Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 90–93 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0088*

Н.Н. КОРНЕЕВА

ОБ АВТОМАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ И МОНАДИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Аннотация. В работе доказано, что множество степеней асинхронно автоматных преобразований бесконечных последовательностей с разрешимой монадической теорией образует начальный сегмент в множестве степеней асинхронно автоматных преобразований. Получен критерий разрешимости монадической теории полной последовательности.

Ключевые слова: автоматные преобразования, монадические теории бесконечных последовательностей, полные последовательности.

УДК: 519.71

Abstract. In this paper we prove that the set of degrees of asynchronous automaton transformations of infinite sequences with a solvable monadic theory is an initial segment in the set of degrees of asynchronous automaton transformations. We prove a solvability criterion for a monadic theory of a complete sequence.

Keywords: automaton transformations, monadic theories of infinite sequences, complete sequences.

В [1] определены отношение эквивалентности для бесконечных последовательностей над конечными алфавитами при помощи автоматов Мили и частичный порядок на классах эквивалентности. Эти определения обобщаются на случай асинхронных автоматов [2].

Определение 1 ([3], сс. 14, 35)**.** Конечным автоматом Мили (конечным асинхронным автоматом) называется набор $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$, где S, Σ, Σ' — конечные множества состояний, входных и выходных символов соответственно; $\delta : S \times \Sigma \longrightarrow S$ — функция переходов; $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow \Sigma'$ (соответственно $\omega : S \times \Sigma \longrightarrow (\Sigma')^*$) — функция выходов. Если выделено начальное состояние s_0, то автомат (T, s_0) называется инициальным.

Определение 2 ([1], [2])**.** Пусть x, y — бесконечные последовательности над конечными алфавитами. Последовательность y автоматно сводится (асинхронно автоматно сводится) к последовательности x, если существует конечный инициальный автомат Мили (конечный инициальный асинхронный автомат) (T, s_0) такой, что $\omega_T(s_0, x) = Ay$, где блок A определяет некоторую конечную задержку (соответственно $\omega_T(s_0, x) = y$).

Данное отношение сводимости индуцирует отношение эквивалентности на множестве бесконечных последовательностей. Класс эквивалентности последовательности x называется

Поступила 27.12.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-00399-а).

степенью автоматных преобразований (соответственно степенью асинхронно автоматных преобразований) и обозначается через $[x]$ (соответственнно $[x]^*$) ([1], [2]).

В.Р. Байрашева [4] показала, что из разрешимости монадической теории последовательности x следует разрешимость монадической теории последовательности y, если $[y] \leq [x]$. Обобщим этот результат на случай асинхронно автоматной сводимости.

Существует критерий разрешимости монадической теории бесконечной последовательности на языке теории автоматов: монадическая теория последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда существует алгоритм, который по любому автомату Бюхи (или любому детерминированному автомату Мюллера) может определить, принимает ли этот автомат последовательность x или нет (см., например, [5], следствие 3.1.4).

Определения монадической теории последовательности, автоматов Бюхи и Мюллера можно найти в [5]. Монадическую теорию последовательности x будем обозначать $MT\langle \mathbb{N}, <, x\rangle$. Множество последовательностей, принимаемых автоматом Бюхи или Мюллера S, будем обозначать L_S.

Теорема 1. *Пусть $[y]^* \leq^* [x]^*$ и $MT\langle \mathbb{N}, <, x\rangle$ разрешима. Тогда $MT\langle \mathbb{N}, <, y\rangle$ также разрешима.*

Схема доказательства. Пусть x, y — две последовательности, причем существует автомат $T = (T, \Sigma, \Sigma', t_0, \delta_T, \omega_T)$ такой, что $\omega_T(t_0, x) = y$. Действие автомата T можно представить как действие композиции автоматов U и V ($T = VU$): $U = (U, \Sigma, \Sigma'', u_0, \delta_U, \omega_U)$, где $U = T$, $\Sigma'' = T \times \Sigma$, $u_0 = t_0$, $\delta_U(t, a) = \delta_T(t, a)$, $\omega_U(t, a) = (t, a)$, $t \in T$, $a \in \Sigma$; $V = (V, \Sigma'', \Sigma', v_0, \delta_V, \omega_V)$, где $V = \{v\}$, $\Sigma'' = T \times \Sigma$, $v_0 = v$, $\delta_V(v, (t, a)) = v$, $\omega_V(v, (t, a)) = \omega_T(t, a)$, $t \in T$, $a \in \Sigma$.

Пусть $S = (S, \Sigma', s_0, \delta_S, \mathcal{F}_S)$ — произвольный детерминированный автомат Мюллера, действующий на y. По автомату S будем строить автомат, действующий на x. Разобьем построение на два шага.

1) Определим промежуточный автомат $VS = (V \times S, \Sigma'', (v_0, s_0), \delta_{VS}, \mathcal{F}_{VS})$, где $V \times S \cong S$, $(v_0, s_0) \cong s_0$, функция перехода $\delta_{VS}((v, s), a'') = (v, \delta_S(s, \omega_V(v, a'')))$, причем на каждой дуге, ведущей из (v, s) в (v, s') и помеченной буквой a'', прописываем множество всех промежуточных состояний пути из s в s' по слову $\omega_V(v, a'')$ в исходном автомате S, $\mathcal{F}_{VS} \cong \mathcal{F}_S$.

Построим новый автомат $W = (W, \Sigma'', w_0, \delta_W, \mathcal{F}_W)$. Изменим множество состояний автомата VS. Для каждого состояния (v, s) и каждого множества промежуточных состояний $\{s_{i_1}, \ldots, s_{i_l}\}$, соответствующего некоторой дуге, приводящей в (v, s), построим одно "новое" состояние. "Новые" состояния будут иметь двойную метку: $((v, s), \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_l}, s\})$. Соответственно дуги из "нового" состояния будут выходить, как в автомате VS, из состояния (v, s), но с учетом промежуточных состояний, указанных на дуге в автомате VS. Положим $w_0 = \{(v, s_0), \emptyset\}$.

Определим $\mathcal{F}_W$. Для произвольного $F_S \in \mathcal{F}_S$ возьмем все состояния $((v, s), \{s_{i_1}, \ldots, s_{i_l}, s\})$ такие, что $s \in F_S$. Удалим из полученного множества те состояния, у которых во вторых метках есть состояния, не принадлежащие F_S. Для полученного множества рассмотрим все подмножества G такие, что $pr_2 G = F_S$ и добавим их в $\mathcal{F}_W$. Тогда если $y \in L_S$ и z — такая последовательность, что $V(z) = y$, то $z \in L_W$, и если $z \in L_W$, то $V(z) \in L_S$.

2) Строим автомат $UW = (U \times W, \Sigma, (u_0, w_0), \delta_{UW}, \mathcal{F}_{UW})$, где

$$\delta_{UW}((u, w), a) = (\delta_U(u, a), \delta_W(w, \omega_U(u, a))).$$

Определим $\mathcal{F}_{UW}$. Для произвольного $F_W \in \mathcal{F}_W$ зафиксируем все дуги, ведущие из F_W в F_W. Для произвольных $w \in F_W$, $u \in U$ найдем все состояния, в которые можно прийти из (u, w) по пути из выделенных дуг. Получим некоторое множество. Все его подмножества G такие, что $pr_2 G = F_W$, добавим в $\mathcal{F}_{UW}$. Тогда если $x \in L_{UW}$, то $U(x) \in L_W$, и если $x \notin L_{UW}$, то $U(x) \notin L_W$.

Из 1)–2) следует: если $x \in L_{UW}$, то $VU(x) = y \in L_S$; если $x \notin L_{UW}$, то $VU(x) = y \notin L_S$. Согласно следствию 3.1.4 [5] можно определить $x \in L_{UW}$ или $x \notin L_{UW}$, а значит, можно проверить $y \in L_S$ или $y \notin L_S$. Следовательно, $MT\langle \mathbb{N}, <, y\rangle$ разрешима.

В [1] введено понятие полной последовательности. В дальнейшем степени автоматных преобразований полных последовательностей изучались в работах [6], [7]. Уточним это понятие.

Определение 3. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — одноместная функция. Последовательность $x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ называется полной (f-полной), если для любого $k \in \mathbb{N}$ каждый блок длины k из символов алфавита Σ встречается в последовательности x (встречается в последовательности x на начальном отрезке длины $f(k)$).

Конечный сильно связный автомат Мили $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$ будем называть полным [6], если для любого $k \in \mathbb{N}$ и любого k-блока $B \in \Sigma'^*$ существуют состояние $s \in S$ и k-блок $A \in \Sigma^*$ такие, что $\omega(s, A) = B$.

Теорема 2. *Пусть $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$ является (сильно связным) полным автоматом Мили с n состояниями, x — f-полная последовательность. Тогда $\omega(s_0, x)$ — g-полная последовательность, где $g(k) = f((k + n - 1)^n)$.*

Схема доказательства. В силу теоремы 1 [7] последовательность $\omega(s_0, x)$ полная.

Перенумеруем состояния автомата $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ и выделим одно из них q. Для произвольных $k \in \mathbb{N}$ и k-блока $B \in \Sigma^*$ легко построить слово длины не более $(k+n-1)^n$ такое, что при чтении этого слова с любого состояния обязательно придем в состояние q со словом B на входе. Построенное слово встречается на начальном отрезке последовательности x длины $f((k+n-1)^n)$. Отсюда в последовательности $\omega(s_0, x)$ каждый блок длины k встречается на начальном отрезке указанной длины.

Определение 4. Вычислимую последовательность x назовем эффективно полной, если x является f-полной для некоторой вычислимой функции f.

Следствие. Пусть $T = (S, \Sigma, \Sigma', \delta, \omega)$ — (сильно связный) полный автомат Мили, x — эффективно полная последовательность. Тогда $\omega(s_0, x)$ — также эффективно полная последовательность.

В последнее время [5] активно изучается разрешимость монадических теорий бесконечных последовательностей. Докажем критерий разрешимости монадической теории полной последовательности.

Теорема 3. *Монадическая теория $MT\langle \mathbb{N}, <, x\rangle$ полной последовательности x разрешима тогда и только тогда, когда x — эффективно полная последовательность.*

Схема доказательства. Пусть x — f-полная последовательность для некоторой функции f.

Необходимость. Поскольку $MT\langle \mathbb{N}, <, x\rangle$ разрешима, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ перебором можно найти значение $x(n)$ и $f(n)$.

Достаточность. Пусть $S = (\{q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \delta_S, \mathcal{F}_S)$ — произвольный детерминированный автомат Мюллера с n состояниями. Согласно следствию 3.1.4 [5] для разрешимости

$MT\langle\mathbb{N},<,x\rangle$ достаточно уметь определять по S, действующему на x, принимает он x или нет. Подадим на вход S последовательность x. Разобьем множество состояний автомата на компоненты сильной связности. В графе конденсации существуют компоненты сильной связности, которые образуют сильно связные подавтоматы автомата S. Выберем из каждой такой компоненты по одному состоянию: $s_1,\ldots,s_l$. Для любого s_i можно построить слово длины не более $n(n-1)$ (если оно существует) такое, что при чтении этого слова с любого состояния обязательно пройдем через s_i. Прочитав отрезок длины $f(n(n-1))$, придем в один из сильно связных подавтоматов автомата S, который согласно следствию 2.3 [6] будет пределом автомата S на последовательности x. Следовательно, если множество состояний полученного подавтомата принадлежит $\mathcal{F}_S$, то $x\in L_S$; если не принадлежит $\mathcal{F}_S$, то $x\notin L_S$.

Автор выражает благодарность научному руководителю М.М. Арсланову за полезное обсуждение результатов.

Литература

[1] Рейна Г. *Степени автоматных преобразований*, Кибернетич. сб., вып. 14, 95–106 (1977).

[2] Корнеева Н.Н. *Степени асинхронно автоматных преобразований*, Изв. вузов. Матем., № 3, 30–40 (2011).

[3] Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. *Введение в теорию автоматов* (Наука, М., 1985).

[4] Байрашева В.Р. *Степени автоматных преобразований почти периодических сверхслов и сверхслов с разрешимой монадической теорией*, Казань, 1989, 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.05.1989 № 3103-В89.

[5] Мучник Ан.А., Притыкин Ю.Л., Семенов А.Л. *Последовательности, близкие к периодическим*, УМН **64** (5), 21–96 (2009).

[6] Gordon H.G. *Complete degrees of finite-state transformability*, Inform. and Control, **32**, 169–187 (1976).

[7] Gordon H.G. *An isomorphism of complete degrees of finite-state transformability*, Inform. and Control, **40**, 192–204 (1979).

Н.Н. Корнеева

инженер, отдел алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

`e-mail:` Natalia.Korneeva@ksu.ru

N.N. Korneeva

Engineer, Department of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Natalia.Korneeva@ksu.ru