УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 154, кн. 2 Физико-математические науки *2012*

УДК 519.14

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С $k = 11$, $\lambda = 4$

К.С. Ефимов, А.А. Махнев

Аннотация

Хорошо известно, что если Γ – связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ – многоугольник или полный многодольный граф $K_{n\times 2}$. В работах А.А. Махнева и его учеников были изучены вполне регулярные графы с $2 \le b_1 \le 5$. В ранней статье авторов изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ было редуцировано к исследованию графов с $k \in \{10, 11, 12\}$. Авторы и М.С. Нирова рассмотрели случай $b_1 = 6$, $k = 10$. В настоящей работе изучены вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ и $k = 11$.

Ключевые слова: граф, вполне регулярный граф.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a. Под собственными значениями графа понимаются собственные значения его матрицы смежности. В дальнейшем слово «подграф» будет означать индуцированный подграф.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v,k,λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое ребро графа Γ лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v,k,λ,μ), если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Через $K_{m_1,\ldots,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф с долями порядков $m_1,\ldots,m_n$. Если $m_1 = \cdots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Граф $K_{1,m}$ называется m-*лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a,b\},\{c,d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X\times Y$ называется $m\times n$ *решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1,y_1), (x_2,y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$.

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликой* (*кокликой*).

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в регулярном графе Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Положим $a_i(u,w) = k - b_i(u,w) - c_i(u,w)$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v,k,λ) значение $b_1 = b_1(u,w)$ не зависит от выбора ребра $\{u,w\}$ и равно $k-\lambda-1$. Граф Γ диаметра d называется дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{b_0, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если для любого $i \in \{0, \ldots, d\}$ и любых вершин u, w, находящихся на расстоянии i в Γ, имеем $b_i(u, w) = b_i$ и $c_i(u, w) = c_i$.

В следствии 1.1.6 из [1] доказано, что если Γ – связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$, то Γ – многоугольник или полный многодольный граф $K_{n\times 2}$. В работах А.А. Махнева и его учеников [2–4] были изучены вполне регулярные графы с $2 \le b_1 \le 5$. В статье [5] изучение вполне регулярных графов с $b_1 = 6$ было редуцировано к исследованию графов с $k \in \{10, 11, 12\}$. В [6] рассмотрен случай $b_1 = 6$, $k = 10$. В настоящей работе изучаются вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ и $k = 11$.

Теорема 1. *Пусть Γ – связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 11, 4, \mu)$. Тогда $\mu = 3$, диаметр Γ равен 3, $v = 36$ и $\Gamma_3(u)$ является 2-кликой для некоторой вершины u.*

1. Предварительные результаты

Приведем некоторые вспомогательные результаты, необходимые для доказательства теоремы.

Лемма 1. *Пусть Γ – сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ). Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n-m$, $-m$ графа Γ – целые числа, где $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ и кратность собственного значения $n - m$ равна $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если m – целое число, большее 1, то $m - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1}, \; n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1}.$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [7]. □

Лемма 2. *Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, являющийся антиподальным r-накрытием n-клики. Тогда $n - 2 - \lambda = (r-1)\mu$ и Γ имеет новые собственные значения θ и τ, являющиеся корнями квадратного уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - (n-1)$, и кратность θ равна*

$$m_\theta = \frac{n(n-1)(r-1)}{n-1+\theta^2}.$$

Доказательство. См. [1, следствие 4.2.6]. □

Лемма 3. *Пусть Γ – вполне регулярный граф с $b_1 = 6$ и $k = 11$. Тогда $\mu = 3$ и диаметр Γ больше 2.*

Доказательство. Пусть Γ – связный вполне регулярный граф с параметрами $(v, 11, 4, \mu)$. Тогда $\mu \in \{1, 2, 3, 6\}$. В случае $\mu = 1$ окрестность любой вершины является объединением изолированных клик, противоречие с тем, что $\lambda + 1 = 5$ не делит $k = 11$.

Пусть $\mu = 6$. Тогда $k_2 = 11$. Если диаметр Γ равен двум, то $v = 23$, противоречие с тем, что vk нечетно. Если диаметр Γ больше двух, то по теоремеНоймайера Γ – граф Тейлора. Но тогда окрестность любой вершины в Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(11, 4, \lambda', 2)$ и $\lambda' = 0$, противоречие с тем, что сильно регулярный граф с параметрами $(11, 4, 0, 2)$ не существует.

Допустим, что диаметр Γ равен 2. Тогда Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(34, 11, 4, 3)$ или $(45, 11, 4, 2)$. Но в первом случае $vk\lambda$ не делится на 3, а во втором случае vk нечетно, противоречие.

Пусть $\mu = 2$. Покажем сначала, что Γ – граф Тервиллигера. В противном случае Γ содержит 4-цикл u, w, x, y. Положим $X_i = X_i(\{u, w, x, y\})$, $x_i = |X_i|$. Тогда X_2 содержит по 4 вершины, смежных с концами ребер из $\{u, w, x, y\}$, $x_2 = 16$. Далее, X_1 содержит по 1 вершине, смежной с вершиной из $\{u, w, x, y\}$. Теперь для $z \in X_1 \cap [u]$ подграф $[u] \cap [z]$ содержит не менее 2 вершин из $[w]$ или из $[y]$, это противоречит тому, что $|[w] \cap [z]| \geq 3$ или $|[y] \cap [z]| \geq 3$.

Зафиксируем вершину u из Γ и пусть Δ – связная компонента графа $[u]$. Тогда Δ – регулярный граф степени 4 диаметра 2 с $\mu_\Delta = 1$. По теореме 1.17.1 из [1] граф Δ сильно регулярен с параметрами $(v', 4, \lambda', 1)$. Так как $v' \leq 11$, то $\lambda' = 2$, противоречие с тем, что окрестность вершины в Δ – объединение изолированных 3-клик. $\square$

2. Случай $\mu = 3$, редукция к случаю $k_3 = 8$

В этом параграфе предполагается, что Γ – вполне регулярный граф с параметрами $(v, 11, 4, 3)$. По лемме 3 диаметр Γ больше 2. Зафиксируем обозначения: u, w, x, y – геодезический 3-путь в Γ, $\Phi = [u] \cap \Gamma_2(y)$, $\Psi = [y] \cap \Gamma_2(u)$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Тогда $k_2 = 22$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любых двух вершин a, e с $d(a, e) = 2$ подграф $[a] \cap [e]$ не является кокликой, и если $[a] \cap [e]$ – объединение изолированной вершины и ребра, то $b_2(a, e) + b_2(e, a) = 0$;*

(2) *если $d(a, e) = 2$ и $[a] \cap [e]$ является геодезическим 2-путем, то $b_2(a, e) \leq 2$;*

(3) *если $x, x' \in \Gamma_2(u)$ и подграфы $[u] \cap [x]$, $[u] \cap [x']$ являются кликами, то либо $|[u] \cap [x] \cap [x']| \leq 1$, либо $[u] \cap [x] = [u] \cap [x']$;*

(4) *верны неравенства $c_3(u, y) \geq 5$ и $b_2(u, x) \leq 4$.*

Доказательство. Пусть $d(a, e) = 2$. Тогда $|([a] - [e]) \cup ([e] - [a])| = 16$.

Если $[a] \cap [e]$ является кокликой, то число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ равно 24. Если некоторая вершина из $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ смежна с тремя вершинами из $[a] \cap [e]$, то каждая из оставшихся вершин в $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ смежна не более чем с одной вершиной из $[a] \cap [e]$ и число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ не больше 18. Противоречие. Значит, $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ содержит три вершины, смежные с парами вершин из $[a] \cap [e]$, и число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ не больше 19. Противоречие.

Если $[a] \cap [e]$ является объединением изолированной вершины и ребра, то число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ равно 20. Если некоторая вершина из $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ смежна с тремя вершинами из $[a] \cap [e]$, то $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ содержит не более одной вершины, смежной с двумя вершинами из $[a] \cap [e]$, и число ребер между $[a] \cap [e]$ и $([a] - [e]) \cup ([e] - [a])$ не больше 19. Противоречие. Значит, $[a] - [e]$ и $[e] - [a]$ содержат по две вершины, смежные с парами вершин из $[a] \cap [e]$ и по 6 вершин, смежных точно с одной вершиной из $[a] \cap [e]$. Отсюда $b_2(a, e) + b_2(e, a) = 0$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $d(a, e) = 2$ и подграф $[a] \cap [e]$ является геодезическим 2-путем w_1, w_2, w_3. Тогда $[w_1] \cap [w_3] = \{u, w_2, x\}$, поэтому $[e] \cap ([w_1] \cup [w_3])$ содержит 6 вершин из $\Gamma_2(a)$ и $b_2(a, e) \leq 2$. Утверждение (2) доказано.

Пусть x, $x' \in \Gamma_2(u)$ и подграфы $[u] \cap [x]$, $[u] \cap [x']$ являются кликами. Тогда либо $|[u] \cap [x] \cap [x']| \leq 1$, либо $[u] \cap [x] = [u] \cap [x']$. В противном случае $|[u] \cap [x] \cap [x']| = 2$

и для двух вершин $w, w' \in [u] \cap [x] \cap [x']$ подграф $[w] \cap [w']$ содержит u, x, x' и по вершине из $[u] \cap [x]$ и из $[u] \cap [x']$. Противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть $c_3(u,y) = 3$. Тогда каждая вершина из Φ смежна с каждой вершиной из Ψ. Для двух несмежных вершин w, w' из Φ подграф $[w] \cap [w']$ содержит u и три вершины из Ψ, противоречие. Значит, подграф $\Phi \cup \Psi$ является 6-кликой, противоречие с тем, что λ-подграф двух вершин из Ψ содержит y и четыре вершины из $\Phi \cup \Psi$.

Пусть $c_3(u,y) = 4$. Тогда $\Phi = \{w_1, \ldots, w_4\}$, $\Psi = \{x_1, \ldots, x_4\}$ и можно считать что вершина w_i не смежна с вершиной x_i. Заметим, что подграф Φ не содержит геодезических 2-путей $\{w_i, w_j, w_l\}$, иначе $|[w_i] \cap [w_j]| \geq 4$, противоречие. Поэтому Φ и Ψ являются объединениями изолированных клик. Очевидно, что Φ и Ψ не являются кликами. Если Φ содержит треугольник $\{w_i, w_j, w_l\}$, то подграф $[w_1] \cap [w_2]$ содержит u, w_3, x_3, x_4, а подграф $[w_1] \cap [w_4]$ – u, x_2, x_3. Поэтому каждая вершина из $[u] - \Phi$ смежна не более чем с одной вершиной из Φ. Противоречие с тем, что число ребер между $[u] - \Phi$ и Φ равно 10. Итак, Φ не содержит треугольников, и число ребер между $[u] - \Phi$ и Φ не меньше 12. Противоречие с тем, что не более двух вершин из $[u] - \Phi$ смежны с парами вершин из Φ. Таким образом, $c_3(u,y) \geq 5$.

Пусть $b_2(u,x) = 6$. Тогда $[x] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, x_2\}$, причем каждая вершина из $[x] \cap [u]$ смежна с x_1, x_2. Отсюда $([u] \cap x^{\perp}) \cup \{x_1, x_2\}$ является 6-кликой, противоречие с тем, что λ-подграф двух вершин из $[x] \cap [u]$ содержит u и четыре вершины из $([u] \cap x^{\perp}) \cup \{x_1, x_2\}$.

Пусть $b_2(u,x) = 5$, $[x] \cap \Gamma_3(u) = \{y_1, \ldots, y_5\}$ и $[x] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, x_2, x_3\}$. Тогда число ребер между $([w] \cap \Gamma_2(u)) - \{x\}$ и $\{y_1, \ldots, y_5\}$ равно 10. Далее, каждая вершина из $[x] \cap [u]$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\{x_1, x_2, x_3\}$. По утверждению (2) подграф $[u] \cap [x] = \{w_1, w_2, w_3\}$ является 3-кликой и можно считать, что вершина w_i не смежна с x_i. Если $\{x_1, x_2, x_3\}$ является 3-кликой, то подграф $\{w_1, w_2, w_3, x_1, x_2, x_3\}$ является октаэдром, а $x \cap \Gamma_3(u)$ является 6-кликой. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $([w] \cap \Gamma_2(u)) - \{x\}$ смежна с двумя вершинами из $\{y_1, \ldots, y_5\}$.

Если вершина x' из $([w] \cap \Gamma_2(u)) - \{x\}$ смежна с тремя вершинами из $\{y_1, \ldots, y_5\}$, то x' смежна с x, поэтому $x = x_i$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$ и $[x] \cap [x_i]$ содержит две вершины из $\{w_1, w_2, w_3\}$ и три вершины из $\{y_1, \ldots, y_5\}$. Противоречие. Поэтому каждая вершина из $([w] \cap \Gamma_2(u)) - \{x\}$ смежна ровно с двумя вершинами из $\{y_1, \ldots, y_5\}$. В частности, $\{x_1, x_2, x_3\}$ является кокликой.

Положим $W_i = [w_i] \cap \Gamma_2(u) - \{x, x_1, x_2, x_3\}$. Так как число ребер между W_1 и $\{y_1, \ldots, y_5\}$ равно 6, то некоторая вершина y_i смежна с 2 вершинами из W_1, с 0 вершин из $\{x, x_1, x_2, x_3\}$, с 4 вершинами из $\{y_1, \ldots, y_5\}$ и с 2 вершинами в каждом из подграфов W_2, W_3. Если еще одна вершина y_j смежна с 2 вершинами из W_1, то $[y_i] \cap [y_j]$ содержит x, 3 вершины из $\{y_1, \ldots, y_5\}$ и вершину из W_1. Противоречие. Значит, каждая вершина из $\{y_1, \ldots, y_5\} - \{y_i\}$ смежна с единственной вершиной в каждом из подграфов W_1, W_2, W_3. Снова противоречие. Утверждение (4) доказано. □

Лемма 5. *Диаметр* Γ *равен* 3.

Доказательство. Пусть $z \in [y] \cap \Gamma_4(u)$. Так как $[x] \cap [z]$ содержит три вершины из $\Gamma_3(u)$, то ввиду леммы 4 подграф $[u] \cap [x]$ является кликой. В силу симметрии $[x] \cap [z]$ является кликой. Теперь $|[x] - ([y] \cup [z])| = 5$ и число ребер между $([u] \cap [x]) \cup ([x] \cap [z])$ и $[x] - ([y] \cup [z])$ равно 12. Поэтому $[x] - ([y] \cup [z])$ содержит вершину x_1, смежную с тремя вершинами из $[u] \cap [x]$, и вершину x_2, смежную с тремя вершинами из $[x] \cap [z]$. Для любых двух вершин $w, w' \in [u] \cap [x]$ подграф $[w] \cap [w']$ содержит u, x, x_1 и вершину из $[u] \cap [x]$. Далее, каждая отличная от x_1, x_2 вершина из $[x] - ([y] \cup [z])$ смежна не более чем с одной вершиной в любом из подграфов $[u] \cap [x]$ и $[x] \cap [z]$. Положим $[u] \cap [x] = \{w_1, w_2, w_3\}$. Ввиду леммы 4 для вершины $y \in [x] \cap [z] - [x_1]$ подграф $[w_i] \cap [y]$ содержит вершину из $[x]$. Противоречие с тем, что $[x] \cap [y]$ содержит точно по две вершины из $[x] \cap [z]$ и из $[x] - ([y] \cup [z])$. □

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) $c_3(u, y) \geq 6$*;*
(2) $k_3 \in \{2, 8\}$*;*
(3) *если* $k_3 = 2$, *то для любой вершины* $u \in \Gamma$ *расстояние между двумя вершинами в* $\Gamma_3(u)$ *равно* 1 *или* 3, *причем граф* Γ *не является антиподальным.*

Доказательство. Пусть $c_3(u, y) = 5$. Если Ψ содержит две вершины x_1, x_2, смежные с общей тройкой вершин w_3, w_4, w_5 из Φ, то вершины w_1, w_2 из $\Phi - [x_1]$ смежны с общей тройкой вершин x_3, x_4, x_5 из Ψ, и пары $\{x_1, x_2\}$, $\{w_1, w_2\}$ являются ребрами. Ввиду леммы 4 подграф $[w_i] \cap [y]$ является 3-кликой или 2-путем, поэтому каждая вершина из $\{x_3, x_4, x_5\}$ смежна с единственной вершиной из $\{x_1, x_2\}$. Без ограничения общности можно считать, что вершины x_3, x_4 смежны с x_1. В силу симметрии две вершины из $\{w_3,\, w_4,\, w_5\}$ смежны с вершиной w_i из $\{w_1,\, w_2\}$. Противоречие с тем, что $|[x_1] \cap [w_i]| \geq 4$.

Итак, Ψ не содержит пар вершин, смежных с общей тройкой вершин из Φ. Пусть вершина w_5 из Φ смежна с тройкой вершин x_3, x_4, x_5 из Ψ. Без ограничения общности можно считать, что $w_1,\, w_2,\, w_3 \in [x_1]$, $w_2,\, w_3,\, w_4 \in [x_2]$, $x_4, x_5 \in [w_4]$ и $[x_3]$ содержит w_1 и вершину из $\{w_2,\, w_3\}$. Для определенности предположим, что $w_3 \in [x_3]$, $w_1 \in [x_4]$, $w_2 \in [x_5]$. Тогда подграф $[y] \cap \Gamma_2(u)$ содержит 5-цикл $x_1,\, x_2,\, x_5,\, x_4,\, x_3$, а подграф $[u] \cap \Gamma_2(y)$ содержит 5-цикл $w_1,\, w_3,\, w_2,\, w_4,\, w_5$.

Если $[x_i] \cap [x_j]$ содержит две вершины $w_l,\, w_m$, то подграф $\{w_l,\, w_m\}$ является кликой, иначе $[w_l] \cap [w_m]$ содержит $u,\, x_i,\, x_j$, а также по вершине из $[u] \cap [x_i]$ и $[u] \cap [x_j]$. Противоречие. Далее, ввиду леммы 4 по крайней мере один из подграфов $[u] \cap [x_i]$, $[u] \cap [x_j]$ является геодезическим 2-путем. Пусть, для определенности, $[u] \cap [x_1]$ является геодезическим 2-путем. Тогда $[y] \cap [x_1]$ содержит не более одной вершины из $[y] \cap \Gamma_3(u)$ и не менее трех вершин из $\{x_2, \ldots, x_5\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $x_1 \in [x_4]$. Так как $[x_1] \cap [x_5]$ содержит вершины $w_2,\, x_2,\, x_4,\, y$, то вершины x_1, x_5 смежны. В силу симметрии вершины $x_2,\, x_4$ смежны. Противоречие с тем, что $[x_1] \cap [x_2]$ содержит $w_2,\, w_3,\, x_4,\, x_5,\, y$. Утверждение (1) доказано.

По лемме 4 число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не больше $22 \cdot 4$, но не меньше $6k_3$, поэтому $k_3 \leq 14$. Так как число вершин v графа Γ делится на 6, то $k_3 \in \{2, 8, 14\}$. Если $k_3 = 14$, то $\Gamma_2(u)$ содержит 18-вершинный подграф X, каждая вершина которого смежна с четырьмя вершинами из $\Gamma_3(u)$. Теперь число треугольников с основанием в $[u]$ и вершиной в X равно 54, поэтому некоторое ребро $\{w, w'\}$ из $[u]$ попадает в пересечение трех вершин $x_1,\, x_2,\, x_3 \in X$. По лемме 4 имеем равенство $[u] \cap [x_1] = [u] \cap [x_2] = [u] \cap [x_3]$. Противоречие с тем, что $[w] \cap [w']$ содержит $u,\, x_1,\, x_2,\, x_3$ и вершину из $[u] \cap [x_1]$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $k_3 = 2$, $\Gamma_3(u) = \{y, y'\}$, $\Gamma_3(y) = \{u, e\}$, $\Gamma_3(y') = \{u, e'\}$. Через $X_i = X_i(u)$ обозначим множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных точно с i вершинами из $\Gamma_3(u)$.

Допустим, что $d(y, y') = 2$. Тогда $\Gamma_2(u)$ содержит 3 вершины из X_2, 16 вершин из X_1 и 3 вершины z_1, z_2, z_3 из X_0. Для вершины $z_i \in X_0$ подграф $[z_i]$ содержит по 3 вершины из $[u]$, $[y]$, $[y']$ и 2 вершины из X_0. Отсюда $e \in [y'] - [y]$, $e' \in [y] - - [y']$, а значит, подграф $[e]$ содержит 3 вершины из $[u]$, y', 4 вершины из $[y'] - [y]$ и 3 вершины из X_0. Теперь подграфы $X_0 = [e] \cap [e']$, $X_0(y) = [y'] - ([y] \cup e^b ot)$ и $X_2(y) = [u] \cap [e]$ являются 3-кликами.

Положим $\Gamma_3(e)=\{y,w\}$, $\Gamma_3(e')=\{y',w'\}$. Тогда $w,w'\in[u]$, X_0 не пересекает $[w]$, $[w']$. Далее, $[u]$ содержит две 3-клики $X_0(e)$, $[e]\cap[u]=X_2(y)$ и 5 вершин из w^bot. Допустим, что $w'\in X_0(e)$. Тогда $[u]\cap(w')^\perp$ содержит 3 вершины из $X_0(e)$ и две вершины из $[e]$. Поэтому $[u]\cap X_0(e')$ содержит единственную вершину из $[e]$ и не содержит w. Противоречие с тем, что e, w', u, w – геодезический 3-путь, но вершина u изолирована в $[w]\cap[w']$.

Допустим, что $w'\in[w]$. Тогда $[w']$ не пересекает $[u]\cap[e]$. Противоречие с тем, что $[e]\cap[u]$ содержит не более одной вершины в каждом из подграфов $[e']$, $X_0(e')$ и пересекает $(w')^\perp$.

Значит, $w'\in[e]$ и $w\in[e']$. В этом случае $[u]\cap[w']$ содержит две вершины из $[e]$, не менее одной вершины из w^bot и не более одной вершины из $X_0(e)$. Противоречие с тем, что $|X_0(e)\cap X_0(e')|\geq 2$.

Итак, в случае $k_3=2$ для любой вершины $u\in\Gamma$ расстояние между двумя вершинами в $\Gamma_3(u)$ равно 1 или 3. Если граф Γ является антиподальным, то он будет 3-накрытием 12-клики, противоречие с леммой 2. Утверждение (3) доказано. $\square$

3. Случай $\mu=3$, $k_3=8$

В этом параграфе предполагается,что Γ – вполне регулярный граф диаметра 3 с параметрами $(v,11,4,3)$ и для некоторой вершины $u\in\Gamma$ имеем $k_3=8$, где $k_i=|\Gamma_i(u)|$. Фиксируем геодезический 3-путь u, w, x, y в Γ.

Лемма 7. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $b_2(u,x)=4$ для некоторой вершины $x\in\Gamma_2(u)$, то либо $[x]\cap\Gamma_2(u)$ – коклика и $[x]\cap\Gamma_3(u)$ является 3-путем, либо $[x]\cap\Gamma_2(u)$ содержит две изолированные вершины и ребро и $[x]\cap\Gamma_3(u)$ – четырехугольник;*

(2) *для любой вершины $x\in\Gamma_2(u)$ подграф $[x]\cap\Gamma_3(u)$ не является четырехугольником;*

(3) *$b_2(u,x)\leq 3$ для любой вершины $x\in\Gamma_2(u)$.*

Доказательство. Пусть $b_2(u,x)=4$. Положим $[u]\cap[x]=\{w_1,w_2,w_3\}$, $[x]\cap\Gamma_2(u)=\{e_1,\dots,e_4\}$ и $[x]\cap\Gamma_3(u)=\{y_1,\dots,y_4\}$. Тогда $\{w_1,w_2,w_3\}$ является кликой. Без ограничения общности можно предположить, что верно одно из утверждений:

а) e_4 смежна с w_1,w_2,w_3 и каждая вершина из $\{e_1,\dots,e_3\}$ смежна точно с одной вершиной из $\{w_1,w_2,w_3\}$, для определенности, e_i смежна с w_i;

б) e_4 не смежна ни с одной из вершин w_1,w_2,w_3 и каждая вершина из $\{e_1,\dots,e_3\}$ смежна точно с двумя вершинами из $\{w_1,w_2,w_3\}$, для определенности, e_i не смежна с w_i;

в) e_1 смежна с w_1, w_2, e_2 – с w_2, w_3, e_3 – с w_1 и e_4 – с w_3.

Так как $u\in[w_i]\cap\Gamma_3(y_j)$, то $[w_i]\cap[y_j]$ является 2-путем или 3-кликой. Тогда $[y_j]$ содержит вершину из $\{e_1,\dots,e_4\}$.

Пусть выполняется случай а) и $y_1,\dots,y_3$ не смежны с e_4. Тогда $[w_i]\cap[y_1]$ содержит e_i, поэтому каждая из вершин $y_1,\dots,y_3$ смежна с $e_1,\dots,e_3$. Отсюда $\{e_1,\dots,e_3\}$ – коклика и $[e_1]\cap[e_2]$ содержит $x,y_1,\dots,y_3$. Противоречие.

Пусть выполняется случай б). Тогда $[y_j]$ содержит не менее двух вершин из $\{e_1,\dots,e_3\}$, иначе в случае $e_1,e_2\notin[y_j]$ вершина x изолирована в $[w_3]\cap[y_j]$. Противоречие. Поэтому число ребер между $\{e_1,\dots,e_3\}$ и $\{y_1,\dots,y_4\}$ не меньше 8. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $\{e_1,\dots,e_3\}$ смежна с 2 вершинами из $\{w_1,w_2,w_3\}$ и с 3 из $\{y_1,\dots,y_4\}$.

Пусть выполняется случай в). Заметим, что $[y_j]$ содержит вершину из $\{e_1,e_2\}$, иначе вершина x изолирована в $[w_2]\cap[y_j]$. Противоречие. Если y_j не смежна с e_1, то она смежна с e_3, иначе вершина x изолирована в $[w_1] \cap [y_j]$. В силу симметрии если y_j не смежна с e_2, то она смежна с e_4. Поэтому число ребер между $\{e_1, \ldots, e_3\}$ и $\{y_1, \ldots, y_4\}$ не меньше 8 и каждая из вершин $\{e_1, e_2\}$ смежна точно с двумя вершинами из $\{y_1, \ldots, y_4\}$ и изолирована в $\{e_1, \ldots, e_4\}$. Без ограничения общности можем считать, что $y_1, y_2 \in [e_1] - [e_2]$, $y_3, y_4 \in [e_2] - [e_1]$. Как показано выше, $y_1, y_2 \in [e_4]$, $y_3, y_4 \in [e_3]$. Теперь либо вершины e_3, e_4 смежны и $\{y_1, \ldots, y_4\}$ – четырехугольник, либо вершины e_3, e_4 не смежны и, для определенности, $y_1 \in [e_3]$, $y_3 \in [e_4]$ и y_1, y_2, y_4, y_3 является 3-путем. Утверждение (1) доказано.

Пусть $x \in \Gamma_2(u)$ и подграф $[x] \cap \Gamma_3(u)$ является 4-циклом $z_1, \ldots, z_4$. Тогда $[z_1] \cap [z_3] = \{x, z_2, z_4\}$ и $[z_2] \cap [z_4] = \{x, z_1, z_3\}$. Поэтому любая вершина из $\Gamma_3(u) - [x]$ смежна с единственной вершиной из $\{z_1, z_3\}$ и с единственной вершиной из $\{z_2, z_4\}$. Положим $[x] \cap \Gamma_2(u) = \{y_1, \ldots, y_4\}$ и $[x] \cap [u] = \{w_1, w_2, w_3\}$. Тогда любая вершина из $\Gamma_3(u) - [x]$ смежна с единственной вершиной из $\{y_1, \ldots, y_4\}$, вершина z_i смежна точно с 2 вершинами из $\{y_1, \ldots, y_4\}$ и вершина из 3-клики $\{w_1, w_2, w_3\}$ смежна точно с 2 вершинами из $\{y_1, \ldots, y_4\}$. Без ограничения общности можно предположить, что вершины y_1, y_2 смежны с парами вершин из $\{w_1, w_2, w_3\}$ и каждая из вершин y_3, y_4 смежна с единственной вершиной из $\{w_1, w_2, w_3\}$. В виду утверждения (3) леммы 4 подграф $[u] \cap [y_1]$ не является кликой, поэтому вершина y_1 не смежна с вершинами из $\Gamma_3(u) - [x]$. Значит, вершины y_3, y_4 смежны и каждая из них смежна с 4 вершинами из $\Gamma_3(u)$. По утверждению (1) подграф $[y_3] \cap \Gamma_3(u)$ является 4-циклом. Для определенности считаем, что $z_1, z_2 \in [y_3]$. Аналогично, $[y_4] \cap \Gamma_3(u)$ является 4-циклом, содержащим по 2 вершины из $\Gamma_3(u) - ([x] \cup [y_3])$, $\Gamma_3(u) \cap [x]$ и $\Gamma_3(u) \cap [y_3]$. Значит, $z_1, z_2 \in [y_4]$. Противоречие с тем, что $[y_1] \cap [y_2]$ содержит x, вершину из $\{w_1, w_2, w_3\}$ и вершины z_3, z_4. Утверждение (2) доказано.

Пусть $b_2(u, x) = 4$. Положим $[u] \cap [x] = \{w_1, w_2, w_3\}$, $[x] \cap \Gamma_2(u) = \{e_1, \ldots, e_4\}$ и $[x] \cap \Gamma_3(u) = \{y_1, \ldots, y_4\}$. Из утверждений (1) и (2) следует, что e_1 смежна с w_1, w_2, e_2 смежна с w_2, w_3, e_3 смежна с w_1 и e_4 смежна с w_3. Далее, $y_1, y_2 \in [e_1] - [e_2]$, $y_3, y_4 \in [e_2] - [e_1]$, $y_1, y_2 \in [e_4]$, $y_3, y_4 \in [e_3]$, вершины e_3, e_4 не смежны, $y_1 \in [e_3]$, $y_3 \in [e_4]$ и y_1, y_2, y_4, y_3 является 3-путем. Теперь $[u] \cap \Gamma_2(x)$ содержит по 2 вершины из $[e_3] - [x]$, $[e_4] - [x]$. Тогда $|[u] \cap \Gamma_2(x)| \geq 7$. Противоречие с тем , что число ребер между $[u] \cap \Gamma_2(x)$ и $[x] \cap \Gamma_2(u)$ равно $3|[u] \cap \Gamma_2(x)| - 6 = 3|[x] \cap \Gamma_2(u)| - 6$. □

Лемма 8. *Для любой вершины $y \in \Gamma_3(u)$ имеем $c_3(u, y) \geq 7$.*

Доказательство. Пусть ${}_3(u, y) = 6$. Положим $[u] \cap \Gamma_2(y) = \{w_1, \ldots, w_6\}$, $[y] \cap \Gamma_2(u) = \{x_1, \ldots, x_6\}$, $[y] \cap \Gamma_3(u) = \{z_1, \ldots, z_5\}$ и $[u] \cap \Gamma_3(y) = \{e_1, \ldots, e_5\}$. Тогда любой подграф $[w_i] \cap [y]$ является кликой или геодезическим 2-путем. По лемме 7 каждая вершина w_i смежна не более чем с двумя вершинами из $\{e_1, \ldots, e_5\}$, поэтому степень каждой вершины в графе $\{w_1, \ldots, w_6\}$ не меньше 2.

Предположим, что подграфы $[u] \cap [x_1]$, $[u] \cap [x_2]$ являются кликами. Если $\{w_1, w_2, w_3\} = [u] \cap [x_1] = [u] \cap [x_2]$, то для любого $i \in \{1, 2, 3\}$ подграф $[w_i] \cap [y]$ является 2-путем и можно считать, что $[w_1]$ содержит путь x_2, x_1, x_3, $[w_2]$ содержит путь x_2, x_1, x_4 и либо

(а) $[w_3]$ содержит путь x_2, x_1, x_5, либо

(б) $[w_3]$ содержит путь x_1, x_2, x_5.

В любом случае для $i \in \{3, 4, 5\}$ подграф $[u] \cap [x_i]$ является 2-путем, поэтому $[x_i]$ содержит не более одной вершины из $\{z_1, \ldots, z_5\}$. Так как в случае (а) имеем $[x_2] \cap [x_i] = \{x_1, y, w_{i-2}\}$, то $x_3, x_4, x_5 \notin [x_6]$ и $|[x_6] \cap \Gamma_3(u)| = 4$. Противоречие. В случае (б) имеем $x_3, x_4 \notin [x_5]$ и $[x_5]$ содержит x_6 и 2 вершины из $\{z_1, \ldots, z_5\}$, противоречие.

Итак, ввиду леммы 4 имеем $|[u]\cap[x_1]\cap[x_2]|\le 1$. В случае $|[u]\cap[x_1]\cap[x_2]|=1$ можно считать, что $\{w_1, w_2, w_3\}=[u]\cap[x_1]$, $\{w_3, w_4, w_5\}=[u]\cap[x_2]$, $[w_3]\cap[y]= =\{x_1, x_2, x_3\}$ и либо $[x_3]\cap[u]=\{w_2, w_3, w_5\}$, либо $[x_3]\cap[u]=\{w_3, w_5, w_6\}$. В любом случае $[w_6]\cap[w_3]$ содержит u и не более двух вершин из $\{w_1, w_2, w_4, w_5\}$, поэтому $[w_6]$ содержит по 2 вершины из $\{w_1, w_2, w_4, w_5\}$ и из $\{e_1,\dots,e_5\}$, в частности, $[w_6]\cap[y]=\{x_4, x_5, x_6\}$ является кликой. Ввиду леммы 4 для любого $j\in \in\{4, 5, 6\}$ подграф $[u]\cap[x_j]$ является 2-путем. Если w_6 – вершина степени 2 в этом пути, то μ-подграф концевых вершин этого пути содержит u, w_3, w_6, x_j. Противоречие. Без ограничения общности можно предположить, что $[x_4]$ содержит путь w_4, w_5, w_6 и $[x_5]$ содержит путь w_1, w_5, w_6. В этом случае вершины w_2, w_5 смежны с w_6 и $[w_2]\cap[w_5]$ содержит u, w_1, w_3, w_6, поэтому вершины w_2, w_5 смежны и степень w_5 в графе $[u]$ не меньше 5. Противоречие.

В случае $|[u]\cap[x_1]\cap[x_2]|=0$ можно считать, что $\{w_1, w_2, w_3\}=[u]\cap[x_1]$, $\{w_4, w_5, w_6\}=[u]\cap[x_2]$. По доказанному $[u]\cap[x_i]$ является 2-путем для любого $i\in\{3,\dots,6\}$. Каждый из этих путей содержит ребро, соединяющее указанные 3-клики. Поэтому два из этих путей инцидентны общей вершине из $\{w_1, w_2, w_3\}$, скажем w_2, и два из этих путей инцидентны общей вершине из $\{w_4, w_5, w_6\}$. Без ограничения общности можно предположить, что $\{w_2, w_4\}$, $\{w_2, w_6\}$ и $\{w_3, w_6\}$ – ребра, лежащие в указанных 2-путях. В этом случае вершины w_3, w_4 не смежны и $[w_3]\cap[w_4]$ содержит u, w_2, w_6, поэтому можно считать, что $[w_3]\cap[y]$ содержит x_1, x_3, x_4 и $[w_4]\cap[y]$ содержит x_2, x_5, x_6. Отсюда ребро $\{w_2, w_6\}$ не попадает ни в один из рассмотренных 2-путей. Противоречие.

Итак, не менее пяти подграфов $[u]\cap[x_i]$ являются 2-путями. Допустим, что $\{w_1, w_2, w_3\}=[u]\cap[x_1]$ – клика. Тогда оставшиеся подграфы $[u]\cap[x_i]$ являются 2-путями. Так как для $j\in\{1, 2, 3\}$ подграф $[w_j]\cap[y]$ содержит 2 вершины из $\{x_2,\dots,x_5\}$, то можно считать, что $[w_1]\cap[w_2]$ содержит x_2. Если второе ребро $\{w_2, w_3\}$ попадает в окрестность вершины x_3, то $\{x_1, x_2, x_3\}$ не является кликой, иначе $\{w_1, w_2, w_3\}\cup\{x_1, x_2, x_3\}$ – октаэдр. Противоречие. Теперь x_2, x_1, x_3 индуцирует путь, иначе для несмежных вершин x_1, x_2 подграф $[x_1]\cap[x_2]$ содержит w_1, w_2, x_3, y, противоречие. Далее, $[x_2]\cap[x_3]$ содержит w_2, x_1, y и вершину из $\{x_4, x_5, x_6\}$, противоречие. Значит, $\{x_3,\dots,x_6\}$ не содержит вершин, смежных с ребрами из $\{w_1, w_2, w_3\}$. Без ограничения общности можно считать, что $x_3\in[w_1]$, $x_4\in[w_2]$ и $x_5, x_6\in[w_3]$. Заметим, что вершины x_1, x_2 смежны, иначе $[x_1]\cap[x_2]$ содержит w_1, w_2, x_3, x_4. Каждая из вершин $x_3,\dots,x_6$ смежна с двумя вершинами из $\{w_4, w_5, w_6\}$, поэтому вершины x_5, x_6 смежны, иначе $[x_5]\cap[x_6]$ содержит w_3, x_1, y и вершину из $\{w_4, w_5, w_6\}$. Пусть, для определенности, $x_5, x_6\in[w_4]$, $x_3, x_4\in[w_5]$. Далее, точно одна из вершин w_4, w_5, w_6 смежна с x_2. Заметим, что $w_6\notin[x_5]\cap[x_6]$, иначе $[u]\cap[x_5]=[u]\cap[x_6]$ является кликой, противоречие. Поэтому можно считать, что $w_5\in[x_5]$, $w_6\in[x_6]$. Если w_3, w_5, w_4 является 2-путем, то $[w_3]\cap[w_4]$ содержит u, w_5, x_5, x_6. Противоречие. Итак, вершины w_3, w_4 смежны и w_3, w_4, w_5 или w_4, w_3, w_5 является 2-путем. Во втором случае $[w_4]\cap[w_5]=\{u, w_3, x_5\}$ и $w_4\in[x_2]$. Так как $[u]\cap[x_2]$ – путь, то $[w_4]$ содержит единственную вершину w_i из $\{w_1, w_2\}$ и $[w_4]\cap[w_{3-i}]$ содержит u, w_3, w_i, x_2. Противоречие. Значит, w_3, w_4, w_5 является 2-путем и $[w_3]\cap[w_5]=\{u, w_4, x_5\}$, поэтому $w_1, w_2\notin[w_5]$.

Теперь $x_2\in[w_6]$, иначе $x_3, x_4\in[w_6]$, подграфы $[u]\cap[x_3]=\{w_1, w_6, w_5\}$ и $[u]\cap[x_4]=\{w_2, w_6, w_5\}$ являются 2-путями. Противоречие с тем, что $[w_1]\cap[w_2]$ содержит u, w_3, w_6, x_1, x_2. Отсюда $[w_6]$ содержит по одной вершине из $\{w_1, w_2\}$ и $\{w_3, w_4\}$. Если $w_6\in[x_3]$, то $[u]\cap[x_3]=\{w_1, w_6, w_5\}$ – путь, $[w_2]\cap[w_6]=\{u, w_1, x_2\}$ и $w_3\notin[w_6]$. Противоречие с тем, что $[w_3]\cap[w_6]$ содержит u, w_1, w_4, x_6. Если $w_6\in[x_4]$, то $[u]\cap[x_4]=\{w_2, w_6, w_5\}$ – путь, $[w_1]\cap[w_6]=\{u, w_2, x_2\}$ и $w_3\notin[w_6]$. Противоречие с тем, что $[w_3]\cap[w_6]$ содержит u, w_2, w_4, x_6.

Таким образом, все подграфы $[u]\cap[x_i]$ и $[w_j]\cap[y]$ являются 2-путями. Теперь степени вершин графа $\{x_1,\dots,x_6\}$ равны 3 или 4. Но если степень x_1 в графе $\{x_1,\dots,x_6\}$ равна 4, то для $x_i\notin\{x_1\}\cup[x_1]$ подграф $[x_1]\cap[x_i]$ содержит y и 3 вершины из $\{x_1,\dots,x_6\}$, противоречие. Так как регулярный граф степени 3 на 6 вершинах является полным двудольным графом $K_{3,3}$ или 3-призмой, то $\{x_1,\dots,x_6\}$ является 3-призмой. Без ограничения общности, подграфы $\{x_1,\,x_2,\,x_3\}$ и $\{x_4,\,x_5,\,x_6\}$ являются кликами и вершина x_i смежна с x_{i+3}. Тогда $[x_2]\cap[x_4]=\{y,\,x_1,\,x_5\}$, $[x_2]\cap[x_6]=\{y,\,x_3,\,x_5\}$, поэтому $[x_4]\cap[x_6]$ содержит y,x_5 и 3 вершины из $\{w_1,\dots,w_6\}$, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Через S_i обозначим множество вершин из $\Gamma_2(u)$, смежных точно с i вершинами из $\Gamma_3(u)$.

Лемма 9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $|S_3|\geq 12$*;*

(2) *если* $y\in S_3$ *и* $[u]\cap[y]=\{w_1,\,w_2,\,w_3\}$, *то* $[y]\cap\Gamma_2(u)$ *содержит вершину* y', *смежную с двумя вершинами из* $\{w_1,\,w_2,\,w_3\}$ *и подграф* $[u]\cap[y']$ *является* 2*-путем;*

(3) *если* $y\in S_3$, *то* $\Gamma_2(u)$ *не содержит таких вершин* y'', *что* $[u]\cap[y]=[u]\cap[y'']$.

Доказательство. Ввиду леммы 8 число ребер между $\Gamma_2(u)$ и $\Gamma_3(u)$ не меньше 56, поэтому $|S_3|\geq 12$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $y\in S_3$ и $[u]\cap[y]=\{w_1,\,w_2,\,w_3\}$. Тогда $[y]$ содержит 3 вершины z_1,z_2,z_3 из $\Gamma_3(u)$ и 5 вершин из $\Gamma_2(u)$. Далее, вершина w_i смежна с двумя вершинами из $[y]\cap\Gamma_2(u)$, поэтому можно считать, что вершина y' из $[y]\cap\Gamma_2(u)$ смежна с $w_1,\,w_2$. Если $[u]\cap[y']$ является кликой, то $[u]\cap[y]=[u]\cap[y']$ и y' смежна не более чем с одной вершиной из $\{z_1,\,z_2,\,z_3\}$. Допустим, что $z_3\in[y']$. Тогда $[z_i]\cap[y]$ содержит 3 вершины из $[w_1]\cup[w_2]\cup[w_3]$ для любого $i\in\{1,2\}$, поэтому $[z_1]\cap[z_2]\cap[y]$ содержит по крайней мере 2 вершины из $[w_1]\cup[w_2]\cup[w_3]$. Если $[z_1]\cap[z_2]\cap[y]$ содержит 3 вершины $y_1,\,y_2,\,y_3$, $y_i\in[w_i]$, то вершины $z_1,\,z_2$ смежны, $[y]\cap[z_3]=\{y',\,y_1,\,y_2,\,y_3\}$, поэтому $\{y_1,y_2,y_3\}$ является кокликой. Противоречие с тем, что $|[y_1]\cap[y_2]|\geq 4$. Значит, $[z_1]\cap[z_2]\cap[y]$ содержит точно 2 вершины $y_1,\,y_2$, $y_i\in[w_i]$. В этом случае $[y]\cap[w_3]$ содержит вершину $y_3\in[z_1]$, и вершину $y_3'\in[z_2]$, противоречие с тем, что $|[y]\cap[w_3]|\geq 5$.

Итак, если $[u]\cap[y']$ является кликой, то y' не смежна ни с одной вершиной из $\{z_1,\,z_2,\,z_3\}$. Поэтому $[z_i]\cap[y]$ содержит 3 вершины из $[w_1]\cup[w_2]\cup[w_3]$ для любого $i\in\{1,\,2,\,3\}$ и можно считать, что $[z_1]\cap[z_2]\cap[z_3]$ содержит вершину y_1 из $[w_1]$. Оставшиеся 3 вершины из $[y]-\{y',\,y_1\}$ попадают в $[w_2]\cup[w_3]$. Противоречие с тем, что одна из этих вершин принадлежит $[w_2]\cap[w_3]$. Утверждение (2) доказано.

Пусть $y\in S_3$, $y''\in\Gamma_2(u)$ и $[u]\cap[y]=[u]\cap[y'']$. Противоречие с тем, что по утверждению (2) некоторая вершина y' из $[y]\cap\Gamma_2(u)$ смежна с 2 вершинами $w_i,\,w_j$ из $[u]\cap[y]$ и $[w_i]\cap[w_j]$ содержит $u,\,y,\,y',\,y''$ и вершину из $[u]\cap[y]$. $\square$

Завершим рассмотрение случая $k_3=8$. Так как между $[u]$ и S_3 не менее 36 ребер, то некоторая вершина $w\in[u]$ смежна с 4 вершинами $y_1,\,y_2,\,y_3,\,y_4$ из S_3. Далее, степень w в графе $[u]\cap[y_i]$ равна 2, поэтому некоторая вершина w' из $[u]\cap[w]$ смежна с двумя вершинами из $\{y_1,\,y_2,\,y_3,\,y_4\}$. Противоречие с леммой 9. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларусии.

Summary

K.S. Efimov, A.A. Makhnev. On Completely Regular Graphs with $k = 11$, $\lambda = 4$.

It is well known that if Γ is a connected edge-regular graph with $b_1 = 1$, then Γ is a polygon or a complete multipartite graph $K_{n\times 2}$. A.A. Makhnev and his students have studied completely regular graphs with $2 \le b_1 \le 5$. In our earlier article, the study of completely regular graphs with $b_1 = 6$ was reduced to the investigation of graphs with $k \in \{10, 11, 12\}$. Together with M.S. Nirova, we considered the case $b_1 = 6$, $k = 10$. This paper deals with completely regular graphs with $b_1 = 6$ and $k = 11$.

Key words: graph, completely regular graph.

Литература

1. *Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – 495 p.
2. *Махнев А.А.* О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов // Изв. РАН. Серия матем. – 2004. – Т. 68. – С. 159–182.
3. *Васильев С.А., Махнев А.А.* О вполне регулярных графах с $b_1 = 4$ // Изв. Гомел. гос. ун-та. – 2006. – № 4 (37). – С. 101–108.
4. *Казарина В.И., Махнев А.А.* О реберно регулярных графах с $b_1 = 5$ // Владикавказ. матем. журнал. – 2009. – Т. 11, № 1. – С. 29–42.
5. *Ефимов К.С., Махнев А.А.* Вполне регулярные графы с $b_1 = 6$ // Журн. Сиб. фед. ун-та. – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 63–77.
6. *Ефимов К.С., Махнев А.А., Нирова М.С.* О вполне регулярных графах с $k = 10$, $\lambda = 3$ // Труды Ин-та матем. и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 2. – С. 75–90.
7. *Махнев А.А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы // Дискр. анализ и исслед. операций. – 1996. – Т. 3, № 3. – С. 71–83.

Поступила в редакцию
16.01.12

Ефимов Константин Сергеевич – кандидат физико-математических наук, главный программист отдела алгебры и топологии Института математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

Махнев Александр Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. РАН, заведующий отделом алгебры и топологии Института математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург.

E-mail: *makhnev@imm.uran.ru*