сигнального импульса, догоняющего более мощный импульс. Получено уравнение для траектории сигнала, которое решено численно и для специального случая аналитически. Выведено выражение для порога полного внутреннего отражения в среде с кубической нелинейностью и в квадратичной среде при каскадном процессе трехчастотного взаимодействия.

### 1. Двухволновое взаимодействие импульсов в кубично-нелинейной среде

Рассмотрим распространение двух оптических волн разных частот  $\omega_1 \neq \omega_2$  с амплитудами  $E_j = A_j \exp[i(\omega_j t - k_{j0} z)] + \text{к.с.}$  в среде с кубической нелинейностью

$D = \varepsilon_0 E + 4\pi \chi_3 E^3$  и дисперсией  $n(\omega)$ . Из уравнения Максвелла можно получить уравнения для медленно меняющихся амплитуд:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + i D_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \tau^2} = -i \left( \gamma_{11} |A_1|^2 + \gamma_{12} |A_2|^2 \right) A_1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + i D_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} = -i \left( \gamma_{22} |A_2|^2 + \gamma_{21} |A_1|^2 \right) A_2, \quad (2)$$

где

$$\tau = t - \frac{z}{u_1}, \quad \nu = \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1}, \quad u_j = \left( \frac{\partial k_j}{\partial \omega_j} \right)^{-1}, \quad D_j = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 k_j}{\partial \omega_j^2}, \quad \gamma_j = \frac{\pi \chi_3 \omega_j}{2 c n_j}.$$

Система уравнений (1), (2) решалась численными методами. Однако в случае слабого сигнала  $|A_2| \ll |A_1|$  ее можно свести к одному уравнению

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \nu \frac{\partial A_2}{\partial \tau} + i D_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \tau^2} = i k_{20} n_{\text{nl}}(\tau, z) A_2, \quad (3)$$

где  $k_{20} = \omega_2/c$ . Это уравнение описывает распространение импульса в среде с неоднородностью показателя преломления

$$n_{\text{nl}} = -\gamma_{21} \frac{|A_1|^2}{k_{20}}, \quad (4)$$

движущейся с групповой скоростью основного импульса. Профиль индуцированной неоднородности повторяет огибающую интенсивности основного импульса, например, гауссову форму  $A_1(z=0) = E_1 \exp(-\tau^2/T_1^2)$ . Сигнальный импульс подается с временной задержкой  $A_2(z=0) = E_2 \exp[-(\tau - \tau_{\text{зад}})^2/T_2^2]$ . Он догоняет основной импульс, если начальное отставание невелико,  $\tau_{\text{зад}} < \nu L$ , где  $L$  – длина среды.

## 2. Полное отражение сигнального пучка от основного импульса

После того, как сигнальный импульс догнал основной импульс, возможны два варианта. При большой разнице скоростей сигнал проходит через неоднородность, несколько замедляет свой скорость и уходит вперед от основного импульса (рис. 1, а). Задержка сигнала на выходе небольшая.

Численное моделирование показывает, что глубина проникновения сигнального импульса в основной импульс уменьшается с увеличением амплитуды основного импульса (величины индуцированной неоднородности). Если сигнал распространяется с малой отстройкой скорости, то при взаимодействии он как бы затормаживается и выходит назад, то есть отражается от основного импульса (рис. 1, б). При этом оба импульса продолжают двигаться в прежнем направлении, но с немного измененными скоростями.

Интересно исследовать зависимость коэффициента отражения от интенсивности и скорости относительного движения, то есть от величины отрицательной неоднородности и расстройки групповых скоростей (см. рис. 2). На рисунке отчетливо виден переход от режима прохождения к полному внутреннему отражению. В этом случае нельзя применить формулу Френеля для коэффициента отражения от границы двух сред, так как коэффициент отражения пропорционален весьма малой величине  $n_{\text{nl}}(0)/n_2$ , где  $n_2$  – линейный показатель преломления на частоте  $\omega_2$ .

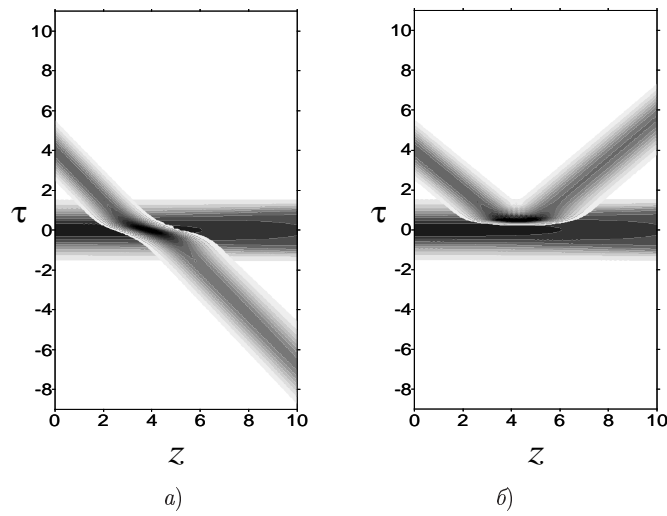


Рис. 1. Туннелирование (а) и отражение (б) сигнального импульса при взаимодействии с основным импульсом в нелинейной среде

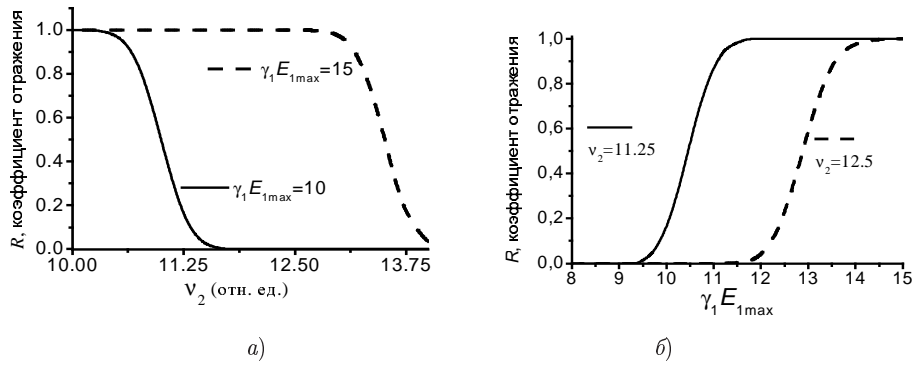


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения сигнального импульса от величины расстройки групповых скоростей (а) и от амплитуды основного импульса (величины индуцированной неоднородности) (б)

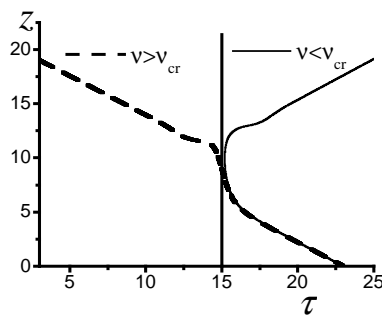


Рис. 3. Траектория сигнального пучка  $z(\tau)$  при групповой расстройке большей (пунктирная линия) или меньшей (сплошная линия) критической величины, соответствующей полному внутреннему отражению. Основному импульсу соответствует вертикальная линия с  $\tau = 15$

Динамику столкновения импульсов лучше проследить, наблюдая за их движением, например за перемещением их вершин. Мы обработали результаты численного моделирования исходных волновых уравнений (1), (2) и построили траектории сигнального импульса для различных расстроек групповых скоростей (рис. 3).

Из анализа полученных траекторий следует, что сигнальный импульс при большой разнице скоростей  $\nu > \nu_{cr}$  несколько замедляется в результате столкновения с основным импульсом, но целиком проходит через неоднородность (пунктирная линия). При снижении скорости ниже критической величины  $\nu < \nu_{cr}$  сигнальный импульс внедряется в неоднородную область, приобретает фазовую модуляцию и сдвиг частоты. Изменение частоты ведет к изменению скорости распространения в диспергирующей среде. В рассматриваемом случае скорость сигнала уменьшается, и он выходит обратно из области нелинейного влияния основного импульса. Это явление можно трактовать как полное внутренне отражение в результате некогерентного взаимодействия импульсов в нелинейной диспергирующей среде. Подчеркнем еще раз, что при использовании обычных формул Френеля коэффициент отражения пропорционален весьма малой величине  $n_{nl}(0)/n_2$ , и ни о каком 100%-ном отражении и речи не может быть.

### 3. Геометрическая оптика неоднородных движущихся сред применительно к взаимодействию импульсов

После проведения численного моделирования, когда мы убедились в существовании полного отражения слабого импульса от более мощного, была поставлена задача построения аналитической теории. Такая теория должна, в частности, определить порог полного отражения оптических импульсов от движущейся индуцированной неоднородности. Здесь весьма плодотворным оказался метод геометрической оптики для волновых пакетов, или оптических импульсов.

Согласно геометро-оптическому подходу представим амплитуду импульса в виде  $A_2 = B_2 \exp(i S_2)$  через действительную амплитуду  $B_2(\tau, z)$  и эйконал  $S_2(\tau, z)$ . После подстановки этого решения в уравнение (3) и отбрасывания малых членов получаем уравнение эйконала в виде

$$\frac{\partial S_2}{\partial z} + \nu_2 \frac{\partial S_2}{\partial \tau} - D_2 \left( \frac{\partial S_2}{\partial \tau} \right)^2 = k_{20} n_{nl}(\tau). \quad (5)$$

Это уравнение аналогично уравнению эйконала для волн, распространяющихся в слоисто неоднородной среде. Применяя метод конструирования общего интеграла или метод характеристик, находим уравнение для траектории импульса:

$$\frac{d\tau_p}{dz} = \pm \sqrt{\nu_2^2 - 4D_2 k_{20} [n_{nl}(\tau_p) - n_{nl}(\tau_{зад})]}, \quad (6)$$

где индуцированная неоднородность задается выражением (4). Из уравнения (6) следует, что отражение происходит тогда, когда появляется точка поворота, в которой производная (6) обращается в нуль. Отсюда вытекают два условия отражения:

$$\nu_2 \leq \nu_{cr} = \sqrt{D_2 k_{20} n_{nl}(0)} \quad \text{и} \quad D_2 n_{nl}(\tau) > 0, \quad (7)$$

Последнее неравенство накладывает ограничения на знаки нелинейности и дисперсии скоростей. Положительный знак произведения, как следует из анализа решений уравнений (1)–(3), означает, что отраженный импульс должен испытывать декомпрессию. Первое неравенство в (7) показывает, что порог полного отражения по расстройке скоростей зависит не от формы и длительности основного импульса,

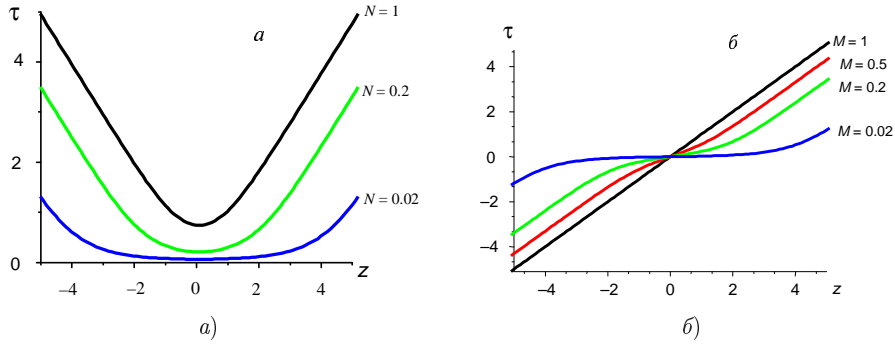


Рис. 4. Траектории сигнального импульса в поле основного импульса, заданного в виде гиперболического секанса с полным отражением (а) и без отражения (б) и при разных отношениях расстройки скоростей к критической расстройке

а только от его максимальной амплитуды в вершине импульса. Ограничение величины расстройки скоростей аналогично условию малости угла пересечения пучков при полном отражении. При взаимодействии импульсов роль угла пересечения пучков играет расстройка групповых скоростей.

В процессе взаимодействия происходит постепенный уход частоты сигнального импульса  $\omega_2 = \omega_{20} + \Omega_2(z)$ . Сдвиг частоты, вызванный фазовой модуляцией благодаря кросс-модуляции, равен временной производной эйконала  $\Omega_2(z) = \partial S_2 / \partial \tau$ . После подстановки эйконала находим выражение для ухода частоты

$$\Omega_2(z) = \frac{1}{2D_2} \left[ \nu_2 \pm \sqrt{\nu_2^2 + 4k_{20}D_2[n_{nl}(\tau) - n_{nl}(\tau_{\text{зад}})]} \right],$$

где надо учесть движение по траектории  $\tau = \tau_2(z)$ . До взаимодействия импульсов имеем  $\tau_{\text{зад}}$  и  $\Omega_2(\tau_{\text{зад}}) = 0$  (при этом надо учесть знак «минус» перед радикалом). После столкновения знак «минус» сменяется на знак «плюс»; поэтому частота сигнала сдвигается на величину

$$\Omega(z_{\text{отр}}) = \nu_2 / D_2. \quad (8)$$

Этому соответствует новая расстройка скоростей, равная начальной расстройке со знаком минус:  $\nu_2(z_{\text{отр}}) = -\nu_{20}$ .

Уравнение траектории (6) имеет простое и наглядное решение в случае задания огибающей основного импульса в виде гиперболического секанса  $A_1 = E_{1\text{max}} \text{ch}^{-1}(\tau/T)$ . Дело в том, что в среде с неоднородностью  $v_{nl} = n_{nl}(0) \text{ch}^{-2}(\tau)$  существуют точные решения уравнения (6). Траектории, соответствующие полному отражению, описываются выражением

$$\text{sh}(\tau/T) = N \text{ch}(\nu_0 z/T), \quad \text{где } N = \sqrt{\nu_{\text{cr}}^2 / \nu_{20}^2 - 1}. \quad (9)$$

Траектории (9) изображены на рис. 4, а. При малой расстройке скоростей они касаются основного импульса, но не пересекают его – происходит полное внутреннее отражение одного импульса от другого, более мощного, импульса. Чем больше параметр  $N$ , тем на меньшую глубину проникает сигнал в «тело» основного импульса. В результате столкновения основной импульс тоже получает толчок, но в другую сторону (по ходу движения).

В режиме прохождения сигнала траектория задается в следующем виде (рис. 4, б):

$$\text{sh}(\tau) = M \text{sh}(\nu_{20} z); \quad M = \sqrt{1 - \nu_{\text{cr}}^2 / \nu_{20}^2} \quad (10)$$

В линейной среде с  $n_{nl} = 0$  параметр  $M = 1$ , и импульс распространяется вдоль прямой линии  $\text{sh}(\tau) = \text{sh}(\nu_{20}z)$ ;  $\tau = \nu_{20}z$ .

#### 4. Полное отражение в квадратично-нелинейной среде

В среде с квадратичной нелинейностью можно имитировать кубичную нелинейность, если трехчастотное взаимодействие  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  сделать несинхронным, вводя расстройку волновых векторов  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ , где  $k_j = n_j \omega_j / c$ . Как показывают расчеты и численное моделирование волновых уравнений, распространение сигнальной волны на частоте  $\omega_2$  можно описывать каноническим уравнением для сред с индуцированными неоднородностями (4). Только при каскадном механизме наведенная неоднородность записывается в виде

$$n_{nl} = [\gamma_2 \gamma_3 / (k_{20} \Delta k)] |A_1(\tau, z)|^2, \quad (11)$$

где  $\gamma_2, \gamma_3$  – коэффициенты квадратичной нелинейности.

Квадратичные среды обладают рядом преимуществ. Основной сигнал почти не подвержен нелинейным искажениям, так как эффект кросс-модуляции на него не действует. Величину и знак эффективной кубичной нелинейности (11) можно менять с помощью подбора расстройки волновых векторов. Теория полного отражения на каскадной нелинейности изложена в статье [6].

#### Заключение

В статье продемонстрирован эффект полного отражения сигнала от основного импульса другой частоты в средах с квадратичной и кубичной нелинейностями. Развита аналитическая теория расчета траектории сигнального пучка, сталкивающегося с мощным основным импульсом. Найдено выражение для предельной расстройки групповых скоростей; при меньшей расстройке сигнал испытывает полное внутреннее отражение. Построены точные решения для траекторий до и выше порога полного внутреннего отражения. Получена формула для ухода частоты сигнала в процессе взаимодействия с основным импульсом. Существует возможность отражения импульса от стационарного импульса, в том числе от светлого солитона, в средах с разной дисперсией у сигнала и основного импульса. Наблюдать полное отражение импульса от другого импульса можно в нелинейных оптических волокнах и фотонных кристаллах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 09-02-01028, 10-02-90010, 11-02-00681).

#### Summary

*A.P. Sukhorukov, V.Ye. Lobanov.* Optical Pulse Collision in Nonlinear Medium.

The theory of interaction of optical pulses in a nonlinear medium was developed with an account of the weak detuning of group velocities and their dispersion. The dynamics of propagation and reflection was numerically modelled. Geometrical optics for determining the signal pulse trajectories was developed. Total internal reflection conditions for nonlinear media were obtained.

**Key words:** nonlinear medium, cubic nonlinearity, decompression of pulses, detuning of group velocities.

## Литература

1. *Сухоруков А.П.* Полное отражение оптических волн в средах с индуцированной неоднородностью // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 1. – С. 189–196.
2. *Сухоруков А.П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
3. *Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. – М.: Наука, 1988. – 312 с.
4. *Островский Л.А., Степанов Н.С.* Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах // Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – Т. 14, № 4. – С. 489–529.
5. *Розанов Н.Н., Киселев Ал.С., Киселев Ан.С.* Доплеровский сдвиг частоты на неоднородностях среды, наведенных импульсами интенсивного лазерного излучения // Оптика и спектр. – 2008. – Т. 105, № 2. – С. 293–294.
6. *Sukhorikov A.P., Lobanov V.E.* Optical pulse velocity and frequency variations during cascade parametric interaction with a high powered reference pulse // Bull. Russ. Acad. of Sci.: Physics. – 2009. – V. 73, No 12. – P. 1575–1577.

Поступила в редакцию  
08.02.10

---

**Сухоруков Анатолий Петрович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фотоники и физики микроволн физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: [apsmsu@gmail.com](mailto:apsmsu@gmail.com)

**Лобанов Валерий Евгеньевич** – кандидат физико-математических наук, докторант физического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: [vallobanov@gmail.com](mailto:vallobanov@gmail.com)