УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 157, кн. 3 Физико-математические науки *2015*

УДК 532.59

НОВЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Д.В. Маклаков

Аннотация

Волновое сопротивление – важная характеристика плавающих по поверхности или движущихся под поверхностью воды тел, определению которой посвящено большое количество работ. Начало этим исследованиям было положено лордом Кельвиным (1887). Над проблемой волнового сопротивления работали такие выдающиеся ученые, как Дж.Г. Мичелл (J.H. Michell), Т.Х. Хавелок (T.H. Havelock), Л.Н. Сретенский, Н.Е. Кочин, М.В. Келдыш, М.А. Лаврентьев и многие другие. Подавляющее большинство исследований выполнено на основе линейной теории волн. Успехи нелинейной теории значительно скромнее и характеризуются почти полным отсутствием точных аналитических результатов. В работе представлена простая точная аналитическая формула для волнового сопротивления двумерного тела в жидкости конечной глубины и доказаны две теоремы о волновом сопротивлении.

Ключевые слова: двумерное тело, потенциальное течение, гравитационные волны, свободная поверхность, волновое сопротивление.

1. Введение

Рассмотрим двумерное тело, движущееся горизонтально, справа налево, с постоянной скоростью c в канале конечной глубины h. Предположим, что в системе координат, жестко связанной с телом, движение жидкости – установившееся, тогда свободная поверхность, сформировавшаяся над телом, также движется справа налево с той же самой скоростью c. Введем связанную с телом декартову систему координат с осью x, лежащей на горизонтальном дне, и осью y, направленной вертикально вверх. В этой системе координат далеко перед телом поток является равномерным и имеет скорость c. Если $y = \eta(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, – уравнение свободной поверхности, то $\eta(x) \to h$ при $x \to -\infty$.

Основным безразмерным параметром, характеризующим установившиеся течения в каналах, является число Фруда $Fr = c/\sqrt{gh}$, где g – ускорение силы тяжести. Если $Fr < 1$, то течение называется докритическим, если $Fr > 1$, то течение – сверхкритическое. Согласно линейной теории волн [1, arts. 245–246], если $Fr > 1$, то $\eta(x) \to h$ при $x \to +\infty$, и в этом случае волны вниз по потоку отсутствуют. Если $Fr = 1$, то ограниченного решения линеаризованной задачи не существует. Если же $Fr < 1$, то линейная теория предсказывает образование цуга волн, которые становятся периодическими при $x \to +\infty$. Таким образом, в линейной теории существует две возможности поведения потока справа на бесконечности: либо поток там – равномерный, либо он переходит в цуг периодических волн.

В нелинейной теории также реализуются только эти две возможности, однако ситуация здесь сложнее, поскольку решения с периодическими волнами вниз по потоку могут существовать не только для докритических, но и для сверхкритических течений (см., например, [2]). На рис. 1 показана схема течения с волнами вниз по потоку.

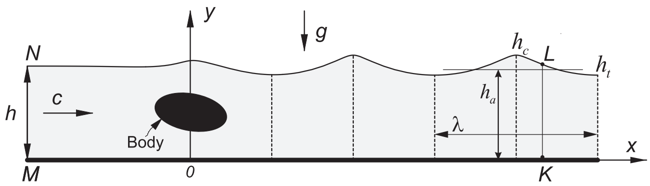

Рис. 1. Схема установившегося обтекания тела под свободной поверхностью

Предположим, что движение жидкости является безвихревым. Несмотря на отсутствие диссипации из-за генерации волн (потерь количества движения), тело испытывает сопротивление. В случае плоских течений определение этого сопротивления по параметрам волнового цуга было предметом ряда исследований. Линейная теория была развита лордом Кельвиным [3]. Он установил, что волновое сопротивление

$$R_w = \frac{1}{4}\rho g a^2 \left[1 - \frac{4\pi h/\lambda}{\operatorname{sh}(4\pi h/\lambda)}\right], \tag{1.1}$$

где ρ – плотность жидкости, λ – длина волн, $a = (h_c - h_t)/2$ – амплитуда волн (половина расстояния по вертикали от гребня до впадины). Для жидкости бесконечной глубины эта формула упрощается и принимает вид

$$R_w = \frac{1}{4}\rho g a^2. \tag{1.2}$$

Вехаузен и Лейтон [4] получили точную формулу для сопротивления, выразив его через распределение скорости в сечении волны, перпендикулярном набегающему потоку, и профиль волны в этом сечении.

Дункан [5] впервые заметил, что если некоторые интегральные характеристики волнового цуга позади тела известны, то волновое сопротивление может быть вычислено точно. С помощью теоремы об изменении количества движения и некоторых результатов работы Лонгет-Хиггинса [6] для случая бесконечно глубокой жидкости Дункан вывел формулу

$$R_w = cI + 3V - 4T, \tag{1.3}$$

где I – средний импульс, V и T – средние потенциальная и кинетическая энергии волн далеко вниз по потоку.

Формула (1.3) справедлива только для бесконечно глубокой жидкости. Главная цель настоящей работы – обобщение (1.3) на случай жидкости конечной глубины. Доказано, что для конечной глубины

$$R_w = \frac{3}{2}\rho g \delta_2^2 + \rho(gh - c^2)\delta_1, \tag{1.4}$$

где δ_1 и δ_2 – среднее и среднее квадратическое отклонения соответственно формы свободной поверхности далеко вниз по потоку от невозмущенного уровня h:

$$\delta_1 = \frac{1}{\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda} [\eta(\xi) - h]\, d\xi, \quad \delta_2^2 = \frac{1}{\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda} [\eta(\xi) - h]^2\, d\xi. \tag{1.5}$$

Как видно из (1.4), для вычисления волнового сопротивления R_w тела, движущегося с постоянной скоростью c в канале глубины h, достаточно определить два параметра δ_1 и δ_2, имеющих размерность длины и зависящих от формы свободной поверхности далеко вниз по потоку.

Обозначим через h_a среднюю глубину волн далеко вниз по потоку:

$$h_a = \frac{1}{\lambda} \int\limits_x^{x+\lambda} \eta(\xi)\, d\xi. \tag{1.6}$$

Параметр $\delta_1 = h_a - h$ есть дефект уровней (разность между средним уровнем справа на бесконечности и невозмущенным уровнем слева на бесконечности). Тот факт, что из-за нелинейных эффектов $h \neq h_a$, был отмечен в работе [7, с. 142] и позднее подтвержден численно в статье [8, с. 168]. В настоящей работе нам удалось строго доказать, что если $R_w > 0$, то $\delta_1 = h_a - h < 0$.

Для перехода к пределу $h \to \infty$ в (1.4) мы получили другое представление для R_w, эквивалентное (1.4):

$$R_w = 3V - 2T + \frac{3}{2}\rho g \delta_1^2 - \frac{\rho}{2} h \sigma_b^2, \tag{1.7}$$

где σ_b и T – соответственно средняя квадратическая скорость на дне и средняя кинетическая энергия волн, бегущих со скоростью c тела. Из (1.7) следует, что для бесконечной глубины

$$R_w = 3V - 2T. \tag{1.8}$$

Эта формула эквивалентна результату Дункана (1.3), так как $cI = 2T$ (см. [6, с. 159]).

Следует отметить, что результаты для волнового сопротивления, полученные в настоящей работе, справедливы не только для тела, движущегося под свободной поверхностью, но также и для криволинейной пластины, глиссирующей по свободной поверхности без образования брызговой струи, или для обтекания выступа на горизонтальном дне.

2. Формулы для волнового сопротивления в жидкости конечной глубины

Обозначим через $\varphi(x, y)$ потенциал установившегося течения. Тогда $v_x = \partial\varphi/\partial x$, $v_y = \partial\varphi/\partial y$ – компоненты, а $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ – модуль вектора скорости.

Рассмотрим три физических параметра, введенных Т.В. Бенжамином и М.Дж. Лайтхиллом [9] при разработке варианта приближенной теории кноидальных волн. Этими параметрами являются полный напор R (константа Бернулли, определенная таким образом, что на свободной поверхности $v^2/2 + g\eta(x) = R$), объемный расход

$$Q = \int\limits_0^{\eta(x)} v_x(x, y)\, dy,$$

и потоковая сила

$$S = \int\limits_0^{\eta(x)} \left[v_x^2(x, y) + \frac{p}{\rho} \right] dy$$

(горизонтальный поток импульса плюс сила давления, действующая на единицу поперечной длины сечения волны, деленная на плотность). В последней формуле давление отсчитывается от атмосферного, и в обеих формулах интегрирование проводится вдоль вертикального отрезка, расположенного целиком внутри жидкости.

Для целей этого раздела особую важность имеет параметр S. В самом деле, как следует из теоремы об изменении количества движения, волновое сопротивление имеет вид $R_w = \rho(S_{MN} - S_{KL})$, где S_{MN} и S_{KL} – это значения S, вычисленные для вертикальных отрезков MN и KL, расположенных впереди и позади тела, соответственно (см. рис. 1).

Рассмотрим область одного периода волн, показанную на рис. 2. Из уравнения Бернулли

$$\frac{p}{\rho} = R - gy - \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2)$$

найдем, что

$$S = R\,\eta(x) - \frac{1}{2}g\eta^2(x) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\eta(x)} (v_x^2 - v_y^2)\,dy,$$

или

$$S = R\,\eta(x) - \frac{1}{2}g\eta^2(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\int\limits_{KL}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz, \tag{2.1}$$

где $w(z)$ – комплексный потенциал течения, $dw/dz = v_x - iv_y$ – комплексно сопряженная скорость. В силу λ-периодичности dw/dz имеем

$$\int\limits_{RS} z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz + \int\limits_{LK} z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \lambda\int\limits_{KL}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz. \tag{2.2}$$

Проинтегрируем аналитическую функцию $z(dw/dz)^2$ вдоль границ области периода волн, обходя границу против часовой стрелки, и возьмем мнимую часть от этого контурного интеграла. Поскольку на дне $\mathrm{Im}[z(dw/dz)^2] = 0$, с учетом уравнения (2.2) из теоремы Коши получаем

$$\lambda\,\mathrm{Im}\int\limits_{KL}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \mathrm{Im}\int\limits_{LS} z\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Но

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = v^2 e^{-i\theta} ds = v^2(dx - idy), \tag{2.3}$$

где θ – угол наклона вектора скорости на свободной поверхности LS, а ds – элемент дуги кривой LS. Принимая во внимание, что $v^2 = 2(R - gy)$, выводим, что

$$\lambda\,\mathrm{Im}\int\limits_{KL}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = \mathrm{Im}\int\limits_{LS} v^2(x+iy)(dx-idy) = 2\int\limits_{LS}(Ry-gy^2)\,dx - 2\int\limits_{LS} x(R-gy)\,dy.$$

Интегрируя второй интеграл по частям, находим

$$\lambda\,\mathrm{Im}\int\limits_{KL}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz = 2\int\limits_{LS}\left(2Ry - \frac{3}{2}gy^2\right)dx - 2\lambda\left[R\eta(x) - \frac{1}{2}g\eta^2(x)\right].$$

Из этого соотношения и (2.1) выводим новое представление для потоковой силы

$$S = \frac{1}{\lambda}\int_x^{x+\lambda}\left[2R\,\eta(\xi) - \frac{3}{2}g\eta^2(\xi)\right]d\xi. \tag{2.4}$$

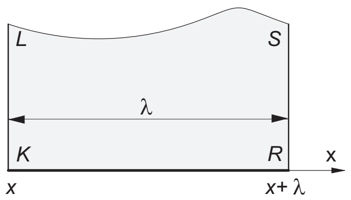

Рис. 2. Область одного периода волн

В этом представлении интегрирование проводится уже не по вертикальному отрезку, а по одному периоду линии свободной поверхности.

Так как для однородного набегающего потока $\eta(x) = h$, из (2.4) следует, что $S_{MN} = 2hR - 3gh^2/2$. Но $R_w/\rho = S_{MN} - S$, следовательно,

$$\frac{R_w}{\rho} = \frac{1}{\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda}\left(2hR - \frac{3}{2}gh^2 - 2Ry + \frac{3}{2}gy^2\right)dx =$$

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda}\left[\frac{3}{2}g(y-h)^2 - (2R-3gh)(y-h)\right]dx.$$

Учитывая, что $2R = c^2 + 2gh$, приходим к формуле (1.4).

Чтобы вывести формулу (1.7), из которой следует, что $R_w = 3V - 2T$ в жидкости бесконечной глубины, сначала заметим, что

$$V = \frac{\rho g}{2}\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right), \tag{2.5}$$

где V – средняя потенциальная энергия волн:

$$V = \frac{\rho g}{2\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda}[\eta(\xi) - h_a]^2\,d\xi, \tag{2.6}$$

а длины δ_1 и δ_2 определены в (1.5). Из уравнений (1.4), (2.5) и (2.6) следует, что

$$R_w = 3V + \frac{3}{2}\rho g\delta_1^2 + \rho(gh - c^2)\delta_1, \tag{2.7}$$

Выразим теперь третий член в (2.7) через среднюю кинетическую энергию T волн, бегущих со скоростью тела c. Величина T определяется по формуле

$$T = \frac{\rho}{2\lambda}\iint\limits_{\Omega_z}[(v_x - c)^2 + v_y^2]\,dxdy = \frac{\rho}{2\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda}d\xi\int\limits_0^{\eta(x)}[(v_x - c)^2 + v_y^2]\,dy, \tag{2.8}$$

где Ω_z – область одного периода волн.

Обозначим через c_b и σ_b средние квадратические скорости на дне в установившемся и неустановившемся движениях соответственно:

$$c_b^2 = \frac{1}{\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda}v_x^2(\xi,0)\,d\xi, \quad \sigma_b^2 = \frac{1}{\lambda}\int\limits_x^{x+\lambda}[v_x(\xi,0) - c]^2\,d\xi. \tag{2.9}$$

Обычное предположение в нелинейной теории периодических волн (см., например, [6, 10]) состоит в том, что скорость их перемещения относительно неподвижного дна равна

$$c_a = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{x}^{x+\lambda} v_x(\xi, y)\,d\xi = \frac{C}{\lambda}, \tag{2.10}$$

где

$$C = \varphi(x+\lambda, y) - \varphi(x, y) \tag{2.11}$$

есть приращение потенциала в волне (циркуляция в установившемся течении). Таким образом, c_a – это средняя скорость частиц жидкости в системе координат, движущейся вместе с волнами, вдоль горизонтального уровня, целиком лежащего в области одного периода волн.

Как было отмечено в работе [7, с. 142] и позднее численно подтверждено в статье [8, с. 168], для волн, генерируемых движущемся телом, это предположение не выполняется, то есть $c \neq c_a$. С учетом этого обстоятельства запишем

$$T = \frac{\rho}{2}(c_a Q + c^2 h_a - 2cQ). \tag{2.12}$$

Простейший метод доказательства (2.12) – это применение формулы (см. [6, с. 160])

$$\iint\limits_{\Omega_z} (v_x^2 + v_y^2)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega_w} d\varphi d\psi = CQ,$$

где φ и ψ – потенциал скорости и функция тока, Ω_w область одного периода волн в плоскости комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$. Формула следует из соотношения $\partial(\phi, \psi)/\partial(x, y) = v_x^2 + v_y^2$, которое непосредственно приводит к (2.12).

Учитывая, что $Q = ch$, из (2.12) выводим

$$2T = \rho(cc_a h + c^2 h_a - 2c^2 h). \tag{2.13}$$

Леви-Чивита [11, с. 277] впервые заметил, что в любом периодическом потенциальном течении средние квадратические скорости

$$\left(\frac{1}{\lambda}\int\limits_{L} v^2 dx\right)^{1/2}$$

вдоль одного периода L любой линии тока равны между собой. Проще всего этот факт доказывается интегрированием функции $(dw/dz)^2$ по границе одного периода между двумя линиями тока, применением формулы (2.3) и теоремы Коши. Выбрав в качестве этих двух линий тока свободную поверхность и дно, с учетом граничного условия $v^2 + 2g\eta(x) = 2R$ на свободной поверхности получим

$$c_b^2 + 2gh_a = 2R. \tag{2.14}$$

Из определения (2.9) для σ_b^2 следует, что $\sigma_b^2 = c_b^2 - 2cc_a + c^2$. Поскольку $2R = c^2 + 2gh$, выводим, что

$$\frac{\rho}{2} h\sigma_b^2 = \rho h(c^2 - g\delta_1 - cc_a). \tag{2.15}$$

Теперь, сложив соотношения (2.13) и (2.15), заключаем,что

$$2T + \frac{\rho}{2} h\sigma_b^2 = \rho\delta_1(c^2 - gh). \tag{2.16}$$

Формула (1.7) следует из (2.7) и (2.16).

Рассмотрим теперь случай, когда волны вниз по потоку отсутствуют, то есть поток является равномерным справа на бесконечности, имеет скорость c_d и глубину h_d. В этом случае формула (1.4) остается справедливой, так как при ее выводе использовалась только периодичность течения справа на бесконечности. Но теперь,

$$\eta(x) = h_d, \quad h_a = h_d, \quad \delta_1 = h_d - h, \quad \delta_2^2 = \delta_1^2,$$

и формула (1.4) принимает вид

$$R_w = \rho g h^2 \frac{\delta_1}{h} \left(\frac{3}{2} \frac{\delta_1}{h} + 1 - Fr^2 \right). \tag{2.17}$$

Ясно, что если $\delta_1 = 0$, то $R_w = 0$. Рассмотрим случай, когда $\delta_1 \neq 0$, то есть $h_d \neq h$, $c_d \neq c$. Так как константа Бернули и расход жидкости справа и слева на бесконечности одинаковые, то

$$ch = c_d h_d, \quad c^2 + 2gh = c_d^2 + 2gh_d. \tag{2.18}$$

Если мы обозначим $\varkappa = h_d/h$, то $\delta_1/h = \varkappa - 1$. Использовав уравнения (2.17) и (2.18), после ряда преобразований получим следующие соотношения:

$$R_w = \frac{\rho g h^2}{2} \frac{(1-\varkappa)^3}{1+\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{Fr^2}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{Fr^2}} \right), \quad Fr_d = \frac{Fr}{\varkappa^{3/2}}, \tag{2.19}$$

где $Fr_d = c_d/\sqrt{gh_d}$ – число Фруда для равномерного потока справа на бесконечности.

Как следует из (2.19), если число Фруда $Fr < 1$, то $\varkappa < 1$, $R_w > 0$, а $Fr_d > 1$. Такие безволновые течения, докритические далеко вверх по потоку и сверхкритические далеко вниз по потоку, называются «критическими» (*critical free surface flows* [12]) или «гидравлическими прыжками вниз»(*hydraulic falls* [13]).

3. Теоремы о волновом сопротивлении

Предположим, что в системе координат, движущейся вместе с телом, волны далеко позади тела полностью определены. Это означает, что уравнение свободной поверхности известно, равно как известны и все параметры волн, включая полный напор R и объемный расход Q. Чтобы определить волновое сопротивление R_w по формуле (1.4), необходимо найти параметры набегающего потока: его скорость c и невозмущенный уровень h. Из уравнения Бернулли и закона сохранения массы следует, что параметры h и c должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{cases} ch = Q, \\ c^2 + 2gh = 2R. \end{cases} \tag{3.1}$$

Обозначим через h_c и h_t высоты горбов и впадин волн над дном и введем функцию

$$S_u(c,h) = \frac{1}{2} h(2c^2 + gh),$$

где $S_u(c,h)$ – потоковая сила для равномерного потока со скоростью c и глубиной h.

Система (3.1) была тщательно исследована в работах Кеди и Норбюри [14] и Бенжамина [15]. Переформулировав некоторые результаты этих авторов в наших обозначениях, придем к следующей теореме.

Теорема 1. *Предположим, что волны являются периодическими, симметричными и стационарными и вычислим для этих волн параметры Q, R и S. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Параметры Q и R удовлетворяют неравенству*

$$8R^3 > 27g^2Q^2. \tag{3.2}$$

При выполнении условия (3.2) система (3.1) всегда имеет ровно два положительных решения c_1, h_1 и c_2, h_2. Для первого решения c_1, h_1 набегающий поток является докритическим, то есть $c_1^2 < gh_1$, для второго решения c_2, h_2 набегающий поток – сверхкритический, то есть $c_2^2 > gh_2$. Глубины h_1 и h_2 докритического и сверхкритического потоков удовлетворяют неравенствам

$$h_2 < h_t < h_1 < h_c. \tag{3.3}$$

2) *Для потоковой силы S справедливо следующее двухстороннее неравенство*

$$S_u(c_2, h_2) < S < S_u(c_1, h_1). \tag{3.4}$$

Первое утверждение этой теоремы есть размерная переформулировка предложения 1R из [14] и предложения 2 из [15]. Левое неравенство в (3.4) было доказано в [14, Предложение 2] и [15, Предложение 3]. Правое неравенство в (3.4) было доказано Бенжамином в [15, Предложение 4] более чем через сорок лет после того, как гипотеза о том, что потоковая сила S удовлетворяет двухстороннему неравенству (3.4), была высказана Бенжамином и Лайтхиллом в работе [9].

Следствие 1. *Для докритического решения c_1, h_1 системы (3.1) прямая невозмущенного уровня $y = h_1$ пересекает свободную поверхность волн вниз по потоку и волновое сопротивление $R_w > 0$; для сверхкритического решения c_2, h_2 волны лежат выше невозмущенного уровня $y = h_2$ и $R_w < 0$.*

Утверждение следствия, касающееся расположения невозмущенного уровня относительно волн, следует из неравенств (3.3). Утверждение о знаке волнового сопротивления R_w вытекает из двухсторонней оценки (3.4), поскольку

$$R_w = S_u(c_i, h_i) - S, \quad i = 1, 2.$$

Решения с $R_w < 0$ мы рассматриваем как физически нереализуемые и их отбрасываем. Таким образом, при определении параметров набегающего потока из системы (3.1) всегда полагается, что $c = c_1$, $h = h_1$, и, следовательно, число Фруда $Fr = c/\sqrt{gh} < 1$.

Из следствия 1 вытекает, что физически реализуемое, установившееся обтекание любого препятствия под свободной поверхностью жидкости с образование волн вниз по потоку всегда является докритическим, то есть $Fr < 1$. Более того, установившееся обтекание препятствия под свободной поверхностью сверхкритическим потоком с образованием цуга периодических волн далеко позади препятствия (см. рис. 3) является физически нереализуемым, поскольку для любого такого обтекания $R_w < 0$ (волновая тяга вместо волнового сопротивления). Следует отметить, что сверхкритическое волновое обтекание препятствий различных типов было рассмотрено в работах [2, 16, 17], однако вопрос о волновом сопротивлении в этих работах не обсуждался. Исследования авторов работ [2, 16, 17] демонстрируют второй недостаток подобных течений (помимо волновой тяги): для заданных глубины h_2, скорости набегающего потока $c_2 > \sqrt{gh_2}$ и заданной формы тела существует

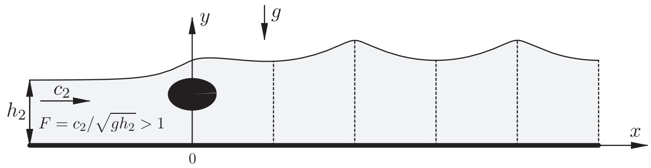

Рис. 3. Схема волнового обтекания сверхкритическим потоком

однопараметрическое семейство таких течений, что указывает на неустойчивость потока.

Утверждения теоремы 1 и следствия 1 относятся к случаю, когда вниз по потоку образуется цуг нелинейных периодических волн. Сформулируем теперь теорему, которая включает случай $\eta_*(x) \to h_d$ при $x \to +\infty$, то есть случай, когда волны вниз по потоку отсутствуют. Эта теорема связывает знак волнового сопротивления с дефектом уровней $\delta_1 = h_a - h$ или со знаком величины $Fr - 1$.

Теорема 2. 1) $R_w > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\delta_1 < 0$*, или* $R_w > 0$ *тогда и только тогда, когда* $Fr < 1 \bigcup \delta_1 \neq 0$*;*

2) $R_w < 0$ *тогда и только тогда, когда* $\delta_1 > 0$*, или* $R_w < 0$ *тогда и только тогда, когда* $Fr > 1 \bigcup \delta_1 \neq 0$*;*

3) $R_w = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\delta_1 = 0$*;*

4) *если* $\delta_1 = 0$ (*или* $R_w = 0$)*, то волны вниз по потоку отсутствуют, а равномерные потоки далеко перед телом и далеко позади тела совпадают.*

5) *если* $Fr = 1$ *и решение задачи существует, то* $\delta_1 = 0$ *и* $R_w = 0$ *со всеми выводами, вытекающими из пункта* 4)*.*

Доказательство. Основой доказательства служит новое тождество (2.16) для нелинейных периодических волн. Сначала рассмотрим случай, когда вниз по потоку имеются волны. Тогда в тождестве (2.16) левая часть положительна. Значит, его правая часть

$$(c^2 - gh)\delta_1 > 0.$$

Это означает, что обе величины $c^2 - gh$ и δ_1 не обращаются в нуль и знаки этих величин совпадают. Но согласно следствию 1 волновое сопротивление $R_w \neq 0$, и знак $c^2 - gh$ противоположен знаку R_w. Отсюда вытекают утверждения 1) и 2) для решений с волнами вниз по потоку.

Теперь рассмотрим безволновые течения с $\varkappa = h_d/h \neq 1$. Из первых двух соотношений в (2.19) следует, что $R_w \neq 0$, причем знак R_w противоположен знаку $\delta_1 = h(\varkappa - 1)$ и знаку $Fr - 1$. И мы снова приходим к утверждениям 1) и 2) теоремы 2.

Таким образом, для безволновых течений с $\varkappa = h_d/h \neq 1$ и для течений с волнами всегда имеем $R_w \neq 0$, $\delta_1 \neq 0$. Следовательно, R_w может обращаться в нуль только в оставшемся, еще не рассмотренном случае, когда равномерные потоки вверх и вниз по течению совпадают. Для этого случая очевидно, что $\delta_1 = 0$, и, как следует из (2.17), волновое сопротивление $R_w = 0$. Отсюда вытекают утверждения 3) и 4).

Пятое утверждение вытекает из того факта, что по теореме 1 для всех течений с волнами вниз по потоку $Fr \neq 1$. То же самое имеет место для всех безволновых течений с $\varkappa \neq 1$, что вытекает из первых двух формул в (2.19). Остается всего одна возможность $Fr = Fr_d = 1$. Этим завершается доказательство теоремы.

□

Первое утверждение теоремы 2 показывает, что для физически реализуемых течений с положительным волновым сопротивлением всегда существует дефект уровней $\delta_1 < 0$. Теперь в цепочку неравенств (3.3) теоремы 2 можно внести среднюю глубину волн h_a:

$$h_2 < h_t < h_a < h_1 < h_c.$$

Из первых двух утверждений теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *В условиях теоремы* 2
1) *если* $\delta < 0$, *то* $Fr < 1$;
2) *если* $\delta > 0$, *то* $Fr > 1$.

Обратное утверждение этого следствия не верно, поскольку безволновые решения с $\delta = 0$, $Fr = Fr_d$ существуют как при $Fr < 1$ (см. [18–20]), так и при $Fr > 1$ (см. [21, 22]).

4. Определение параметров набегающего потока

Введем безразмерный параметр

$$p = \sqrt{\frac{8R^3}{27g^2Q^2}}.$$

Как следует из (3.2), параметр $p > 1$. Система (3.1) может быть преобразована к алгебраическому кубическому уравнению относительно квадрата числа Фруда:

$$(Fr^2 + 2)^3 - 27p^2Fr^2 = 0. \tag{4.1}$$

Для доказательства (4.1) запишем систему (3.1) в эквивалентной форме:

$$\frac{c^2}{gh} = \frac{Q^2}{gh^3}, \quad \left(\frac{c^2}{gh} + 2\right)^3 = \frac{8R^3}{g^3h^3}.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим (4.1).

Легко видеть, что неравенство $p > 1$ является необходимым и достаточным условием существования действительных корней уравнения (4.1). Более того, при выполнении условия $p > 1$ уравнение (4.1) всегда имеет два положительных корня: $Fr^2 < 1$ и $Fr^2 > 1$. Применив к уравнению (4.1) тригонометрический метод, после ряда преобразований найдем корень, удовлетворяющий условию $Fr < 1$:

$$Fr^2 = 6p\sin\left[\frac{1}{3}\arcsin\left(p^{-1}\right)\right] - 2 < 1. \tag{4.2}$$

После отыскания числа Фруда Fr мы можем определить параметры набегающего потока

$$h = \frac{1}{Fr^2 + 2}\,\frac{2R}{g}, \quad c = Fr\sqrt{gh}. \tag{4.3}$$

5. Выводы

Волновое сопротивление – это важный параметр течений со свободной поверхностью, который достаточно трудно вычислить точно, особенно для нелинейных задач. Стандартный метод его отыскания, состоящий в интегрировании распределения давлений по поверхности обтекаемого тела, может привести к довольно неожиданным результатам. Дело в том, что величина этого параметра достаточно мала, и из-за вычислительных ошибок можно легко получить волновую тягу вместо сопротивления. В разд. 2 статьи выведена формула (1.4), которая выглядит более эффективной, чем стандартное интегрирование. В самом деле, эта формула содержит всего два неизвестных параметра δ_1 и δ_2, которые являются соответственно средним и средним квадратическим отклонениями свободной поверхности далеко вниз по потоку от невозмущенного уровня. При решении задачи со свободной поверхностью любым методом: точным или приближенным, аналитическим или численным – отыскание формы свободной поверхности является необходимым элементом. Но если этот элемент известен, определение параметров δ_1 и δ_2 не составляет труда, а значит, может быть и легко вычислено волновое сопротивление.

В разд. 3 доказаны две теоремы о волновом сопротивлении. Здесь очень полезными оказались результаты Кеди и Норбюри [14] и Бенжамина [15]. С помощью результатов этих авторов было строго установлено, что волновое обтекание препятствия с положительным волновым сопротивлением существует только, если набегающий поток – докритический, то есть $F = c/\sqrt{gh} < 1$. Для всех решений с волнами вниз по потоку, полученных в результате возмущения сверхкритического набегающего потока, волновое сопротивление будет отрицательным.

В разд. 4 были выведены явные аналитические формулы, связывающие параметры набегающего потока с параметрами волн вниз по потоку.

Таким образом, в работе введены некоторые новые, полезные волновые характеристики, присущие любой системе установившихся периодических волн, среди них скорость c и глубина h равномерного потока, который без диссипации способен создать эту систему благодаря некоторому возмущению, помещенному в поток. Например, с помощью уравнения (4.2) можно подсчитать число Фруда для любой системы волн, генерируемой движущимся телом. Самое интересное заключается в том, что это число Фруда всегда меньше единицы (иначе волновое сопротивление будет отрицательным), что, вообще говоря, подтверждает выводы линейной теории. В число этих полезных волновых характеристик также должно быть включено и волновое сопротивление.

Работа была поддержана Российским научным фондом (проект № 14-19-01633).

Summary

D.V. Maklakov. New Analytical Formulae and Theorems for the Wave Resistance.

Wave resistance is an important characteristic of bodies floating on a free surface or moving under it. A significant number of works pioneered by Lord Kelvin (1887) have been devoted to determination of this characteristic. The problem was studied by such eminent scientists as J.H. Michell, T.H. Havelock, L.N. Sretenskii, N.E. Kochin, M.V. Keldysh, M.A. Lavrentiev, and by many others. The overwhelming majority of investigations were carried out in the framework of the linear wave theory. Successes of the nonlinear theory are much more modest and can be characterized by the almost utter absence of accurate analytical results. A simple exact analytical formula for the wave resistance of a two-dimensional body, which moves in a fluid of finite depth, is presented in this work. Two theorems on the wave resistance are proved.

Keywords: two-dimensional body, potential flow, gravity waves, free surface, wave resistance.

Литература

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932. – 738 p.

2. *Dias F., Vanden-Broek J.-M.* Generalised critical free-surface flows // J. Eng. Math. – 2002. – V. 42, No 3–4. – P. 291–301.

3. *Lord Kelvin* On ship waves // Proc. Inst. Mech. Engs. (London). – 1887. – V. 38. – P. 409–434.

4. *Wehausen J.V., Laitone E.V.* Surface waves // Encyclopaedia of Physics. – Berlin: Springer Verlag, 1960. – V. IX. – P. 446–778.

5. *Duncan J.H.* A note on the evaluation of the wave resistance of two-dimensional bodies from measurements of the downstream wave profile // J. Ship Res. – 1983. – V. 27, No 2. – P. 90–92.

6. *Longuet-Higgins M.S.* Integral properties of periodic gravity waves of finite amplitude // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1975. – V. 342. – P. 157–174.

7. *Whitham G.B.* Mass, momentum and energy flux in water waves // J. Fluid Mech. – 1962. – V. 12. – P. 135–147.

8. *Salvesen N., von Kerczek C.* Comparison of numerical and perturbation solutions of two-dimensional nonlinear water-wave problems // J. Ship Res. – 1976. – V. 20, No 3. – P. 160–170.

9. *Benjamin T.B., Lighthill M.J.* On cnoidal waves and bores. // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1954. – V. 224. – P. 448–460.

10. *Cokelet E.D.* Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1977. – V. 286. – P. 183–230.

11. *Levi-Civita T.* Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie // Math. Ann. – 1925. – V. 93. – P. 264–314.

12. *Forbes L.K.* Critical free-surface flow over a semi-circular obstruction // J. Eng. Math. – 1988. – V. 22, No 1. – P. 3–13.

13. *Shen S.S.P., Shen M.C.* On the limit of subcritical free-surface flow over an obstruction // Acta Mech. – 1990. – V. 82, No 3–4. – P. 225–230.

14. *Keady G., Norbury J.* Waves and conjugate streams // J. Fluid Mech. – 1975. – V. 70. – P. 663–671.

15. *Benjamin T.B.* Verification of the Benjamin–Lighthill conjecture about steady water waves // J. Fluid Mech. – 1995. – V. 295. – P. 337–356.

16. *Dias F., Vanden-Broek J.-M.* Trapped waves between submerged obstacles // J. Fluid Mech. – 2004. – V. 509. – P. 93–102.

17. *Binder B.J., Vanden-Broek J.-M., Dias F.* On satisfying the radiation condition in free-surface flows // J. Fluid Mech. – 2009. – V. 624. – P. 179–189.

18. *Forbes L.K.* Non-linear, drag-free flow over a submerged semi-elliptical body // J. Eng. Math. – 1982. – V. 16, No 2. – P. 171–180.

19. *Maklakov D.V.* Flow over an obstruction with generation of nonlinear waves on the free surface: liniting regimes // Fluid Dynamics. – 1995. – V. 30, No 2. – P. 245–253.

20. *Holmes R.J., Hocking G.C., Forbes L.K., Baillard N.Y.* Waveless subcritical flow past symmetric bottom topography // Eur. J. Appl. Math. – 2013. – V. 24, No 2. – P. 213–230.

21. *Forbes L.K., Schwartz L.W.* Free-surface flow over a semicircular obstruction // J. Fluid Mech. – 1982. – V. 114. – P. 299–314.

22. *Vanden-Broek J.-M.* Free-surface flow over an obstruction in a channel // Phys. Fluids. – 1987. – V. 30, No 8. – P. 2315–2317.

Поступила в редакцию
30.06.15

Маклаков Дмитрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *dmaklak@kpfu.ru*