

УДК 517.53:532.546

## ЗАДАЧА $\mathbb{R}$ -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СОФОКУСНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

*Ю.В. Обносков, М.А. Егорова*

### Аннотация

В статье дается замкнутое аналитическое решение задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения для софокусного параболического кольца. Полностью исследованы случаи вещественных и комплексных коэффициентов краевого условия. Решение найдено в классе кусочно-голоморфных функций, принимающих заданное конечное значение на бесконечности в одном из компонентов среды.

**Ключевые слова:** гетерогенная среда, задача  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения, голоморфные функции.

Настоящая статья является непосредственным продолжением серии работ [1–6], посвященных изучению многофазных гетерогенных сред, разнородные фазы которых сопрягаются вдоль кривых второго порядка. Ниже будет приведено решение, поставленной в [7, с. 158], задачи 2 для трехфазной среды, линиями сопряжения разнородных компонентов которой служат две софокусные параболы. В двухфазном случае задача о параболическом включении в довольно общей ситуации рассматривалась в работе [8]. Результаты последней работы были уточнены и обобщены в монографии [7, с. 50].

Исследуемая ниже проблема в терминах кусочно-голоморфной функции  $v(z) = v_x(x, y) - i v_y(x, y)$ , комплексно сопряженной с вектор-функцией комплексной скорости  $\mathbf{v}(z) = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$ , приводится [9, с. 53], к следующей краевой задаче  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения:

$$v_p(t) = A_{pq}v_q(t) - B_{pq}[t'(s)]^{-2}\overline{v_q(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_{pq}, \quad (1)$$

где  $v_p(z)$  – голоморфный в однородной фазе  $S_p$  компонент функции  $v(z)$ , а  $\mathcal{L}_{pq}$  – линия сопряжения разнородных фаз  $S_p$  и  $S_q$ . Коэффициенты краевого условия (1) в общем случае определяются по формулам:

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p} - i \frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p} - i \frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \quad (2)$$

в частности

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p}. \quad (3)$$

Здесь параметры:  $\rho_p \geq 0$  (коэффициент сопротивления) и  $\beta_p \geq 0$  (параметр Холла) – характеризуют физические свойства среды  $S_p$ . Отметим, что к задаче (1) с комплексными коэффициентами (2) сводится, например, проблема формирования электрического поля в плоской электропроводящей гетерогенной среде под воздействием перпендикулярного к ней магнитного поля.

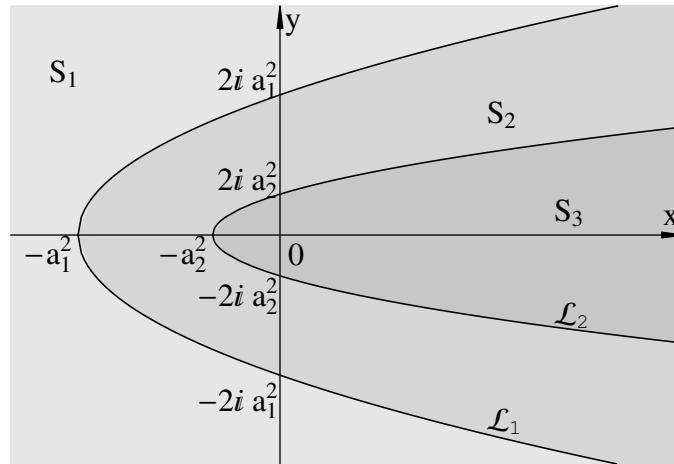


Рис. 1. Двухфазное параболическое включение

**1. Задача (1) для параболического кольца  
в случае вещественных коэффициентов**

Уточняя приведенную выше постановку, рассмотрим трехфазную среду, представляющую из себя бесконечную область  $S_1$  с инородными включениями  $S_2$  и  $S_3$  (см. рис. 1), ограниченными двумя софокусными параболой  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , оси которых совпадают с вещественной осью плоскости  $z$ , фокусы лежат в начале координат, а вершины – в точках  $-a_1^2$  и  $-a_2^2$ , то есть уравнения парабол имеют вид:

$$y^2 = 4a_k^2(x + a_k^2), \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

где  $a_1 > a_2 > 0$ .

Краевое условие (1) перепишем в виде:

$$v_k(t) = A_k v_{k+1}(t) - B_k [t'(s)]^{-2} \overline{v_{k+1}(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_k, \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

Здесь для краткости записи для коэффициентов (3) введены обозначения  $A_k = A_{k k+1}$ ,  $B_k = B_{k k+1}$ . В качестве дополнительного условия потребуем, чтобы функция  $v_3(z)$  принимала заданное значение на бесконечности:

$$v_3(\infty) = V_0 = V_{0x} - i V_{0y}. \tag{6}$$

В [7, с. 45] было доказано, что условие (6), не приводя к противоречиям, обеспечивает единственность решения задачи (5) в случае одного параболического включения. Ниже будет показано, что аналогичное утверждение имеет место и в рассматриваемой ситуации.

В силу симметричности парабол  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  относительно вещественной оси решением задачи (5) с вещественными коэффициентами  $A_k$ ,  $B_k$  вместе с функцией  $v(z)$  будет и функция  $\overline{v(\bar{z})}$ . Следовательно, справедливо представление:

$$v(z) = V_{0x} v_R(z) - V_{0y} v_I(z), \tag{7}$$

где

$$v_R(z) = (v(z) + \overline{v(\bar{z})})/2V_{0x}, \quad v_I(z) = -(v(z) - \overline{v(\bar{z})})/2V_{0y} \tag{8}$$

являются решениями задач (5), (6), удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} \overline{v_R(\bar{z})} &\equiv v_R(z), & v_R(\infty) &= 1; \\ \overline{v_I(\bar{z})} &\equiv -v_I(z), & v_I(\infty) &= i. \end{aligned} \tag{9}$$

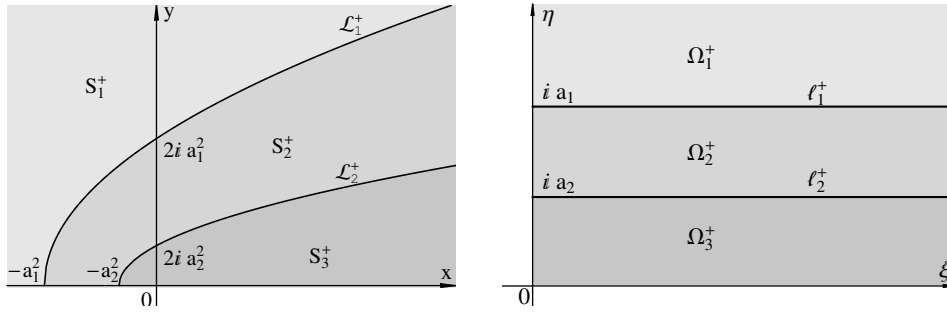


Рис. 2. Верхняя полуплоскость плоскости  $z$  и её образ на плоскости  $\zeta$  при отображении с помощью функции (10)

Итак, достаточно построить частные решения  $v_R(z)$  и  $v_I(z)$ , причем лишь для верхней полуплоскости  $\mathbb{C}^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$ . Чтобы найти частное решение  $v_R(z)$  задачи (5), удовлетворяющее соответствующим условиям (9), рассмотрим конформное отображение  $\mathbb{C}^+$  на первый квадрант плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$  с помощью функции

$$\zeta(z) = \sqrt{z}, \quad (10)$$

обратной к  $z(\zeta) = \zeta^2$ . Ветвь радикала  $\zeta = \sqrt{z}$ , фиксированная в  $\mathbb{C}^+$  условием  $\zeta > 0$  при  $z > 0$ , отображает верхнюю полуплоскость на первый квадрант  $\mathbb{C}_+^+ = \{z : \text{Im } z > 0, \text{Re } z > 0\}$  плоскости  $\zeta$  с соответствием областей  $S_j^+ \rightarrow \Omega_j^+$ ,  $j = 1, 2, 3$  (рис. 2). Полупараболы  $\mathcal{L}_k^+$  переходят в лучи

$$l_k^+ = \{\zeta : \text{Im } \zeta = a_k, \text{Re } \zeta > 0\}. \quad (11)$$

Чтобы найти вид граничных условий на  $l_k^+$ , в которые перейдут условия (5), используем найденную в [7, с. 44] зависимость от  $t$  производной функции точки  $t(s) \in \mathcal{L}_k$  по натуральному параметру  $s$ :

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2} = \frac{\sqrt{t} - 2i a_k}{\sqrt{t}} = \frac{\overline{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \frac{\bar{\tau}}{\tau}, \quad t \in \mathcal{L}_k^+, \quad \tau \in l_k^+. \quad (12)$$

На основании (5), (9) и (12) относительно кусочно-голоморфной в первом квадранте  $\mathbb{C}_+^+$  функции

$$V(\zeta) = \zeta v_R(\zeta^2) \quad (13)$$

придем к краевой задаче:

$$V_k(\tau) = A_k V_{k+1}(\tau) - B_k \overline{V_{k+1}(\tau)}, \quad \tau \in l_k^+, \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } V_3(\xi) &= 0, \quad \xi > 0, \\ \text{Re } V(i\eta) &= 0, \quad \eta > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

с дополнительными условиями:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [V_3(\zeta)/\zeta] = 1, \quad V_3(0) = 0, \quad (16)$$

вытекающими из соответствующих условий (9) и представления (13). Функция (13) в силу последнего условия (15) допускает аналитическое продолжение по непрерывности из  $\mathbb{C}_+^+$  во второй квадрант  $\mathbb{C}_-^+$ .

Компоненты  $\mathcal{V}_k(\zeta)$  продолженной по принципу симметрии функции

$$\mathcal{V}(\zeta) = \begin{cases} V(\zeta), & \zeta \in \mathbb{C}_+^+, \\ -\overline{V(-\bar{\zeta})}, & \zeta \in \mathbb{C}_+^-, \end{cases}$$

голоморфны в соответствующих областях  $\Omega_k = \{\zeta : a_{k-1} < \text{Im } \zeta < a_k\}$ ,  $k = 1, 2, 3$  ( $a_0 = \infty$ ,  $a_3 = 0$ ), удовлетворяют условиям (14) на прямых  $\ell_k = \{\zeta : \text{Im } \zeta = a_k\}$ ,  $k = 1, 2$ , и в силу второго условия (15) функция  $\mathcal{V}_3(\zeta)$  вещественна на вещественной оси. Ясно также, что продолженная функция удовлетворяет условиям (16) и условию симметрии:  $\mathcal{V}(\zeta) \equiv -\overline{\mathcal{V}(-\bar{\zeta})}$ . Таким образом, пришли к краевой задаче:

$$\mathcal{V}_k(\tau) = A_k \mathcal{V}_{k+1}(\tau) - B_k \overline{\mathcal{V}_{k+1}(\tau)}, \quad \tau \in \ell_k, \quad k = 1, 2; \quad (17)$$

$$\text{Im } \mathcal{V}_3(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}; \quad (18)$$

с дополнительными условиями:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\mathcal{V}_3(\zeta)/\zeta] = 1, \quad \mathcal{V}_3(0) = 0, \quad \mathcal{V}(\zeta) \equiv -\overline{\mathcal{V}(-\bar{\zeta})}. \quad (19)$$

Прежде чем переходить к решению последней задачи, докажем следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $S_1$  и  $S_{n+1}$  – полуплоскости:  $S_1 = \{z : \text{Im } z > h_1\}$ ,  $S_{n+1} = \{z : \text{Im } z < h_n\}$ ;  $S_k$  – полосы:  $S_k = \{z : h_k < \text{Im } z < h_{k-1}\}$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Кусочно-голоморфная функция  $v(z) = v_k(z) \in \mathcal{H}(S_k) \cap C(\bar{S}_k \setminus \{\infty\})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , удовлетворяет граничным условиям

$$v_{k+1}(t) = A'_k v_k(t) - B'_k \overline{v_k(t)}, \quad t \in \ell_k = \{z : \text{Im } z = h_k\} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

с комплексными коэффициентами (2):  $A'_k = A_{k+1k}$ ,  $B'_k = B_{k+1k}$ , а на бесконечности справедлива оценка

$$|v(z)| = o(|z|^{m+1}) \quad \text{для } |z| \gg 1, \quad (21)$$

где  $m$  – целое неотрицательное число. Тогда каждый из компонентов  $v_k(z)$  ( $k = 1, 2, \dots, n+1$ ) является полиномом степени не выше  $m$ , причем степени всех полиномов равны между собой.

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл Коши по границе полосы  $S_k$  с плотностью в виде исчезающей на бесконечности и голоморфной в этой полосе функции  $(z-z_0)^{-m-1} v_k(z)$ , где  $z_0$  – любая внешняя по отношению к полосе  $S_k$  точка. Разбивая этот интеграл на два по компонентам границы  $\ell_{k-1}$ ,  $\ell_k$ , получим представление для  $v_k(z)$  в виде суммы  $v_k(z) = v_k^+(z) + v_k^-(z)$ , слагаемые которой голоморфны в полуплоскостях  $\text{Im } z > h_k$  и  $\text{Im } z < h_{k-1}$  соответственно и удовлетворяют условию (21). Перепишем краевые условия (20) в виде

$$v_{k+1}^+(t) + v_{k+1}^-(t) = A'_k (v_k^+(t) + v_k^-(t)) - B'_k (\overline{v_k^+(\bar{t} + 2i h_k)} + \overline{v_k^-(\bar{t} + 2i h_k)}),$$

где  $v_1^-(z) \equiv 0$ ,  $v_1^+(z) = v_1(z)$ ,  $v_{n+1}^+(z) \equiv 0$ ,  $v_{n+1}^-(z) = v_{n+1}(z)$ . Следовательно, голоморфная в полуплоскостях  $\text{Im } z > h_k$ ,  $\text{Im } z < h_k$  функция

$$P_k(z) = \begin{cases} v_{k+1}^+(z) - A'_k v_k^+(z) + B'_k \overline{v_k^-(\bar{z} + 2i h_k)}, & \text{Im } z > h_k, \\ A'_k v_k^-(z) - v_{k+1}^-(z) - B'_k \overline{v_k^+(\bar{z} + 2i h_k)}, & \text{Im } z < h_k \end{cases} \quad (22)$$

непрерывна на прямой  $\ell_k$ . По теореме о непрерывном аналитическом продолжении функция  $P_k(z)$  голоморфна в плоскости  $\mathbb{C}$ . На бесконечности для нее, очевидно, справедлива оценка (21). В силу обобщенной теоремы Лиувилля  $P_k(z)$  является полиномом степени не выше  $m$ . Отсюда, в частности, следует, что функции  $v_k^+(z)$  и  $v_{k+1}^-(z)$  допускают аналитическое продолжение соответственно в полуплоскости  $\text{Im } z > h_k - d$  и  $\text{Im } z < h_k + d$ , где  $d = \min_{1 \leq k \leq n-1} d_k$ , а  $d_k = h_k - h_{k+1}$  – ширина полосы  $S_{k+1}$ . Дифференцируя  $m+1$  раз левые и правые части соотношений (22) получим

$$\begin{aligned} f_{k+1}^+(z) &= A'_k f_k^+(z) - \overline{B'_k f_k^-(\bar{z} + 2i h_k)}, \quad \text{Im } z > h_k, \\ f_{k+1}^-(z) &= A'_k f_k^-(z) - \overline{B'_k f_k^+(\bar{z} + 2i h_k)}, \quad \text{Im } z < h_k, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

где  $f_k^\pm(z) = [v_k^\pm(z)]^{(m+1)}$ .

Из (23) с учетом  $f_1^-(z) \equiv 0$  последовательно получим:

$$\begin{aligned} f_2^+(z) &= A'_1 f_1^+(z), \quad f_2^-(z) = -\overline{B'_1 f_1^+(\bar{z} + 2i h_1)} \quad \text{при } k = 1, \\ f_3^+(z) &= A'_2 A'_1 f_1^+(z) + B'_2 \overline{B'_1 f_1^+(z + 2i d_1)}, \\ f_3^-(z) &= -\overline{A'_2 B'_1 f_1^+(\bar{z} + 2i h_1)} - \overline{B'_2 A'_1 f_1^+(\bar{z} + 2i h_2)} \quad \text{при } k = 2. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим представление для  $f_k^\pm$  через  $f_1^+$  для  $k = 2, \dots, n$ . Так как  $f_{n+1}^+(z) \equiv 0$ , из (23) при  $k = n$  следует:  $A'_n f_n^+(z) - \overline{B'_n f_n^-(\bar{z} + 2i h_n)} \equiv 0$ . Отсюда методом полной математической индукции несложно получить следующее функциональное уравнение относительно  $f_1^+(z)$ :

$$f_1^+(z) = \sum_{|\mathbf{k}|=1}^{n-1} \delta_{\mathbf{k}} f_1^+(z + 2i D_{\mathbf{k}}), \quad (24)$$

где  $\mathbf{k}$  – упорядоченный мультииндекс, то есть если  $|\mathbf{k}| = l$ , то  $\mathbf{k} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$  и  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n-1$ ,  $D_{\mathbf{k}} = d_{j_1} + d_{j_2} + \dots + d_{j_l}$  и  $|\delta_{\mathbf{k}}| < 1$ . Интегрируя  $m+1$  раз уравнение (24), придем относительно  $v_1(z)$  к уравнению вида

$$v_1(z) = \sum_{|\mathbf{k}|=1}^{n-1} \delta_{\mathbf{k}} v_1(z + 2i D_{\mathbf{k}}) + P(z), \quad (25)$$

где  $P(z)$  – полином степени  $m$ . Функция  $v_1(z)$  голоморфна в полуплоскости  $\text{Im } z > h_1$ , значит, правая часть равенства (25), а вместе с ней и функция  $v_1(z)$  голоморфны в полуплоскости  $\text{Im } z > h_1 - d$  и удовлетворяют там оценке (21). Отсюда следует голоморфность обеих частей равенства (25) и справедливость оценки (21) в любой из полуплоскостей  $\text{Im } z > h_1 - Nd$  для произвольного натурального  $N$ . Следовательно, поскольку  $d = \min_{1 \leq k \leq n-1} d_k > 0$ , функция  $v_1(z)$  голоморфна в плоскости  $\mathbb{C}$  и удовлетворяет оценке (21) в окрестности бесконечности. По обобщенной теореме Лиувилля  $v_1(z)$  – полином степени не выше  $m$ . Следовательно,  $f_1^+(z) \equiv 0$ , а значит, и все  $f_k^\pm(z) \equiv 0$ ,  $k = 2, \dots, n+1$ , то есть  $v_k(z)$  – полиномы, степени которых не превосходят  $m$ . Совпадение степеней всех этих полиномов вытекает из граничных условий (20). Тем самым лемма полностью доказана.  $\square$

Возвращаясь к решению задачи (14)–(16), с помощью условия (15) продолжим функцию  $\mathcal{V}_3(\zeta)$  по симметрии до функции  $\mathcal{V}_3^*(\zeta)$ , голоморфной в полосе  $\Omega_3^* = \{\zeta : -a_2 < \text{Im } \zeta < a_2\}$ , и определим функции  $\mathcal{V}_k^*(\zeta) = \overline{\mathcal{V}_k(\bar{\zeta})}$ ,  $k = 1, 2$ , голоморфные в полуплоскости  $\Omega_1^* = \{\zeta : \text{Im } \zeta < -a_1\}$  и в полосе  $\Omega_2^* = \{\zeta : -a_1 < \text{Im } \zeta < -a_2\}$

соответственно. Ясно, что введенные таким образом функции удовлетворяют краевым условиям (17) на прямых  $\ell_k^*$ , симметричных относительно вещественной оси с соответствующими прямыми  $\ell_k$ . Таким образом, пришли к задаче (20) при  $n = 4$  и  $m = 1$ , компоненты решения которой, в силу доказанной леммы, являются полиномами первого порядка. Учитывая условия (18), (19), решение задачи (17) следует отыскивать в следующем виде:

$$\mathcal{V}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{V}_1(\zeta) = a_{11}\zeta + ia_{12}, & \text{Im } \zeta > a_1, \\ \mathcal{V}_2(\zeta) = a_{22}\zeta + ia_{22}, & a_2 < \text{Im } \zeta < a_1, \\ \mathcal{V}_3(\zeta) = \zeta, & 0 < \text{Im } \zeta < a_2. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь  $a_{kj}$  – вещественные коэффициенты, подлежащие определению. Требуя, чтобы функция (26) удовлетворяла условиям (17), с учетом справедливых на соответствующих прямых  $\eta = a_k$  равенств:  $\bar{\tau} = \tau - i2a_k$ ,  $k = 1, 2$ , получим систему:

$$\begin{aligned} a_{11}\tau + ia_{12} &= A_1(a_{21}\tau + ia_{22}) - B_1(a_{21}(\tau - i2a_1) - ia_{22}), \\ a_{21}\tau + ia_{22} &= A_2\tau - B_2(\tau - i2a_2). \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при  $\tau$  и свободные члены, искомые коэффициенты однозначно определим по формулам:

$$a_{11} = \theta_1\theta_2, \quad a_{12} = a_2(1 + \theta_2) + a_1\theta_2(1 - \theta_1), \quad a_{21} = \theta_2, \quad a_{22} = a_2(1 - \theta_2),$$

где

$$\theta_k = \rho_{k+1}/\rho_k, \quad k = 1, 2. \quad (27)$$

Возвращаясь в плоскость комплексного переменного  $z$ , с учетом (10), (13) получим:

$$\begin{aligned} v_{R1}(z) &= \theta_1\theta_2 + i[a_2(1 - \theta_2) + a_1\theta_2(1 - \theta_1)]/\sqrt{z}, \\ v_{R2}(z) &= \theta_2 + ia_2(1 - \theta_2)/\sqrt{z}, \\ v_{R3}(z) &\equiv 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично находится частное решение  $v_I(z)$  задачи (5), удовлетворяющее соответствующим условиям (9). Опуская элементарные выкладки, запишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} v_{I1}(z) &= i + [a_2\theta_1(1 - \theta_2) + a_1(1 - \theta_1)]/\sqrt{z}, \\ v_{I2}(z) &= i + a_2(1 - \theta_2)/\sqrt{z}, \\ v_{I3}(z) &\equiv i. \end{aligned} \quad (29)$$

На основании (7), (28), (29) искомое решение задачи (5), (6) получим в виде:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \theta_1\theta_2 V_{0x} - iV_{0y} + i[a_2(1 - \theta_2)(V_{0x} + i\theta_1 V_{0y}) + a_1(1 - \theta_1)(\theta_2 V_{0x} + iV_{0y})]/\sqrt{z}, \\ v_2(z) &= \theta_2 V_{0x} - iV_{0y} + ia_2(1 - \theta_2)\bar{V}_0/\sqrt{z}, \\ v_3(z) &\equiv V_0. \end{aligned} \quad (30)$$

**Замечание 1.** В случае вырождения рассмотренной трехфазной структуры в двухфазную, то есть при  $\rho_1 = \rho_2$ , или  $\rho_2 = \rho_3$ , формулы (30) приводят к решению задачи о параболическом включении [7, с. 45]. Для однородной среды при  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$  решение (30) вырождается в тождественную константу  $V_0$ , как это и должно быть.

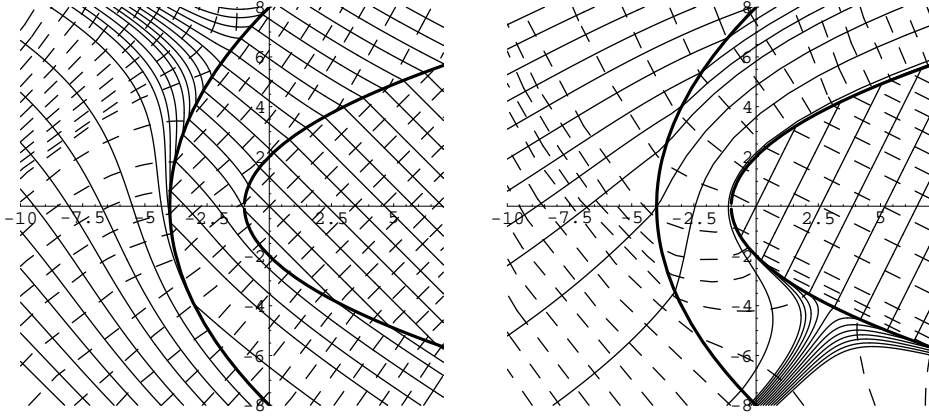


Рис. 3. Сплошные линии – линии тока, пунктирные – эквипотенциали

На рис. 3 приведены примеры распределения линий тока и эквипотенциалей для рассмотренной структуры. Вершины парабол лежат в точках:  $-1$  и  $-4$ . Слева коэффициенты сопротивления принимают значения:  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 10$ ,  $\rho_3 = 20$ ,  $V_0 = 1 + i$ , а справа  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 0.5$ ,  $\rho_3 = 50$ ,  $V_0 = 1 - 2i$ .

## 2. Решение задачи (5), (6) в случае комплексных коэффициентов (2)

В силу доказанной в предыдущем разделе леммы и в случае комплексных коэффициентов (2) структура решения задачи (5), (6) остается такой же, как и в вещественном, рассмотренном выше, случае, а именно:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= C_1 + iD_1/\sqrt{z}, \\ v_2(z) &= C_2 + iD_2/\sqrt{z}, \\ v_3(z) &= V_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $C_k$ ,  $D_k$  – некоторые постоянные, в данном случае комплексные коэффициенты.

Подставив (31) в (13) и получившийся результат в краевое условие (17), имеем

$$\begin{aligned} C_1(\xi + ia_1) + iD_1 &= A_1C_2(\xi + ia_1) + iA_1D_2 - B_1\overline{C_2}(\xi - ia_1) + iB_1\overline{D_2}, \\ C_2(\xi + ia_2) + iD_2 &= A_2(\xi + ia_2)V_0 - B_2(\xi - ia_2)\overline{V_0}. \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при  $\xi$  и свободные члены, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1C_2 - B_1\overline{C_2}, \quad C_2 = A_2V_0 - B_2\overline{V_0}, \\ a_1C_1 + D_1 &= a_1A_1C_2 + A_1D_2 + a_1B_1\overline{C_2} + B_1\overline{D_2}, \\ a_2C_2 + D_2 &= a_2A_2V_0 + a_2B_2\overline{V_0}. \end{aligned}$$

Решая её, найдем:

$$\begin{aligned} C_1 &= (A_1A_2 + B_1\overline{B_2})V_0 - (A_1B_2 + B_1\overline{A_2})\overline{V_0}, \quad C_2 = A_2V_0 - B_2\overline{V_0}, \\ D_1 &= (2aA_1B_2 + 2bB_1\overline{A_2})V_0 + (2bB_1\overline{B_2} - 2aB_1\overline{B_2})\overline{V_0}, \quad D_2 = 2iaB_2\overline{V_0}. \end{aligned}$$

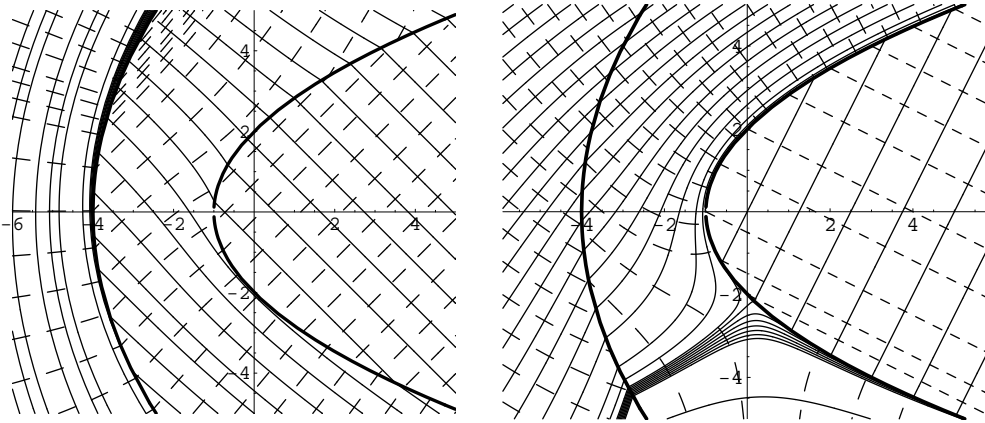


Рис. 4. Распределение линий тока и эквипотенциалей в параболическом кольце при учете эффекта Холла

На основании (31) единственное решение задачи (5), (6) с комплексными коэффициентами (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= (A_1 A_2 + B_1 \overline{B_2}) V_0 - (A_1 B_2 + B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0} + \\ &\quad + 2i [(a_2 A_1 B_2 + a_1 B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0} - B_1 \overline{B_2} (a_1 - a_2) V_0] / \sqrt{z}, \quad z \in S_1, \\ v_2(z) &= A_2 V_0 - B_2 \overline{V_0} (1 - 2i a_2 / \sqrt{z}), \quad z \in S_2, \\ v_3(z) &= V_0, \quad z \in S_3. \end{aligned} \quad (32)$$

Комплексной скорости (32) соответствует комплексный потенциал  $w(z) = w_k(z)$  при  $z \in S_k$ :

$$\begin{aligned} w_1(z) &= [(A_1 A_2 + B_1 \overline{B_2}) V_0 - (A_1 B_2 + B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0}] (z + a_1^2) + \\ &\quad + 4i [(a_2 A_1 B_2 + a_1 B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0} - B_1 \overline{B_2} (a_1 - a_2) V_0] (\sqrt{z} - i a_1), \\ w_2(z) &= (A_2 V_0 - B_2 \overline{V_0}) (z + a_1^2) - 4i a_2 B_2 \overline{V_0} (\sqrt{z} - i a_1), \\ w_3(z) &= V_0 (z + a_2^2) + \theta_2^{-1} \operatorname{Re} w_2(-a_2^2) + i \operatorname{Im} w_2(-a_2^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь константы интегрирования подобраны таким образом, чтобы обеспечить при переходе через линии сопряжения разнородных фаз непрерывность функции тока  $\psi(z) = \operatorname{Im} w(z)$  и требуемую пропорциональность потенциала  $\varphi(z) = \operatorname{Re} w(z)$ :  $\rho_k \varphi_k(t) = \rho_{k+1} \varphi_{k+1}(t)$ ,  $t \in \mathcal{L}_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Примеры расчета распределения линий тока и эквипотенциалей по формулам (32) и (33) приведены на рис. 4 (слева и справа соответственно). В первом случае коэффициенты сопротивления и параметры Холла принимают значения:  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 10$ ,  $\rho_3 = 20$ ,  $\beta_1 = 8$ ,  $\beta_2 = 4$ ,  $\beta_3 = 2$ ,  $V_0 = 1 + i$ , а во втором —  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 0.5$ ,  $\rho_3 = 50$ ,  $\beta_1 = 0.9$ ,  $\beta_2 = -0.1$ ,  $\beta_3 = 0.3$ ,  $V_0 = 1 - i2$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-97008-р\_поволжье\_а и 09-01-12188-офи\_м).



### Summary

*Yu.V. Obnosov, M.A. Egorova.*  $\mathbb{R}$ -linear Conjugation Problem for a Confocal Parabolic Annulus.

The article presents an analytical closed-form solution derived for an  $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem for a confocal parabolic annulus. The cases of real and complex coefficients of boundary conditions are comprehensively studied. The solution is found in the class of piece-wise holomorphic functions with fixed finite value at infinity in one of the media components.

**Key words:** heterogeneous media,  $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem, holomorphic functions.

### Литература

1. *Обносов Ю.В.* Решение задачи  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения в случае гиперболической линии разделения разнородных фаз // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 7. – С. 53–62.
2. *Обносов Ю.В.* Решение задачи о распределении фильтрационных полей в бесконечном пористом массиве с двумя круговыми включениями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 109–123.
3. *Мальцева А.М., Обносов Ю.В., Rogozin С.В.* Обобщение теоремы Милн-Томсона на случай концентрического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 35–50.
4. *Obnosov Yu.V.* A generalized Milne-Thomson theorem for the case of parabolic inclusion // Appl. Math. Model. – 2009. – V. 33. – P. 1970–1981.
5. *Obnosov Yu.V., Nikonenkova T.V.* Solution of an  $\mathbb{R}$ -linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface // Lithuanian Math. J. – 2008. – V. 48, No 3. – P. 322–331.
6. *Обносов Ю.В.* Задача  $\mathbb{R}$ -линейного сопряжения для софокусного эллиптического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 137–1146.
7. *Обносов Ю.В.* Краевые задачи теории гетерогенных сред. (Многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка). – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2009. – 205 с.
8. *Голубева О.В., Шпилевой А.Я.* О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 2. – С. 174–179.
9. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. – Киев: Наукова думка, 1987. – 254 с.

Поступила в редакцию  
12.05.09

---

**Обносов Юрий Викторович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: [yobnosov@ksu.ru](mailto:yobnosov@ksu.ru)

**Егорова Мария Александровна** – студент механико-математического факультета Казанского государственного университета.