Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2018, № 11, с. 75–81 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное В.П. Максимовым

Е.С. ЖУКОВСКИЙ, Х.М.Т. ТАХИР

ОБ УСЛОВИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ КОШИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Обсуждается связь утверждений об оценках решений линейных функционально-дифференциальных уравнений, аналогичных теореме Чаплыгина о дифференциальном неравенстве, с положительностью функции Коши и фундаментального решения. Получена теорема сравнения функций Коши и фундаментальных решений двух функционально-дифференциальных уравнений. В теореме предполагается, что разность соответствующих уравнениям операторов (действующих из пространства абсолютно непрерывных функций в пространство суммируемых функций) есть монотонный вольтерров вполне непрерывный оператор. Также получены условия положительности функции Коши и фундаментального решения конкретных уравнений с запаздыванием и нейтрального типа.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, функция Коши, теорема Чаплыгина о дифференциальном неравенстве, линейный вольтерров оператор.

УДК: 517.929

Введение. Пусть $X = (X, \succeq)$, $\Lambda = (\Lambda, \succeq)$ — частично упорядоченные пространства, Y — множество, пусть определено отображение $\Phi : X \times \Lambda \to Y$ и задан элемент $\theta \in Y$. Рассмотрим уравнение $\Phi(x, \lambda) = \theta$ с параметром $\lambda \in \Lambda$ (относительно неизвестного $x \in X$). Для получения оценок решений бывают эффективны утверждения о монотонной зависимости решения x от параметра λ. Для дифференциальных уравнений в качестве параметров обычно выбираются функции, входящие в уравнения (например, известные правые части уравнений), а также значения начальных или краевых условий. В теореме Чаплыгина [1] утверждается, что в предположении непрерывности функции φ, если для функции x_0 выполнено $\dot{x}_0(t) > \varphi\big(t, x_0(t)\big)$, $t \geq 0$, то для решения уравнения $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $t \geq 0$, с начальным условием $x(0) = x_0(0)$ имеет место строгое неравенство $x(t) < x_0(t)$, $t > 0$. Это утверждение можно трактовать (при соответствующей упорядоченности функций) как теорему о строгой монотонной зависимости от λ решения x задачи Коши для уравнения $\dot{x} - \varphi(t, x) = \lambda(t)$.

Распространению и обобщению утверждений о неравенствах посвящены многие исследования, фундаментальные результаты о дифференциальных и интегральных неравенствах

Поступила 30.03.2018

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской федерации (задание № 3.85152017/8.9) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-51-12064, 17-41-680975).

получены Н.В. Азбелевым (см. [2], раздел 1). Функционально-дифференциальные неравенства исследовались участниками Пермского семинара ([3]–[5]), условия применимости теоремы Чаплыгина к линейным краевым задачам получены в [6], [7]. Нелинейные функциональные неравенства исследовались в [8]. В недавних работах [9], [10] начато исследование неявных дифференциальных и функционально-дифференциальных неравенств.

Аналог теоремы Чаплыгина о нестрогом неравенстве для линейного эволюционного функционально-дифференциального уравнения имеет место тогда и только тогда, когда неотрицательна его функция Коши $\mathcal{C}(t,s)$. Для справедливости соответствующего утверждения о строгом неравенстве дополнительно требуется, чтобы при любом $t>0$ мера множества $\{s : \mathcal{C}(t,s) > 0\}$ была положительной. Монотонная зависимость решения от начального значения равносильна неотрицательности нормального фундаментального решения $X(t)$, и при увеличении начального значения решение строго возрастает тогда и только тогда, когда $X(t) > 0$.

В данном сообщении формулируется теорема сравнения функций Коши, а также фундаментальных решений двух функционально-дифференциальных уравнений. Это утверждение позволяет получать условия положительности функции Коши и фундаментального решения конкретных уравнений с запаздыванием и нейтрального типа.

1. Линейное эволюционное функционально-дифференциальное уравнение. Обозначим $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, L — пространство суммируемых по Лебегу функций $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|y\|_L = \int\limits_0^T |y(t)|\,dt$, AC — пространство абсолютно непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_{AC} = \|\dot{x}\|_L + |x(0)|$, $AC_0 = \{x \in AC : x(0) = 0\}$.

Пусть X, Y — некоторые пространства определенных на $[0,T]$ скалярных функций. Отображение $F : X \to Y$ называют вольтерровым (по А.Н. Тихонову), если для любого $\tau \in (0,T]$ и любых $x, u \in X$ из равенства $x(t) = u(t)$ на $[0,\tau]$ следует $(Fx)(t) = (Fu)(t)$ на $[0,\tau]$. Отображение $F : X \to Y$ называют положительным, если для любой неотрицательной функции $x \in X$ функция Fx неотрицательна.

Пусть задан линейный ограниченный оператор $\mathcal{L} : AC \to L$, $f \in L$. Сначала приведем необходимые сведения из [3] о линейном функционально-дифференциальном уравнении

$$\mathcal{L}x = f. \tag{1}$$

Если оператор $Q : L \to L$, $Qy = \mathcal{L}\Big(\int\limits_0^{(\cdot)} y(s)d(s)\Big)$ обратим и обратный оператор $Q^{-1} : L \to L$ вольтерров, то задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L$, ее решение представимо в виде

$$x(t) = \alpha X(t) + \int_0^t \mathcal{C}(t,s)\, f(s)\, ds, \tag{2}$$

где X — нормальное фундаментальное решение однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$ такое, что $X(0) = 1$, и $\mathcal{C} : \Delta_T \doteq \{(t,s) : s \in [0,t],\ t \in [0,T]\} \to \mathbb{R}$ — функция Коши.

Из соотношения (2) следует, что для монотонной зависимости решения x от начального значения α необходимо и достаточно, чтобы фундаментальное решение X было неотрицательным, а для монотонной зависимости решения x от правой части f необходимо и достаточно, чтобы неотрицательной была функция Коши. Итак, неравенства $X(t) \geq 0$, $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ являются критерием справедливости утверждений типа теоремы Чаплыгина о нестрогом неравенстве; если, более того, $X(t) > 0$ при любом t, $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при всех $t > 0$ и всех s из некоторого множества положительной меры, то справедливы соответствующие строгие неравенства. Для оператора Коши $f \in L \mapsto Cf \doteq \int\limits_0^{(\cdot)} \mathcal{C}(\cdot,s)f(s)ds \in AC_0$ имеет место представление $C = \left(Q\frac{d}{dt}\right)^{-1}$, где $\frac{d}{dt} : AC_0 \to L$ — оператор дифференцирования. Таким образом, неравенство $\mathcal{C}(t,s) \geq 0$ равносильно положительности вольтеррова оператора $\left(Q\frac{d}{dt}\right)^{-1} : L \to AC_0$. Отметим, что условия положительной обратимости достаточно широкого класса отображений, в том числе, возникающих в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений, получены в [11]. Доказательство формулируемого ниже утверждения о положительности функции Коши основано на проверке положительности вольтеррова оператора $\left(Q\frac{d}{dt}\right)^{-1} : L \to AC_0$.

2. Основной результат. Получим условия на линейный оператор $H : AC \to L$, при выполнении которых из положительности или неотрицательности функции Коши функционально-дифференциального уравнения (1) следует, что соответствующим свойством обладает "возмущенное" уравнение

$$\widetilde{\mathcal{L}}x \doteq \mathcal{L}x - Hx = f. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть оператор $H : AC \to L$ вольтерров, положителен и вполне непрерывен. Тогда, если задача Коши для функционально-дифференциального уравнения* (1) *однозначно разрешима и ее решение представимо в виде* (2) *с неотрицательной функцией Коши $\mathcal{C}(t,s)$, задача Коши для уравнения* (3) *также однозначно разрешима и ее решение $\widetilde{x}$ имеет представление* (2), *т. е. $\widetilde{x}(t) = \alpha\widetilde{X}(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{C}}(t,s)\, f(s)\, ds$, причем функция Коши удовлетворяет неравенству $\widetilde{\mathcal{C}}(t,s) \geq \mathcal{C}(t,s)$, $(t,s) \in \Delta_T$. Если в дополнение к перечисленным условиям неотрицательным является и нормальное фундаментальное решение $X(t)$ однородного уравнения $\mathcal{L}x = 0$, то для нормального фундаментального решения $\widetilde{X}(t)$ однородного уравнения $\widetilde{\mathcal{L}}x = 0$ выполнено $\widetilde{X}(t) \geq X(t)$, $t \in [0,T]$.*

Иллюстрацией теоремы служит следующий пример уравнения с невольтерровым оператором $\mathcal{L} : AC \to L$, решение которого, тем не менее, может быть записано в виде (2).

Пример. Определим функцию $h : [0,1] \to [0,1]$ равенством

$$h(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 1/3]; \\ (t+1)/2, & t \in (1/3, 1]. \end{cases}$$

Отметим, что при всех $t \in [0,1]$ выполнены неравенства $h(t) \geq t$, $h^{-1}(t) \leq t$.

Задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ для уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t) \doteq \dot{x}(h(t)) = f(t), \quad t \in [0,1],$$

очевидно, однозначно разрешима:

$$\dot{x}(t) = f(h^{-1}(t)), \quad x(t) = \alpha + \int_0^t f(h^{-1}(s))ds = \alpha + \int_0^t \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)f(s)ds.$$

Здесь и ниже $\chi_{[\tau_1,\tau_2]}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau_1,\tau_2]$. Итак, имеет место соотношение (2) с неотрицательной функцией Коши $\mathcal{C}(t,s) = \chi_{[0,\,h^{-1}(t)]}(s)\dot{h}(s)$ и фундаментальным решением $X(t) \equiv 1$ однородного уравнения. Согласно теореме для любого вольтеррова, положительного, вполне непрерывного оператора $H : AC \to L$ задача Коши

$$(\widetilde{\mathcal{L}}x)(t) \doteq \dot{x}(h(t)) - (Hx)(t) = f(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = \alpha,$$

также однозначно разрешима, и ее решение представимо в виде (2) с неотрицательной функцией Коши и положительным фундаментальным решением.

3. Условия положительности функции Коши конкретных уравнений. Здесь исследуются конкретные функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием и нейтрального типа. Рассматриваемые уравнения содержат два параметра: коэффициент $p(t)$ и длину T отрезка "времени". В терминах ограничений на эти параметры формулируются условия положительности фундаментального решения и функции Коши.

Пусть $p \in L$. Рассмотрим дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\dot{x}(t) - p(t)x(t-1) = f(t), \quad t \in [0,T], \quad x(\xi) = 0, \quad \text{если} \quad \xi < 0. \tag{4}$$

При любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L$ решение задачи Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ существует, единственно, записывается в виде (2), в котором $X(t) = \mathcal{C}(t,0)$. Получим условия положительности функции Коши и, следовательно, положительности нормального фундаментального решения соответствующего однородного уравнения.

Будем сначала предполагать, что $p(t) \equiv p \in \mathbb{R}$. В этом случае фундаментальное решение и функция Коши связаны соотношением ([5], замечание 2.4, с. 56)

$$\mathcal{C}(t,s) = X(t-s),$$

таким образом, положительность (неотрицательность) одной из функций $X(t)$, $\mathcal{C}(t,s)$ влечет положительность (неотрицательность) другой. В рассматриваемой ситуации решение задачи Коши для уравнения (4) удается записать аналитически:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n} \chi_{[k,T)}(t) \left(\frac{\alpha p^k (t-k)^k}{k!} + \int_0^{t-k} \frac{p^k (t-s-k)^k}{k!} f(s)\, ds \right), \tag{5}$$

где натуральное n определяется включением $T \in (n, n+1]$. Соотношение (5) позволяет получить условия положительности функции Коши и фундаментального решения.

Определим многочлен

$$F_T^n(z) = 1 + \frac{(T-1)}{1!} z + \frac{(T-2)^2}{2!} z^2 + \cdots + \frac{(T-n)^n}{n!} z^n \tag{6}$$

переменной $z \in \mathbb{R}$, степень n многочлена находится из условия $T \in (n, n+1]$. Все коэффициенты этого многочлена положительны, следовательно, у него нет неотрицательных действительных корней.

Лемма. *Многочлен $F_T^n(z)$ имеет действительные корни, для наибольшего действительного корня z_T^n выполнено: $z_T^n < 0$ и при любых натуральных $n_1 \le n_2$ и любых $T_1 \in (n_1, n_1+1]$, $T_2 \in (n_2, n_2+1]$ таких, что $T_2 > T_1$, имеем $z_{T_2}^{n_2} > z_{T_1}^{n_1}$.*

Предложение 1. *Пусть $p(t) \equiv p \in \mathbb{R}$. Если $p > z_T^n$, то для нормального фундаментального решения и функции Коши уравнения (4) имеют место неравенства $X(t) > 0$ при $t \in [0,T]$ и $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$. Если $p = z_T^n$, то $X(T) = 0$ и $X(t) > 0$ при $t \in [0,T)$, $\mathcal{C}(T,0) = 0$ и $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при остальных $(t,s) \in \Delta_T$. Если $p < z_T^n$, то существуют такие $0 < \gamma_1 < \gamma_2 \le T$, что $X(t) < 0$ при $t \in (\gamma_1, \gamma_2)$ и $\mathcal{C}(t,s) < 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$, удовлетворяющих неравенству $\gamma_1 < t - s < \gamma_2$.*

Роль многочлена (6) в исследовании уравнения (4), видимо, впервые была отмечена В.В. Малыгиной в [12]. Предложение 1 аналогично теореме 6 из [12] о первом нуле фундаментального решения уравнения (4). В цитируемой работе используется многочлен (6) только при натуральных значениях T; показано, что в случае $p = z^n_{n+1}$ фундаментальное решение в точке $T = n + 1$ первый раз обращается в нуль, а при $z^{n-1}_n < p < z^n_{n+1}$ первый нуль находится в интервале $(n, n+1)$. Кроме того, на основании критерия ([13], с. 212) положительности на полуоси решения этого уравнения показано, что $\inf\{z^n_{n+1}\} = -e^{-1}$.

Используя теорему, из предложения 1 получаем утверждение для случая переменного коэффициента в уравнении (4).

Следствие 1. Пусть $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,T]} p(t) > z^n_T$, тогда для нормального фундаментального решения и функции Коши уравнения (4) имеют место неравенства $X(t) > 0$ при $t \in [0,T]$ и $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$. Если $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,T]} p(t) = z^n_T$, то $X(t) > 0$ при $t \in [0,T)$ и $\mathcal{C}(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$, $(t,s) \neq (T,0)$.

Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) - p(t)x(t/2) = f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{7}$$

Задача Коши для этого уравнения однозначно разрешима при любой правой части $f \in L$ и любом начальном значении $\alpha \in \mathbb{R}$, решение представимо в виде (2), где $X(t) = \mathcal{C}(t,0)$.

Начнем с ситуации постоянного коэффициента $p(t) \equiv p \in \mathbb{R}$. При таком предположении решение задачи Коши для уравнения (7) определяется равенством

$$x(t) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n t^n}{n! 2^{n(n-1)/2}} + \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} p^n \chi_{[0,\,t/2^n]}(s) \frac{2^{n(n-1)/2}}{n!} \left(\frac{t}{2^{n-1}} - 2s\right)^n f(s)\,ds.$$

Предложение 2. *Пусть $p(t) \equiv p \in \mathbb{R}$. Если $pT \geq -1$, то для нормального фундаментального решения и функции Коши уравнения* (7) *справедливы неравенства $X(t) > 0$ при $t \in [0,T]$, $C(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$.*

Из этого предложения и теоремы 1 получаем следующее утверждение об уравнении (7) с переменным коэффициентом $p(\cdot) \in L$.

Следствие 2. Если $T \operatorname*{vrai\,inf}_{t\in[0,T]} p(t) \geq -1$, то для нормального фундаментального решения и функции Коши уравнения (7) справедливы неравенства $X(t) > 0$ при $t \in [0,T]$, $C(t,s) > 0$ при $(t,s) \in \Delta_T$.

В заключение рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - p(t)\dot{x}(t/2) = f(t), \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Даже в случае постоянного коэффициента $p(t) = \mathrm{const}$ не при всех его значениях начальная задача для уравнения (8) однозначно разрешима (в отличие от рассмотренных выше уравнений с запаздывающим аргументом). В случае ее однозначной разрешимости любое решение соответствующего однородного уравнения, очевидно, постоянно, $X(t) \equiv 1 > 0$.

Предложение 3. *Пусть $\overline{p} \doteq \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} |p(t)| < 1/2$, тогда при любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L$ задача Коши для уравнения* (8) *однозначно разрешима, решение представимо в виде* (2), *функция*

Коши определяется соотношениями

$$\mathcal{C}(t,s)=1,\quad \frac{t}{2}<s\le t;\quad \mathcal{C}(t,s)=1+\sum_{i=1}^{n}2^{i}p(2s)\cdots p(2^{i}s),\quad \frac{t}{2^{n+1}}<s\le\frac{t}{2^{n}},\quad n=1,2,\dots\,;$$

и справедливы следующие утверждения:

если $\operatorname*{vrai\,inf}\limits_{t\in[0,T]} p(t)p(t/2)\ge 0$*, то* $\mathcal{C}(t,s)\ge 1-2\overline{p}>0$*,* $(t,s)\in\Delta_T$;

если $\operatorname*{vrai\,inf}\limits_{t\in[0,T]} p(t)p(t/2)<0$*, то* $\mathcal{C}(t,s)\ge\frac{1-2\overline{p}-2|p_0|}{1-2\overline{p}}$*, где* $p_0\doteq\operatorname*{vrai\,inf}\limits_{t\in[0,T]}p(t)$*, в частном случае, при* $\overline{p}+|p_0|\le 1/2$ *выполнено* $\mathcal{C}(t,s)\ge 0$*,* $(t,s)\in\Delta_T$.

Литература

[1] Чаплыгин С.А. *Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений* (М., 1919).

[2] *Избранные труды Н.В. Азбелева*, под ред. В.П. Максимова, Л.Ф. Рахматуллиной (Ин-т компьютер. исследов., М.–Ижевск, 2012).

[3] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1991.)

[4] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения* (Ин-т компьют. исследов., М., 2002).

[5] Максимов В.П. *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды* (Пермь, 2003).

[6] Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* I, Дифференц. уравнения **27** (3), 376–384 (1991).

[7] Азбелев Н.В., Домошницкий А.И. *К вопросу о линейных дифференциальных неравенствах.* II, Дифференц. уравнения **27** (6), 923–931 (1991).

[8] Жуковский Е.С. *Неравенства Вольтерра в функциональных пространствах*, Матем. сб. **195** (9), 3–18 (2004).

[9] Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С. *Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной*, Дифференц. уравнения **45** (5), 613–634 (2009).

[10] Жуковский Е.С. *Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах*, Дифференц. уравнения **52** (12), 1610–1627 (2016).

[11] Терентьев А.Г. *Об одном классе линейных отображений и их положительной обратимости*, УМН **51** (6), 223–224 (1996).

[12] Малыгина В.В. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием*, Изв. вузов. Матем., № 5, 72–85 (1993).

[13] Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом* (Наука, М., 1972).

Евгений Семенович Жуковский

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина,
ул. Интернациональная, д. 33, г. Тамбов, 392000, Россия,

`e-mail:` zukovskys@mail.ru

Халид Мизхир Тахир Тахир

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина,
ул. Интернациональная, д. 33, г. Тамбов, 392000, Россия,

`e-mail:` khalidtahir89@yahoo.com

E.S. Zhukovskii and K.M.T. Tahir

On positivity conditions for the Cauchy function of functional-differential equations

Abstract. We discuss here how the statements about estimates of solutions to linear functional-differential equations analogous to the Chaplygin differential inequality theorem are connected with the positivity of the Cauchy function and fundamental solution. We prove the comparison theorem for the Cauchy functions and fundamental solutions of two functional-differential equations. In the theorem, it is assumed that the difference of the operators corresponding to the equations (and acting from the space of absolutely continuous functions to the space of summable functions) is a monotone totally continuous Volterra operator. We also obtain the positivity conditions for the Cauchy function and fundamental solution of some certain equations with delay and those of neutral type.

Keywords: functional-differential equation, the Cauchy function, the Chaplygin differential inequality theorem, linear Volterra operator.

Evgenii Semenovich Zhukovskii

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsional'naya str., Tambov, 392000 Russia,

`e-mail:` zukovskys@mail.ru

Khalid Mizhir Tahir Tahir

Tambov State University named after G.R. Derzhavin,
33 Internatsional'naya str., Tambov, 392000 Russia,

`e-mail:` khalidtahir89@yahoo.com