Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 86–89 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0087*

В.Г. ЗВЯГИН, С.К. КОНДРАТЬЕВ

АТТРАКТОРЫ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ РЕГУЛЯРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД С ПАМЯТЬЮ

Аннотация. В статье анонсируется существование траекторного и глобального аттракторов для слабых решений регуляризованной модели движения жидких сред с памятью.

Ключевые слова: регуляризованная модель движения жидких сред с памятью, слабые решения, траекторный и глобальный аттракторы, теоремы существования.

УДК: 517.958

Abstract. In this paper we announce the existence of trajectory and global attractors for weak solutions to a regularized model of flows with memory.

Keywords: regularized model of flows with memory, weak solutions, trajectory and global attractors, existence theorems.

1. Введение

Разрешимость в слабом смысле начально-краевой задачи для регуляризованной модели движения жидких сред с памятью установлена в работах [1], [2] и подробно описана в [3].

Рассмотрим начально-краевую задачу в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ $(n = 2, 3)$, соответствующую регуляризованной модели движения жидких сред с памятью:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1 \operatorname{Div} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\lambda}} \mathcal{E}(v)(s, Z_\delta(s; t, x))\, ds - \mu_0 \operatorname{Div} \mathcal{E}(v) = \\ = -\operatorname{grad} p + \varphi, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \quad v\big|_{(0,T)\times\Gamma} = 0, \quad (2)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega; \quad \int_\Omega p\, dx = 0, \quad (3)$$

где $v = (v_1, \dots, v_n)$ — вектор-функция скорости движения частиц среды, p — давление среды, φ — плотность внешних сил, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})$ — тензор скоростей деформации, компоненты которого определяются формулами $\mathcal{E}_{ij} = 1/2(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$ $(i, j = 1, \dots, n)$; $\operatorname{Div} a$ —

Поступила 02.02.2011

Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (гос. контракт № П941).

дивергенция матрицы $a = (a_{ij})$ порядка n, т.е. $\operatorname{Div} a = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i}, \dots, \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{in}}{\partial x_i}\Big)$, $\mu_1 \geqslant 0$ — вещественное число.

Опишем $Z_\delta(s;t,x)$. Для этого введем стандартные пространства V и H в математических вопросах гидродинамики.

Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω, и пусть $\mathcal{V} = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество в $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ соленоидальных функций. Пусть H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$, а V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Рассмотрим траекторию, определяемую уравнением

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau S_\delta v(s, z(s;t,x))\, ds, \quad \tau \in [0,T], \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega. \tag{4}$$

В уравнении (4) используется оператор регуляризации $S_\delta : H \to C^1(\Omega)^n \cap V$ для $\delta > 0$. Он обладает следующими свойствами: $S_\delta(v) \to v$ в H при $\delta \to 0$, и порождаемое им отображение $S_\delta : L_2(0,T;H) \to L_2(0,T;C^1(\overline{\Omega})^n \cap V)$ непрерывно. Конструкция такого оператора приведена в [4]. Необходимость введения оператора регуляризации связана с тем, что в задачах гидродинамики вектор-функция скорости $v \in L_2(0,T;V)$, и определение траектории $z(\tau;t,x)$ возможно лишь для регуляризованного поля скоростей. Тогда для каждого $v \in L_2(0,T;V)$ уравнение (4) имеет единственное решение $Z_\delta(v)$.

Итак, из (4) имеем $z(\tau;t,x) = Z_\delta(\tau;t,x)$. Эта функция и участвует в (1).

Отметим также, что при равенстве константы μ_1 нулю система (1)–(3) переходит в систему Навье–Стокса.

2. Основные понятия и формулировка основных результатов

Обозначим через V_α, $\alpha \in (0,1]$, замыкание в норме W_2^α множества $\mathcal{V}$ гладких соленоидальных функций с компактным носителем, содержащимся в Ω. Пусть V_α^* — пространство, сопряженное к V_α. С учетом отождествления $H \equiv H^*$ имеет место компактное вложение $H \subset V_\alpha^*$.

Обозначим через $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ банахово пространство, состоящее из функций, существенно ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в пространстве H, и пусть $C(\mathbb{R}_+;V_\alpha)$ — линейное пространство, состоящее из непрерывных на полуоси $\mathbb{R}_+$ функций, принимающих значения в пространстве V_α.

Рассмотрим *операторы сдвигов* $\mathbf{T}(h)$, каждый из которых ставит функции g в соответствие функцию $\mathbf{T}(h)g$ такую, что $\mathbf{T}(h)g(t) = g(t+h)$. Семейство $\{\mathbf{T}(h) : h \geqslant 0\}$ является полугруппой, которая называется *полугруппой трансляций.*

Определение 1. Непустое множество

$$\mathcal{H}^+ \subset C(\mathbb{R}_+;V_\alpha) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$$

называется *пространством траекторий* задачи (1)–(3), а его элементы — *траекториями* этой задачи.

Определение 2. Множество $P \subset C(\mathbb{R};V_\alpha) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$ называется *притягивающим* (для пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+;H)$, выполняется условие

$$\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|\mathbf{T}(h)u - v\|_{C(\mathbb{R};V_\alpha)} \to 0 \quad (h \to \infty).$$

Определение 3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}; V_\alpha) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ называется *траекторным аттрактором* (пространства траекторий $\mathcal{H}^+$), если оно удовлетворяет следующим условиям: множество P компактно в $C(\mathbb{R}; V_\alpha)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$; имеет место равенство $\mathbf{T}(t)P = P$ для всех $t \geqslant 0$; множество P является притягивающим в смысле определения 2.

Минимальным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ называется такой траекторный аттрактор, который содержится в любом другом траекторном аттракторе.

Определение 4. Множество $\mathcal{A} \subset H$ называется *глобальным аттрактором* (в V_α) пространства траекторий $\mathcal{H}^+$, если оно удовлетворяет следующим условиям: множество $\mathcal{A}$ компактно в V_α и ограничено в H; для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ множества $B \subset \mathcal{H}^+$ выполняется условие притягивания $\sup\limits_{t\to\infty} \lim \|u(t) - y\| = 0$ при $u \in B$, $y \in A$; множество $\mathcal{A}$ является наименьшим, удовлетворяющим перечисленным условиям.

В качестве пространства траекторий задачи (1)–(3) возьмем множество функций $v \in L_\infty(\mathbb{R}_+; H) \cap L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$ с производной $v' \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V^*)$ и таких, что ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ является слабым решением задачи (1)–(3), и при любом $t \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s\in[t,t+1]} \|v(s)\|_H \leqslant C_1 \left(1 + \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} e^{-2\gamma t}\right)^{1/2},$$

$$\int_0^t e^{-2\gamma(t-s)} \|v(s)\|_V^2 \, ds \leqslant C_1^2 \left(1 + \|v\|^2_{L_\infty(\mathbb{R}_+;H)} e^{-2\gamma t}\right)$$

с некоторыми постоянными $C_1 > 0$ и $\gamma > 0$, не зависящими от v.

Отметим, что введенное пространство содержится в классе $C(\mathbb{R}_+; V_\alpha^*) \cap L_\infty(R_+; H)$ и непусто.

Используя теорию траекторных и глобальных аттракторов, построенную в [5] и подробно изложенную в [6], имеем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть параметры μ_0, μ_1, λ задачи* (1)–(3) *связаны соотношением $\mu_0 - \mu_1\lambda > 0$, и $\varphi \in V^*$. Тогда существует минимальный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ задачи* (1)–(3). *Этот аттрактор ограничен в $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$, компактен в $C(\mathbb{R}_+; V_\delta^*)$, он притягивает в топологии пространства $C(\mathbb{R}_+; V_\delta^*)$ ограниченные в норме $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ множества траекторий.*

Теорема 2. *Пусть параметры μ_0, μ_1, λ задачи* (1)–(3) *связаны соотношением $\mu_0 - \mu_1\lambda > 0$, и $\varphi \in V^*$. Тогда существует глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ пространства траекторий $\mathcal{H}^+$ задачи* (1)–(3). *Этот аттрактор ограничен в H, компактен в V_δ; он притягивает в топологии пространства V_δ^* ограниченные в норме $L_\infty(\mathbb{R}_+; H)$ множества траекторий.*

Литература

[1] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости*, Докл. РАН **380** (3), 308–311 (2001).

[2] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости*, Дифференц. уравнения, **38** (12), 1633–1645 (2002).

[3] Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. *Topological approximation methods for evolutionary problems of nonlinear hydrodynamics* (Walter de Gruyter, Berlin, 2008).

[4] Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г. *Конструкции оператора регуляризации в моделях движения вязкоупругих сред*, Вестник Воронежск. ун-та. Сер. физ. матем. №2, 148–153 (2004).

[5] Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. *Trajectory and global attractors of the boundary value problem for autonomous motion equations of viscoelastic medium*, J. Math. Fluid Mech., **10** (1), 19—44 (2008).

[6] Звягин В.Г., Кондратьев С.К. *Аттракторы для уравнений моделей движения вязкоупругих сред* (ИПЦ Воронежск. ун-та, Воронеж, 2010).

В.Г. Звягин

профессор, кафедра алгебры и топологических методов анализа,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006,

`e-mail:` zvg@math.vsu.ru

С.К. Кондратьев

младший научный сотрудник НИИ математики,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006,

`e-mail:` kondratjevsk@gmail.com

V.G. Zvyagin

Professor, Chair of Algebra and Topological Methods of Analysis,
Voronezh State Univeristy,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia,

`e-mail:` zvg@math.vsu.ru

S.K. Kondrat'ev

Junior Researcher, Research Institute of Mathematics,
Voronezh State Univeristy,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006, Russia,

`e-mail:` kondratjevsk@gmail.com