

Казанский (Приволжский) федеральный университет  
Институт физики

# **Физика волновых процессов**

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ-2014

УДК 53.01

Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Методической комиссии Института физики  
протокол № \_\_ от \_\_ февраля 2013 г.

Кафедры радиоастрономии  
протокол № \_\_ от \_\_ февраля 2013 г.

**Авторы-составители:**

Г.Е. Корчагин, А.А. Журавлев, Ю.М. Стенин

**Рецензент**

доктор физ.-мат. наук, проф. О.Н. Шерстюков

**Физика волновых процессов.** Учебно-методическое пособие /  
Г.Е. Корчагин, А.А. Журавлев, Ю.М. Стенин. Казань: Изд-во КФУ,  
2014. 77 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для использования при проведении занятий и самостоятельной подготовки студентами радиофизических и радиоастрономических специальностей. В краткой форме изложены общие вопросы теории волновых явлений разнообразной физической природы. Основное внимание уделено анализу волнового уравнения и процессам распространения волн в различных средах. В пособие включены контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы.

Для студентов, магистрантов и аспирантов физических и радиофизических специальностей университетов.

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>5</b>
<b>1. Понятие волновых процессов и их математическое описание.....</b>	<b>6</b>
О волновых процессах.....	6
Волновое уравнение .....	9
Плоские волны .....	13
Контрольные вопросы и задания.....	18
<b>2. Акустические волны в жидкостях, газах и твердых телах.....</b>	<b>19</b>
Плоские акустические волны в жидкостях и газах.....	19
Акустические волны в вязких жидкостях .....	23
Поперечные волны в жидкостях.....	23
Интенсивность звука .....	25
Отражение и преломление акустических волн на плоской границе раздела .....	28
Волны на поверхности жидкости .....	30
Упругие волны в твердом теле .....	32
Контрольные вопросы и задания.....	36
<b>3. Плоские электромагнитные волны.....</b>	<b>37</b>
Плоские электромагнитные волны в изотропных средах .....	37
Поглощение электромагнитных волн .....	43
Поток энергии .....	45
Поляризация электромагнитных волн .....	46
Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела.....	49
Распространение волн в диспергирующих средах .....	53
Контрольные вопросы и задания.....	55
<b>4. Дисперсия и волновые пакеты.....</b>	<b>56</b>
Физические причины, приводящие к появлению дисперсии .....	56
Модулированные волны и сигналы. Волновые пакеты .....	57

Распространение сигнала (волнового пакета) в диспергирующей среде .....	58
Связь фазовой и групповой скоростей .....	61
Контрольные вопросы и задания .....	65
<b>5. Электромагнитные волны в плазме и анизотропных средах.....</b>	<b>66</b>
Распространение электромагнитных волн в плазме .....	66
Диэлектрическая проницаемость плазмы .....	69
Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах.....	74
Контрольные вопросы и задания .....	76
<b>Литература.....</b>	<b>77</b>

## Введение

Изучение волновых явлений чрезвычайно важно как с точки зрения решения актуальных практических задач, так и в плане теоретических исследований. Достаточно указать, например, на то, что вопросы распространения радиоволн крайне важны для проектирования и эксплуатации современных систем связи. С другой стороны, волновая физика является одной из фундаментальных основ, в частности, квантовой теории. Таким образом, области применений волновой физики самые разнообразные. Соответственно, разнообразны и подходы к обучению в вузах дисциплинам, связанным с волнами. В данном пособии основной упор делается на рассмотрение фундаментальных теоретических основ волновых явлений. Именно этот подход в наибольшей степени соответствует, с нашей точки зрения, учебным курсам, предназначенным для студентов физических специальностей университетов. В основу пособия лег курс лекций, читаемых для студентов радиофизического отделения Института физики Приволжского (Казанского) федерального университета. Как при подготовке курса, так и при написании учебного пособия пришлось достигать некоторого компромисса. С одной стороны, необходимо отразить наиболее важные моменты из широчайшего круга теоретических аспектов волновой физики. С другой стороны, следует ограничиться подбором материала в рамках отведенного объема учебного курса. Хотя в пособии в немалой степени использован индивидуальный авторский подход к представлению учебного материала, курс, разумеется, базируется на целом ряде ранее изданных учебных пособий и монографий, приведенных в списке литературы ([1 - 10]).

Представляемый курс ориентирован на студентов физических и радиофизических специальностей вузов, аспирантов и молодых ученых, специализирующихся в соответствующих направлениях.

Особенно данное пособие будет полезно для студентов очно-заочного обучения, изучающих данный предмет на 3-м и 5-м курсах.

# 1. Понятие волновых процессов и их математическое описание

## *О волновых процессах*

С колебаниями и волнами мы сталкиваемся на каждом шагу, как в повседневной жизни, так и при более глубоком изучении физики явлений. Однако нет возможности исчерпывающим образом определить, что следует называть колебательным или волновым процессом вообще. Любая попытка ограничить класс рассматриваемых явлений типом уравнения или перечислением каких-либо общих физических свойств обычно приводит к неудаче, так как всегда удается построить пример, не укладывающийся в принятую схему. Поэтому, приступая к изучению широкого круга столь разнообразных задач, разумно опереться на интуитивные представления и ограничиться вначале весьма общими утверждениями.

Мы будем рассматривать наиболее характерные свойства волновых процессов на примере нескольких типов волн различной природы (это вовсе не означает, что рассматриваемые свойства присущи всем волновым процессам без исключения).

В окружающем нас мире происходит множество явлений, проявляющих черты колебательных и волновых процессов. Представление о них имеется у каждого человека, наблюдавшего движение маятника или волны, бегущие на поверхности воды. Курс общей физики дополняет наше представление другими конкретными примерами. Несмотря на многообразие ситуаций и различие в способах описания, можно выделить много общего в протекании процессов различной физической природы. Изучение именно этих общих закономерностей составляет предмет специальных курсов теории колебаний и теории волн.

Колебаниями называют ограниченные (и чаще всего повторяющиеся) движения в окрестности некоторого среднего положения (например, устойчивого положения равновесия). О колебательном процессе можно говорить в случаях, когда состояние реальной системы допустимо описывать идеализированным способом: конечным набором параметров, изменяющихся во времени. Для математического маятника, например, таким параметром будет угол отклонения нити от вертикали; для

связанных колебательных контуров параметров уже два (напряжения или токи в первом и втором контуре) и т.д. Колебательные процессы описываются одним или несколькими обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Волна — это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью. Волновой процесс — более сложная модель движения реальных систем, состояние которых зависит уже не только от времени, но и от пространственных переменных. Поэтому такие процессы описываются уравнениями, содержащими частные производные.

Критерием перехода от колебательного движения к волновому может служить «условие квазистационарности»: если характерные размеры системы  $L < cT$  ( $c$  — скорость распространения возмущения,  $T$  — время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами. В случае  $L > cT$  процесс нужно считать волновым, а систему — распределенной.

Волны обычно служат наиболее быстрым механизмом переноса энергии, позволяющим осуществить в системе переход от неравновесного состояния к равновесному. При этом не происходит существенного перемещения вещества, хотя такое перемещение иногда возможно как побочное явление, сопровождающее распространение волны.

Волновой процесс — это одна из важнейших форм движения материи; в той или иной мере волновые движения присущи всем без исключения объектам материального мира. Как показали эксперименты по дифракции и рассеянию микрочастиц, корпускулярно–волновой дуализм есть фундаментальное свойство материи вообще, и для описания состояния квантовых систем необходимо пользоваться волновыми функциями.

Волновые процессы — нелинейные и линейные — в настоящее время интенсивно изучаются в различных областях физики: электродинамике, физике плазмы, оптике, радиофизике, акустике, гидродинамике и т. д. Механизмы распространения возмущений, естественно, сильно отличаются друг от друга. Например, упругие волны в жидкостях и газах существуют вследствие того, что коллективное движение частиц среды создает чередующиеся сжатия и разрежения, которые вызывают движение в следующем слое жидкости (газа). Возмущение передается от слоя к слою

преимущественно в направлении, вдоль которого происходят колебания частиц, т.е. волны в жидкостях и газах являются продольными. Твердые тела обладают сдвиговой упругостью, и в них могут распространяться поперечные волны. Распространение электромагнитных волн происходит вследствие того, что появляющееся в какой-либо точке пространства переменное электрическое поле возбуждает в соседних точках магнитное поле и наоборот.

Различие физических механизмов, реализующих волновой процесс, приводит к различным способам описания, основанным на сильно отличающихся друг от друга системах уравнений. Однако для понимания наиболее фундаментальных явлений, свойственных волнам различной природы – интерференции, дифракции, дисперсии, отражения и преломления, рассеяния и т.д., – часто нет необходимости анализировать исходные, вообще говоря, сложные системы уравнений. Простые эффекты, как правило, описываются простыми и поэтому универсальными математическими моделями. В дальнейшем изложении мы будем приводить иллюстративный вывод этих упрощенных уравнений в основном для двух важнейших (с точки зрения приложений) типов волн – акустических и электромагнитных; главное же внимание будет уделено анализу вытекающих из них эффектов.

Излагая современную теорию волн, необходимо особо остановиться на нелинейных волновых процессах – сравнительно новом круге вопросов, в последнее время нашедших ряд важных практических применений.

Известно, что в теории колебаний нелинейные процессы играют очень большую роль. Развитие нелинейной теории колебаний тесно связано с развитием радиотехники, поскольку процессы генерации, модуляции и приема радиоволн связаны с нелинейными колебательными процессами. В то время, когда для целей радиосвязи использовались радиоволны с длиной порядка десятков и сотен метров, можно было всегда считать, что длина волны намного превышает размеры приемных и передающих устройств и нелинейные явления, лежащие в основе их работы, имеют характер колебательных процессов. Процессы же передачи электромагнитной энергии от передатчика к приемнику – волновые процессы – почти всегда можно было считать линейными (исключение составляла кросс-модуляция в ионосфере).



С переходом к сантиметровым и миллиметровым волнам длина волны стала сравнимой или даже меньшей размеров приемной и передающей аппаратуры. Были созданы генераторы и усилители, принцип работы которых основан на закономерностях волновых процессов – электронные лампы с бегущей и обратной волной и т.д., появились материалы с нелинейными характеристиками в диапазоне СВЧ.

После создания источников мощного ультразвука началось интенсивное изучение нелинейных эффектов при распространении звуковых волн в среде. Эти эффекты существенны, когда возмущения характерных параметров – давления, плотности и др. – не слишком малы по сравнению с их равновесными значениями. Мощная синусоидальная звуковая волна, например, в слабо диссипативной среде превращается на некотором расстоянии в пилообразную волну.

Создание оптических квантовых генераторов позволило реализовать электромагнитные поля, напряженность которых сравнима с внутриатомными полями, и осуществить таким образом взаимодействие световых волн.

Увеличение интенсивности звуковых и световых полей привело к тому, что нелинейные эффекты при распространении волн стали сейчас иметь столь же большое значение, как и нелинейные процессы в теории колебаний. Родились две новые области – нелинейная оптика и нелинейная акустика, значительно расширившие область использования волновых явлений. В настоящее время взаимодействия волн активно исследуются и во многих других разделах физики.

### ***Волновое уравнение***

В теории волн фундаментальное значение имеет линейное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется *волновым уравнением*. посредством  $\Delta$  обозначен оператор Лапласа, который в зависимости от физической постановки задачи записывается либо в декартовых, либо в криволинейных (цилиндрических, сферических и др.)

координатах;  $c$  – константа, характеризующая свойства среды. Как будет показано далее, уравнение (1.1) допускает решение в виде распространяющихся возмущений – бегущих волн.

Роль уравнения (1.1) аналогична роли уравнения гармонического осциллятора в теории колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1.2)$$

Подобно тому, как модель гармонического осциллятора можно усложнить введением в (1.2) дополнительных членов, ответственных за нелинейность, затухание, влияние внешних сил (вынужденные колебания) и т.д., соответствующие обобщения для волн можно сделать на основе уравнения (1.1).

Так, в присутствии источников или внешних сил процесс возбуждения и распространения волн описывается неоднородным уравнением

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

где  $f(\mathbf{r}, t)$  – некоторая функция, характеризующая распределенные внешние воздействия.

В реальной среде могут происходить необратимые процессы передачи энергии волны частицам среды (диссипация); скорость распространения волны может стать функцией частоты (дисперсия). Эти явления должны учитываться введением в волновое уравнение (1.1) дополнительных линейных членов  $L(u)$ :

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = 0, \quad (1.4)$$

структура которых может быть различной в зависимости от конкретных физических механизмов взаимодействия волн со средой.

Уравнение (1.1) и его обобщения (1.3), (1.4) могут быть записаны как для скалярной переменной  $u$  (имеющей смысл, например, приращения плотности или давления в звуковой волне), так и для векторной переменной  $\mathbf{u}$  (например, напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  поля электромагнитной волны).

Решение волнового уравнения должно находиться с учетом начальных и граничных условий, отвечающих физической постановке задачи.

Уравнениями (1.3), (1.4) описываются волны в однородных изотропных средах. Задачи, связанные с распространением волн в линейных диспергирующих и недиспергирующих средах, с определением поля по заданным источникам, с отражением и преломлением волн на границах раздела однородных сред, с распространением волн в волноводах, длинных линиях, других направляющих системах и т.д., сводятся к решению уравнений типа (1.1), (1.3), (1.4) с соответствующими граничными условиями.

Если среда анизотропна, то процесс распространения волн может описываться гиперболическими уравнениями не второго, а более высокого (например, четвертого) порядка, которые приводятся к уравнениям второго порядка только при специальных предположениях о характере протекания волнового процесса в анизотропной среде. Такого типа задачи встречаются при исследовании распространения световых волн в кристаллах, электромагнитных волн в плазме или феррите, находящихся в магнитном поле, упругих волн в анизотропных твердых телах и т.д.

Если среда неоднородна, т.е. свойства среды регулярным или случайным образом зависят от координат, то уравнение, описывающее волновой процесс, может быть приведено к виду, аналогичному (1.1) или (1.3). Однако  $c$  при этом не константа, а функция координат:  $c(x, y, z)$ . Распространение электромагнитных волн в атмосфере и ионосфере, распространение низкочастотного звука в океане описывается волновым уравнением такого типа.

Большое значение в теории волн имеют гармонические волны. Функция  $u(x, y, z, t)$ , описывающая гармоническую волну, может быть представлена в виде

$$u = \frac{1}{2} \left[ A(x, y, z) e^{i\omega t} + A^*(x, y, z) e^{-i\omega t} \right], \quad (1.5)$$

где  $A$  — комплексная величина. Подставляя (1.5) в (1.1), для функции  $A(x, y, z)$  получим уравнение

$$\Delta A + k^2 A = 0, \quad (1.6)$$

где  $k^2 = \omega^2 / c^2$ . Если подставить (1.5) в (1.4), то мы опять получим для  $A$  уравнение (1.6), но  $k^2$  в этом случае более сложным образом зависит от частоты и, вообще говоря, является комплексной величиной  $k^2(\omega) = [k'(\omega) + ik''(\omega)]^2$ . Уравнение (1.6) называется *уравнением Гельмгольца* или *приведенным волновым уравнением*. Его решения искать проще, чем решать уравнения (1.1) и (1.4), особенно в том случае, когда скорость распространения гармонической волны  $v = \omega / k$  зависит от частоты (т.е. существенна дисперсия). Поэтому в диспергирующих линейных средах (в которых справедлив принцип суперпозиции волн) возмущения, зависящие от времени сложным образом, представляют в виде совокупности гармонических волн.

При возбуждении в среде сильных полей уравнения, описывающие процесс распространения возмущений, уже нельзя свести к линейным волновым уравнениям. С учетом нелинейных членов они приобретают вид

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1(u) + L_2(u^2) + L_3(u^3) + \dots, \quad (1.7)$$

где  $L_1, L_2, L_3$  – некоторые линейные операторы. Сохранение этих членов в уравнении (1.7) позволяет описать различные нелинейные эффекты при распространении волн в среде. В нелинейных задачах нарушается принцип суперпозиции: возникает взаимодействие волн различных частот. При этом характер протекания волновых взаимодействий существенно зависит от соотношения дисперсионных и нелинейных свойств процесса. Задачи данного типа широко исследуются, например, в нелинейной акустике и нелинейной оптике.

Итак, любая задача теории волн сводится к определению поведения в пространстве и времени величин, характеризующих волновой процесс. Она как бы делится на два этапа. Вначале необходимо воспользоваться исходной системой уравнений, описывающих волновое поле в среде (например, уравнениями Максвелла для электромагнитного поля или уравнениями механики для сплошной среды), а затем с помощью ряда упрощений, диктуемых конкретной постановкой задачи, получить (если это в принципе возможно) волновое уравнение одного из перечисленных

выше типов, а также сформулировать начальные и граничные условия. Второй этап состоит в решении этого уравнения при заданных начальных и граничных условиях и в анализе полученных результатов.

### ***Плоские волны***

Простейшими решениями волновых уравнений, имеющими весьма большое значение, являются решения в виде плоских волн. В плоской волне возмущение  $u$  зависит лишь от расстояния, отсчитываемого вдоль некоторого фиксированного направления  $\mathbf{m}$ ,  $|\mathbf{m}| = 1$ , и времени, т.е.

$$u = u(\zeta, t),$$

где

$$\zeta = (\mathbf{r}, \mathbf{m}) = m_x x + m_y y + m_z z. \quad (1.8)$$

Рассмотрим плоские волны в изотропной однородной среде, не учитывая поглощение, дисперсию и нелинейные эффекты. В такой среде волновой процесс описывается уравнением (1.1). Для плоских волн оператор Лапласа преобразуется к виду  $\Delta = \partial^2 / \partial \zeta^2$ , а волновое уравнение становится одномерным

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (1.9)$$

Запись (1.9) является одной из двух канонических форм волнового уравнения. Если от переменных  $\zeta$  и  $t$  перейти к характеристическим переменным

$$\tau = t - \zeta / c, \quad \eta = t + \zeta / c, \quad (1.10)$$

то уравнение (1.9) преобразуется ко второй канонической форме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \eta} = 0. \quad (1.11)$$

Интегрируя (1.11) последовательно по  $\tau$  и  $\eta$ , нетрудно найти общее решение (1.11) и, следовательно, исходного уравнения (1.9):

$$u = u_1(\tau) + u_2(\eta) = u_1(t - \zeta / c) + u_2(t + \zeta / c) \quad (1.12)$$

Здесь  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\eta)$  — произвольные функции.

Рассмотрим функцию  $u_1(\tau)$ . В любой фиксированный момент времени функция  $u_1$  имеет постоянное значение в плоскости, определяемой соотношением (рис. 1)

$$\zeta = (\mathbf{r}, \mathbf{m}) = \text{const} \quad (1.13)$$

Если при увеличении времени на величину  $\Delta t$  вектор  $\mathbf{r}$  изменится на величину  $\Delta \mathbf{r}$  так, что аргумент  $\tau$  функции  $u_1$  останется постоянным:

$$\tau = t - \frac{1}{c}(\mathbf{m}\mathbf{r}) = t + \Delta t - \frac{1}{c}(\mathbf{m}, \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \text{const}$$

то отсюда следует, что связь между  $\Delta t$  и  $\Delta \mathbf{r}$  задаётся выражением  $c\Delta t = (\mathbf{m}\Delta \mathbf{r})$ . Конец вектора  $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$  снова лежит на плоскости, и вектор  $\mathbf{m}$  является нормалью к ней. Следовательно, плоскость, определяемая соотношением (1.13), перемещается в направлении  $\mathbf{m}$  на расстояние  $c\Delta t$  за время  $\Delta t$ , т.е. эта плоскость движется в пространстве со скоростью  $c$ . Таким образом, функция  $u_1[t - (\mathbf{r}\mathbf{m})/c]$  описывает плоскую волну, бегущую в направлении  $\mathbf{m}$ . Аргумент функции  $\tau = t - (\mathbf{r}\mathbf{m})/c$  определяет фазу волны. Плоскость, на которой фаза волны постоянна, передвигается в пространстве со скоростью  $c$ .

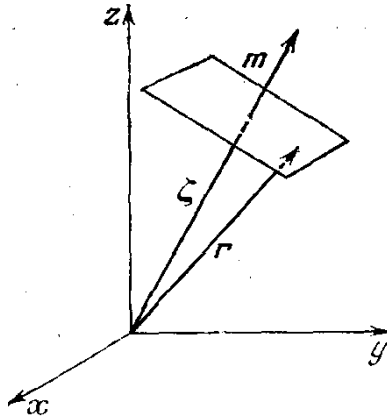


Рис. 1. Однородная плоская волна, распространяющаяся в направлении вектора  $\mathbf{m}$ .

Очевидно, что функция  $u_2[t - (\mathbf{r}\mathbf{m})/c]$  описывает волну, бегущую в противоположном направлении  $-\mathbf{m}$ .

Возмущения, бегущие только в одну сторону (например, в положительном направлении оси  $\zeta$ ), могут быть описаны также уравнением первого порядка (ср. с (1.9))

$$\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (1.14)$$

Если вместо  $t$  ввести характеристическое или «местное» время  $\tau = t - \zeta/c$ , т.е. наблюдать за волной, двигаясь вместе с ней со скоростью ее распространения, то в новых переменных  $\tau, \zeta$  уравнение (1.14) примет вид

$$\frac{\partial u(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = 0.$$

Решением этого уравнения является волна, не изменяющая формы своего профиля при изменении  $\zeta$ , т.е. стационарная волна:  
 $u = u_1(\tau)$ .

Плоские волны, описываемые произвольными функциями  $u_1(\tau)$  и  $u_2(\eta)$ , часто удобно рассматривать как суперпозицию гармонических волн. Для этого необходимо, чтобы функции  $u_1$  и  $u_2$  можно было представить в виде интегралов Фурье

$$u_{1,2}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{1,2}(\zeta, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (1.15)$$

где

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{1,2}(\zeta, t) e^{i\omega t} dt.$$

Подставляя (1.15) в (1.9), найдем, что функции  $u_{1,2}$  будут решениями волнового уравнения, если их образы  $F_{1,2}$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\frac{d^2 F_{1,2}}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} F_{1,2} = 0. \quad (1.16)$$

Решение (1.16) может быть записано в виде

$$F_{1,2}(\zeta, \omega) = A_{1,2}(\omega) e^{\pm ik\zeta}, \quad (1.17)$$

где  $k = \omega / c$ . Таким образом, функции  $A_{1,2} \exp(\pm ik\zeta - i\omega t)$  под знаком интеграла (1.15) описывают гармонические плоские волны.

Переходя к декартовым координатам, фазу гармонической плоской волны можно записать в виде

$$k(m_x x + m_y y + m_z z) - \omega t = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t,$$

где  $\mathbf{k} = k \mathbf{m}$ . Уравнение  $\mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$  определяет плоскость равной фазы. Если  $\mathbf{k}$  – действительный вектор, амплитуды волн  $A_{1,2}$  постоянны всюду, в том числе и в плоскости равной фазы.

Функции  $F_{1,2}$  будут удовлетворять уравнению (1.16) и в том случае, если  $\mathbf{k}$  – комплексный вектор:  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ , при условии, что его модуль равен по-прежнему  $k$ , т. е.



$$k'^2 - k''^2 + 2i(\mathbf{k}'\mathbf{k}'') = k^2 = \omega^2 / c^2.$$

Так как для сред без поглощения  $k^2$  — действительное число, то между действительной  $k'$  и мнимой  $k''$  частями волнового вектора существует связь

$$k'^2 - k''^2 = k^2, \quad (1.18)$$

$$(k'k'') = 0. \quad (1.19)$$

Соответствующее решение

$$u(\mathbf{r}, t) = A_1 \exp[-(\mathbf{k}''\mathbf{r}) - i(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})] \quad (1.20)$$

описывает плоскую неоднородную волну. Поверхности равных фаз и равных амплитуд — плоские, но они не совпадают друг с другом. В силу условия (1.19) плоскости равных фаз и равных амплитуд взаимно ортогональны. Из условия (1.18) следует, что волновое число  $k'$  для неоднородной волны больше волнового числа однородной волны в той же среде (пространственный период поля меньше длины волны  $\lambda$ ).

При учете поглощения величина  $k^2(\omega)$  становится комплексной, и угол между плоскостями равных фаз и амплитуд может быть любым. При  $\mathbf{k}' \parallel \mathbf{k}''$  эти плоскости совпадают, и волна становится плоской однородной волной.

Ниже мы покажем, что сферические и цилиндрические волны можно представить в виде суперпозиции однородных и неоднородных плоских волн. При удалении от источника неоднородные волны затухают.

Плоские неоднородные волны могут возникать при падении плоских однородных волн на границу раздела двух сред. Наоборот, при падении на границу раздела неоднородной волны может возникнуть однородная плоская волна.

### ***Контрольные вопросы и задания***

1. Дайте определение волновому процессу.
2. Укажите критерий перехода от колебательных движений к волновым.
3. Выведите волновое уравнение.
4. Какие процессы описываются уравнением Гельмгольца или приведенным волновым уравнением?
5. Проанализируйте поведение плоских волн в изотропной однородной среде, без учета поглощения, дисперсии и нелинейных эффектов.

## 2. Акустические волны в жидкостях, газах и твердых телах

### *Плоские акустические волны в жидкостях и газах*

Оператор Гамильтона (набла) – символический вектор, используемый при определении операций градиента, дивергенции и ротора:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$
$$\nabla \varphi = \text{grad} \varphi, \quad \nabla \mathbf{V} = \text{div} \mathbf{V}, \quad [\nabla \mathbf{V}] = \text{rot} \mathbf{V},$$

где  $\varphi$  – скаляр.

Закономерности движения газа или жидкости обычно описываются уравнениями механики сплошных сред в системе координат  $x, y, z$  при зависимости от времени  $t$ .

Если не учитывать процессы диссипации, то для описания процессов достаточно знать распределение скоростей гидродинамических частиц  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ , плотности  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и давления  $p(\mathbf{r}, t)$ . Они связаны между собой системой уравнений.

Уравнение непрерывности ( $\text{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \dots$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

Уравнение движения

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = \mathbf{F} = -\nabla p \quad (2.2)$$

Уравнение состояния

$$p = p(\rho) \quad (2.3)$$

Уравнение (2.1) выражает закон сохранения массы вещества в дифференциальной форме.

Уравнение (2.2) – второй закон Ньютона для элемента сплошной среды. Выражение в квадратных скобках представляет собой ускорение, т.е. полную производную по скорости

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \end{aligned}$$

Распространение звуковой волны вызывает в среде сжатия и растяжения, сопровождаемые местными изменениями температуры. Эти процессы совершаются обычно настолько быстро, что выравнивание температуры не успевает произойти. Процессы сжатия и разряжения считают обратимыми и их описывают адиабатическим уравнением состояния (2.3):

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.4)$$

Для идеальных газов  $p_0$  и  $\rho_0$  – соответственно равновесные давление и плотность;  $\gamma = c_p / c_v$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме. Уравнение (2.4) приближенно подходит и для жидкости, где константы  $\gamma$  и  $p_0$  определяются из эксперимента.

Для того, чтобы из системы (2.1)–(2.4) получить волновые уравнения, надо предположить, что возмущения  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\mathbf{u}$  основного состояния  $p_0, \rho_0, \mathbf{u} = 0$ , вносимые волной, малы, т.е.

$$p = p_0 + p'; \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.5)$$

При этом

$$p' / p_0 \sim \rho' / \rho_0 \sim \mu, \quad (2.6)$$

где  $\mu$  – некий малый параметр (такого же порядка малости должно быть число Маха – отношение колебательной скорости потока к скорости звука).

Подставив (2.5) в систему (2.1), (2.2), (2.4) и сохраняя только члены первого порядка по малому параметру  $\mu$ , получим линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p' \quad (2.8)$$

$$p' = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' \quad (2.9)$$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots; \quad \rho = \rho_0 + \rho'; \quad \text{члены}$$

вида  $\rho' \frac{\partial u_x}{\partial x}$  считаем малыми.

$$p_1 + p_0 = p_0 \left( 1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^\gamma = p_0 \left( 1^\gamma + \gamma 1^{\gamma-1} \frac{\rho_1}{\rho_0} \right); \quad p_1 = \gamma p_0 \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right).$$

Уравнения (2.7)–(2.9) линейны относительно величин  $p', \rho', u$ . Отбросим члены, содержащие произведение степени величин  $p', \rho', u$ , т.е., например,  $p'u$ .

Для сведения системы (2.7)–(2.9) к одному уравнению удобно сначала исключить переменную  $p'$  и получить вместо (2.8) и (2.9) следующее соотношение

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho' = 0. \quad (2.10)$$

Если применить к (2.10) операцию ротора, то получим  $\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{u}}{\partial t} = 0, \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ , откуда следует, что  $\mathbf{u} = \operatorname{grad} \varphi$ , где  $\varphi$  – потенциал колебательной скорости. Звуковое поле в жидкостях и газах потенциально. Это связано с продольным характером плоских звуковых волн. Считая, что  $\varphi$  зависит только от координаты  $\zeta = (\mathbf{m}\mathbf{r})$ , отсчитываемой вдоль направления  $\mathbf{m}$ , получим

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi = \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

т.е. вектор скорости  $\mathbf{u}$  имеет то же направление, что и вектор  $\mathbf{m}$ , вдоль которого распространяется волна.

Введем потенциал скорости  $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ . Из уравнения (2.10) при этом следует

$$\rho_0 \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \nabla \rho' = 0, \text{ или } \nabla \left( \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' \right) = 0,$$

откуда

$$\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \rho' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Подставляя полученную связь в (2.7), приходим к волновому уравнению

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11)$$

Через  $c_0^2$  здесь обозначено выражение

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}, \quad (2.12)$$

которое, как это следует из структуры уравнения (2.11), представляет собой квадрат адиабатической скорости звука. Точно такие же уравнения можно получить и для скалярных величин  $p'$ ,  $\rho'$ , а также для каждой из трех компонент колебательной скорости  $\mathbf{u}$ .

Найдем связь между давлением, плотностью и колебательной скоростью в плоской звуковой волне. Предполагая, что все величины изменяются по закону  $f_1(t - \zeta / c_0)$  или  $f_1(t + \zeta / c_0)$ , с помощью (2.7)–(2.9) получим

$$\frac{u}{c_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{c_0^2 \rho_0}. \quad (2.13)$$

Отсюда следует, что число Маха  $u/c_0$  есть малая величина порядка  $\mu$ , так как  $\rho'/\rho_0 \sim \mu$ .

### ***Акустические волны в вязких жидкостях***

В неидеальных средах нужно учитывать потери энергии, связанные с вязкостью и теплопроводностью. При этом движение будет описываться уравнениями, более сложными по сравнению с системой (2.1) – (2.3). Из-за внутреннего трения слоев жидкости в правой части уравнения (2.2) появится дополнительная сила, и уравнение движения примет вид

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

где  $\eta, \xi$  – коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости соответственно. Уравнение (2.14) называется уравнением *Навье – Стокса*.

Уравнение состояния должно учитывать изменение энтропии, поскольку в среде есть потери

$$p = p(\rho, s). \quad (2.15)$$

Кроме того, систему (2.1), (2.14), (2.15) необходимо дополнить уравнением переноса тепла и термодинамическим соотношением, связывающим изменение температуры и энтропии.

### ***Поперечные волны в жидкостях***

Часто можно ограничиться приближенным рассмотрением, считая, что поглощенная звуковая энергия слабо изменяет состояние среды и, несмотря на диссипативные процессы, среда остаётся в равновесии. Тогда, подставляя выражения (2.5), (2.9) в уравнения движения (2.14) и сохраняя только линейные члены, получим

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c_0^2 \nabla \rho' = \eta \Delta \mathbf{u} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad div } \mathbf{u}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.16) и (2.7) образуют систему для анализа (в принятом приближении) волновых процессов в средах с малой вязкостью.

Как известно, всякое векторное поле можно представить в виде суммы потенциальной и вихревой компонент:  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t = \nabla \varphi + \text{rot } \mathbf{A}$ , где  $\varphi$  – использованный выше скалярный потенциал,  $\mathbf{A}$  – векторный потенциал. Компонента  $\mathbf{u}_l = \nabla \varphi$  описывает продольные (звуковые), а  $\mathbf{u}_t = \text{rot } \mathbf{A}$  – поперечные (сдвиговые) волны.

Для сдвиговых колебаний из уравнения непрерывности (2.7) следует  $\partial \rho' / \partial t = 0$  или  $\rho' = 0$ . Это означает, что при сдвиговых колебаниях жидкость можно рассматривать как несжимаемую. Из (2.16) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho_0} \Delta \mathbf{u}_t, \quad \text{div } \mathbf{u}_t = 0. \quad (2.17)$$

Решим с помощью (2.17) задачу о распространении в жидкости поперечных волн, возбуждаемых колеблющейся стенкой. Пусть твёрдая поверхность, совпадающая с плоскостью  $y, z$  декартовой системы координат, совершает движение вдоль оси  $y$ , т.е. в своей плоскости по закону

$$\mathbf{u}_t(x=0, t) = \{u_x = 0, u_y = u_0 \exp(-i\omega t), u_z = 0\}.$$

Поскольку жидкость расположена справа от стенки (при  $x > 0$ ), и для величины  $\mathbf{u}_t$  в силу симметрии отлична от нуля только компонента  $u_y$ , ищем решение (2.17) в виде

$$u_y = u_0 \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (2.18)$$

Найдём связь между  $k$  и  $\omega$  (закон дисперсии):

$$k^2 = i\omega\rho_0 / \eta, \quad k = \pm(i+1)\sqrt{\omega\rho_0 / 2\eta}.$$

Подставив это выражение в (2.18), получим

$$u_y = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}}x\right) \exp\left[i\left(\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}}x - \omega t\right)\right]. \quad (2.19)$$



Таким образом, в вязкой жидкости могут существовать поперечные волны, направление колебательной скорости которых перпендикулярно направлению распространения. Однако эти волны очень быстро затухают при удалении от колеблющегося тела, поскольку их амплитуда пропорциональна  $\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho_0}{2\eta}}x\right)$ . На расстоянии, равном длине волны  $x = \lambda = 2\pi/k$ , такое колебание затухает в  $\exp(2\pi) \approx 535$  раз, т.е. поперечная волна в жидкости практически не распространяется.

Данные выводы верны при линейном приближении для волн малой интенсивности. Также существенным является условие адиабатичности процессов распространения звуковых волн в среде.

### ***Интенсивность звука***

Рассмотрим понятие интенсивности звука на примере синусоидальной волны.

Выделим в звуковом поле малый объём среды, пусть масса частиц среды, заключенных в нём, будет равна по значению плотности  $\rho$  среды. Уравнение движения этой массы среды по второму закону Ньютона

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Здесь  $\mathbf{F}$  – сила, действующая на этот объём, равна перепаду давления  $p$  в направлении распространения волны вдоль оси  $x$ , т.е.  $-dp/dx$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{dp}{dx}. \quad (2.20)$$

Пусть смещение частиц среды в звуковой волне изменяется по закону

$$\xi = a \sin \omega \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (2.21)$$

Чтобы найти  $du/dt$ , надо взять вторую производную по  $t$  от выражения (2.21)

$$\frac{du}{dt} = -\omega^2 a \sin \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (2.22)$$

Тогда уравнение (2.20) можно записать в виде

$$\rho \omega^2 a \sin \omega \left( t - x / c \right) = dp / dx$$

или

$$dp = \rho \omega^2 a \sin \omega \left( t - x / c \right) dx. \quad (2.23)$$

Проинтегрируем его:

$$p = \rho \omega a c \cos \omega \left( t - x / c \right). \quad (2.24)$$

$\rho c$  – акустическое сопротивление,

$\omega a$  – амплитуда скорости частиц в волне,

$p_0 = \rho \omega a c$  – называется амплитудой звукового давления или акустическим сопротивлением среды.

Кинетическая энергия в объёме  $dV$

$$dE_k = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kx) dV$$

Объёмная плотность

$$W = dE_k / dV = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t - kx)$$

Звуковая энергия слабо изменяет состояние среды. Средняя объёмная плотность энергии по времени за период

$$\langle \overline{W} \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2, \quad (2.25)$$

т. к.  $\overline{\cos^2 (\omega t - kx)} = 1$ .

Перенос энергии в среде принято характеризовать **потоком энергии** сквозь некоторую поверхность  $dP = dE / dt$  – это скаляр. Для характеристики направления переноса энергии в данной точке волнового поля вводят векторную величину, называемую

**плотностью потока энергии.** Этот вектор направлен в сторону распространения волны и по абсолютному значению равен

$$J = \frac{dP}{dS_{\perp}} = \frac{dE}{dt dS_{\perp}}. \quad (2.26)$$

Пусть за время  $dt$  через площадь  $dS_{\perp}$  цилиндра протекает энергия, равная произведению средней объемной плотности энергии на объем  $dS_{\perp} c dt$ :

$$dE = \langle \overline{W} \rangle dS_{\perp} c dt. \quad (2.27)$$

Подставив (2.27) в (2.26), получим

$$J = \langle \overline{W} \rangle c. \quad (2.28)$$

Интенсивность звука можно выразить через (2.25) и (2.28)

$$J = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 c, \quad (2.29)$$

Используя введенное нами выше определение  $p_0 = \rho \omega a c$ , перепишем выражение (2.29) для интенсивности акустической волны в следующем виде:

$$J = \frac{P_0^2}{2 \rho c}. \quad (2.30)$$

Громкость – величина слухового ощущения. Давление и интенсивность – объективные характеристики звука. Так, речь человека находится в диапазоне частот 27–4184 Гц. Органы слуха человека способны воспринимать акустические волны в частотном диапазоне 16–20000 Гц.

Если эффективное давление звука меньше некоторой величины, называемой порогом слышимости, то он ухом не воспринимается. Порог слышимости  $2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$  (*при*  $f = 1,5 \div 3 \text{ КГц}$ ) – стандартный порог. Верхняя граница слышимости, после которой уже происходит разрушение органов слуха человека, – 200 Па.

Громкость – субъективная оценка силы слухового ощущения звука. Громкость воспринимаемого звука зависит не только от давления, частоты и длительности звука, но и от чувствительности уха. Измеряется в беллах как  $p = \lg(p/p_0)$ .

### ***Отражение и преломление акустических волн на плоской границе раздела***

Когда звуковая волна попадает на границу раздела между различными средами (жидкостями или газами), с ней происходят процессы отражения и преломления, то есть наряду с падающей волной возникают ещё две. Одна из них – отражённая – распространяется обратно от поверхности раздела в первой среде, и вторая – преломлённая – распространяется от границы раздела во второй среде.

Связь между падающей, отражённой и преломлённой волнами определяется граничными условиями на поверхности раздела между обеими средами.

Выясним, что происходит с падающей волной на границе, исходя из физических условий, существующих на границе.

Пусть плоскость  $x = 0$  является границей двух сред, обладающих различными упругими свойствами.

$$\xi_1 = A_1 \cos(\omega t - k_1 x), \quad k_1 = \omega / u_1.$$

На границе раздела частицы среды 1 колеблются совместно с частицами среды 2, не проникая в неё. Это свойство непрерывности и непроницаемости выражается уравнениями

$$\xi_1(0, t) = \xi_2(0, t); \quad p_1(0, t) = p_2(0, t), \quad (2.31)$$

$k_y$  и  $k_z$  для всех трёх волн одинаковы. Это следует из того, что монохроматическая волна в неограниченном однородном пространстве является решением уравнения движения. При наличии граничного раздела добавляются лишь граничные условия при  $x = 0$ , не зависящие ни от  $t$ , ни от  $y$  и  $z$ ; поэтому зависимость от  $t$ ,  $y$  и  $z$  остаётся неизменной во всём пространстве и времени, т.е.  $k_y$  и  $k_z$  остаются такими же, какими они были в падающей волне.

Пусть плоскость  $z = 0$ , т.е. плоскость  $x, y$  является плоскостью падения волны. Таким образом, направления распространения всех трёх волн лежат в одной плоскости. Тогда в падающей волне  $k_z = 0$ , следовательно, то же самое для отражённой и преломлённой волны, т.е. направление распространения лежит в одной плоскости. Тогда

$$k_y^{nao} = k_y^{omp} = k_y^{np}, \quad \text{следовательно,} \quad \frac{\omega}{c_1} \sin \theta^{nao} = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta^{omp}, \quad \text{т.е.}$$

$$\theta^{nao} = \theta^{omp}; \quad \frac{\omega}{c_1} \sin \theta^{nao} = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta^{np}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\sin \theta^{nao}}{\sin \theta^{np}} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Все три волны будут иметь одинаковые частоты  $\omega$  и одинаковые компоненты  $k_y$  и  $k_z$  волнового вектора (но не  $k_x$ ), так как граница раздела добавляет в решение граничные условия, не зависящие от  $t$ ,  $y$  и  $z$  ( $x=0$ ). Поэтому зависимость решения от  $t$ ,  $y$  и  $z$  остаётся неизменной во всём пространстве и времени:

$$k_y^{nao} = k_y^{omp} = k_y^{np}; \quad k_z^{nao} = k_z^{omp} = k_z^{np}; \quad k = \frac{\omega}{c}; \quad c_{nao} \neq c_{np}.$$

Отсюда могут быть непосредственно выведены соотношения, определяющие направления распространения отражённой и преломлённой волны.

Пусть  $\theta$  есть угол между направлением волны и осью  $x$ . Тогда из равенства величин  $k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta$  для падающей и отражённой волны следует, что  $\theta^{nao} = \theta^{omp}$ , т.е. угол падения равен углу отражения. Из аналогичного равенства для падающей и преломлённой волны следует соотношение

$$k_y = \frac{\omega}{c_1} \sin \theta^{nao} = \frac{\omega}{c_2} \sin \theta^{np},$$

откуда

$$\frac{\sin \theta^{nao}}{\sin \theta^{np}} = \frac{c_1}{c_2} = n \quad (2.32)$$

– закон Снеллиуса, где  $n$  – показатель преломления,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости волны в средах 1 и 2 соответственно.

### ***Волны на поверхности жидкости***

Волны на поверхности жидкости не являются ни продольными, ни поперечными. При их распространении траектории частиц жидкости представляют собой окружности или, в случае малой глубины жидкости – эллипсы.

Такое движение может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний, т.е. частицы жидкости в поверхностных волнах одновременно совершают как поперечные, так и продольные колебания.

При распространении волн на поверхности жидкости начинают действовать силы, которые восстанавливают равновесие этой поверхности. Это силы поверхностного натяжения и тяжести.

Распространение поверхностных волн связано с непрерывными изменениями площади каждого элемента поверхности жидкости – выпуклость становится плоскостью и затем сменяется вогнутостью. Всякому увеличению площади поверхности жидкости стремятся препятствовать силы поверхностного натяжения, а всякому нарушению горизонтальности – силы тяжести.

Скорость распространения волн на свободной поверхности жидкости определяется соотношением

$$c^2 = \frac{2\pi \alpha}{\lambda} \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{2\pi} g, \quad (2.33)$$

где  $\lambda$  – длина волны,  $\alpha$  – поверхностное натяжение,  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение свободного падения.

Для коротких волн  $\lambda < 1,72$  см, основную роль играют силы поверхностного натяжения, тогда

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{\lambda\rho}} \quad (2.34)$$

– это капиллярные волны

Для обычных волн основную роль играет сила тяжести, их скорость определяется соотношением

$$c = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}. \quad (2.35)$$

Когда длина волны значительно превышает глубину жидкости, как в случае приливных волн, скорость их распространения не зависит ни от длины волны, ни от рода жидкости, а определяется лишь глубиной  $h$  :

$$c = \sqrt{gh}. \quad (2.36)$$

Зависимость фазовой скорости волн от длины волны, т.е.  $c = c(\lambda)$ , называют дисперсией. Для обычных волн их скорость тем больше, чем больше длина волны (нормальная дисперсия). Для капиллярных волн наблюдается обратная зависимость (аномальная дисперсия) (см. рис. 2).

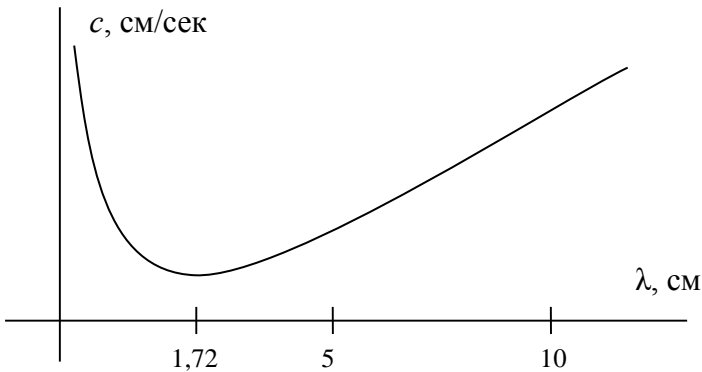


Рис. 2. Зависимость скорости распространения поверхностных волн  $c$  от длины волны  $\lambda$ .

Поверхностные волны могут возникать на любой поверхности раздела жидких или газообразных сред, имеющих различные плотности.

Например, хорошо заметны медленно движущиеся волнистые облака, возникающие на поверхности раздела слоёв атмосферы с различной плотностью воздуха.

## Упругие волны в твердом теле

Пуассоном впервые было доказано существование в однородной изотопной среде волн двух типов: один из них – волны сжатия, другой – волны сдвига. Им было показано, что они характеризуются различными скоростями распространения фронта, а также тем, что в волнах сжатия–разряжения отсутствуют вращающиеся частицы, а сдвиговые волны не сопровождаются изменением объема.

Для того, чтобы получить уравнение движения упругой среды, надо приравнять силу внутренних напряжений произведению ускорения  $\ddot{u}$  на массу единицы объема тела, т.е. на его плотность  $\rho$ .

Поскольку все деформации предполагаются малыми, то рассматриваемые в теории упругости движения представляют собой упругие волны.

Рассмотрим плоскую упругую волну в неограниченной изотропной среде, т.е. волну, в которой деформация  $u$  является функцией только одной из координат, скажем, от  $x$  (и от времени  $t$ ). Все производные по  $y$  и  $z$  исчезают, и мы получаем для отдельных компонент вектора  $u$  следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}\tag{2.37}$$

где

$$c_l = \sqrt{\frac{3\kappa + 4\mu}{3\rho}}; \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

$\kappa$  – модуль всестороннего сжатия и  $\mu$  – модуль сдвига.

Уравнения (2.37) представляют собой обычные волновые уравнения в одном измерении, и входящие в них величины  $c_l$  и  $c_t$  являются скоростями распространения волны. Мы видим, что



скорости распространения волны оказываются различными для компоненты  $u_x$  с одной стороны и компонент  $u_y$  и  $u_z$  – с другой.

Таким образом, упругая волна представляет собой по существу две независимо распространяющихся волны. В одной из них ( $u_x$ ) смещение направлено вдоль распространения самой волны. Такая волна называется продольной и распространяется со скоростью  $c_l$ . В другой ( $u_y, u_z$ ) смещение направлено в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения. Такая волна называется поперечной и распространяется со скоростью  $c_t$ . Отметим, что скорость распространения продольных волн всегда больше, чем скорость поперечных

$$c_l > c_t \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$c_l$  и  $c_t$  часто называют продольной и поперечной скоростями звука.

В поперечной волне имеются только компоненты  $u_y$  и  $u_z$ , и поскольку (в плоской волне) они не зависят ни от  $y$ , ни от  $z$ , то для такой волны  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , т.е. поперечные волны не связаны с изменением объёма отдельных участков тела.

Для продольных волн  $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$ ; эти волны сопровождаются сжатиями и расширениями в теле.

Разделение волны на две независимые, распространяющиеся с разными скоростями части можно произвести и в общем случае произвольной неплоской упругой волны в неограниченном пространстве.

Для этого случая имеем векторное волновое уравнение (частный случай которого представляет собой уравнение (2.37))

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{u}} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (2.38)$$

Представим вектор  $\mathbf{u}$  в виде суммы двух частей (т.к. всякий вектор можно представить как сумму вихревой и потенциальной компоненты):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t \quad (\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0; \operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0),$$

одна из которых удовлетворяет условию  $\operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0$ , а другая  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$  (т.е. всегда можно представить вектор в виде суммы ротора некоторого вектора и градиенты некоторого скаляра).

Подставив  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$  в (2.38), получим

$$\ddot{\mathbf{u}}_l + \ddot{\mathbf{u}}_t = c_l^2 \Delta (\mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t) + (c_t^2 - c_l^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l. \quad (2.39)$$

Применив к обеим сторонам уравнения  $\operatorname{div}$  (т.к.  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ ), получим

$$\operatorname{div} \ddot{\mathbf{u}}_l = c_l^2 \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l + (c_t^2 - c_l^2) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u}_l,$$

или

$$\operatorname{div} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0. \quad (2.40)$$

С другой стороны,  $\operatorname{rot}$  стоящего в скобках выражения (вектора) тоже равен нулю (т.к.  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$ ). Но если  $\operatorname{rot}$  и  $\operatorname{div}$  некоторого вектора исчезают во всём пространстве, то этот вектор тождественно равен нулю.

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (2.41)$$

Аналогично, применяя к уравнению (2.39) операцию  $\operatorname{rot}$  и помня, что  $\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0$ , и что  $\operatorname{rot}$  всякого градиента равен нулю, находим (т.е.  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_l = 0$ ):

$$\operatorname{rot} (\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l) = 0. \quad (2.42)$$

Поскольку  $\operatorname{div}$  стоящего в скобках выражения тоже равна нулю, то мы приходим к уравнению того же вида как и (2.41)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_l}{\partial t^2} - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = 0. \quad (2.43)$$

Уравнения (2.41) и (2.43) представляют собой обычные волновые уравнения (в трёх измерениях). Каждое из них соответствует распространению упругой волны со скоростью соответственно  $c_l$  или  $c_t$ . Одна из этих волн ( $u_t$ ) не связана с изменением объёма (в силу  $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$ ), а другая ( $u_l$ ) сопровождается объёмными сжатиями и расширениями.

Эти уравнения описывают простейшие сейсмические волны, распространяющиеся через Землю.

Распространение волн в Земле осложняется тем, что в этом случае надо учитывать сложность структуры среды и наличие границ раздела, например, поверхность Земли.

При падении продольной сейсмической волны на границу раздела двух сред в общем случае возникают четыре волны: две отражённые – продольная и поперечная, и две преломлённые – продольная и поперечная. В этом состоит основная особенность сейсмических волн.

Как и на поверхности жидкости, на поверхности Земли (на дне) могут распространяться поверхностные волны (волны Ламе и Релея).

### ***Контрольные вопросы и задания***

1. Запишите исходную систему уравнений, описывающую закономерности движения жидкости или газа.
2. Укажите роль уравнение состояния при выводе волнового уравнения.
3. Дайте определение поперечных волн. Приведите примеры.
4. Что такое потенциал колебательной скорости?
5. Как изменятся уравнение движения и уравнение состояния в вязких жидкостях?
6. Решите задачу о распространении в жидкости поперечных волн, возбуждаемых колеблющейся стенкой.
7. Дайте определение интенсивности звука. От каких параметров зависит данная величина?
8. Что такое акустическое сопротивление среды?
9. Чем характеризуется направление переноса энергии в данной точке волнового поля?
10. Решите задачу падения акустической волны на плоскую границу раздела двух сред. Какие процессы при этом происходят?
11. Какова природа волн на поверхности жидкости? Как скорость их распространения зависит от длины волны?
12. Приведите вывод волнового уравнения для упругих волн в твердом теле. Какие типы упругих волн существуют в твердых телах и какова их физическая природа?

### 3. Плоские электромагнитные волны

#### *Плоские электромагнитные волны в изотропных средах*

Исходной системой уравнений для определения электромагнитного поля в среде являются уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  — плотности токов и электрических зарядов в среде, появление которых вызвано электромагнитным полем. Эти величины связаны уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

физический смысл которого аналогичен смыслу уравнения (2.1) для механики сплошных сред. Уравнение выражает закон сохранения полного электрического заряда внутри достаточно большого объема среды,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — это напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  — векторы электрической и магнитной индукции.

Нужно заметить, что система (3.1)–(3.4) не является полной. В нее входят пять векторных величин:  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  для определения которых необходимо иметь пять векторных уравнений. Однако система (3.1)–(3.4) содержит лишь два векторных и два скалярных уравнения, причем уравнение (3.3) есть следствие уравнений (3.1) и (3.5), а (3.4) является следствием (3.2).

Действительно, взяв дивергенцию от обеих частей (3.2), с учетом тождества  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ , получим соотношение

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.6)$$

Перестановка операторов  $\partial / \partial t$  и  $\operatorname{div}$  правомерна в силу условия непрерывности векторов поля. Если проинтегрировать (3.6)

и допустить, что когда-либо в прошлом электромагнитное поле отсутствовало (что позволяет положить постоянную интегрирования равной нулю), получим уравнение (3.4), являющееся математическим выражением экспериментального факта отсутствия свободных магнитных зарядов.

Уравнение (3.3) можно получить, взяв дивергенцию от обеих частей (3.1):

$$0 = \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}.$$

С учетом уравнения непрерывности (3.5) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - 4\pi\rho) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Таким образом, получается уравнение (3.3), являющееся математическим выражением закона Кулона.

Для расчета электромагнитных полей в различных средах систему уравнений (3.1)–(3.4) необходимо дополнить системой материальных уравнений:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}).$$

Эти три уравнения отражают свойства конкретной рассматриваемой среды и должны быть добавлены к уравнениям Максвелла, чтобы они приобрели определенность. В вакууме, например,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = 0.$$

Связь между  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  зависит от характера взаимодействия электромагнитного поля с веществом и может иметь очень сложный вид. Она может быть нелинейной, нелокальной, учитывать анизотропию и наследственные свойства («память») среды. Последнее означает, в частности, что значения векторов  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  в какой-либо точке  $\mathbf{r}$  и в момент времени  $t$  могут зависеть от значений векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в других точках пространства и в предшествующие моменты времени. Такая связь между векторами приводит к появлению частотной и пространственной дисперсии, существенно влияющей на процессы

распространения волн. Эти вопросы будут рассмотрены далее. Здесь же мы будем считать, что характерные внутренние пространственные и временные масштабы среды не сказываются на распространении волны, и связь между векторами локальна и линейна. Материальные уравнения в этом случае имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.7)$$

Для изотропной однородной среды  $\varepsilon$ ,  $\mu$  – константы, называемые электрической и магнитной проницаемостью соответственно,  $\sigma$  – проводимость.

Если  $\sigma \neq 0$  и среда проводящая, то, подставляя (3.7) в уравнения (3.3) и (3.5), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \rho = 0 \quad \text{или} \quad \rho = \rho_0 e^{-t/t_0},$$

где  $t_0 = \varepsilon / 4\pi\sigma$ . В среде, обладающей проводимостью, плотность свободных зарядов убывает со временем.

Таким образом, система уравнений (3.1)–(3.4) с учетом материальных уравнений (3.7) запишется в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Исключим из системы (3.8) вектор  $\mathbf{H}$ , для чего применим операцию  $\operatorname{rot}$  к обеим частям второго из уравнений (3.8). Учитывая, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E},$$

получим

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Если  $\sigma = 0$ , т.е. среда не обладает проводимостью, то вектор  $\mathbf{E}$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Таким же уравнениям удовлетворяет и вектор  $\mathbf{H}$ .

Перейдем к рассмотрению электромагнитного поля, в котором векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  зависят лишь от одной пространственной координаты  $\zeta = (\mathbf{m}\mathbf{r})$  и времени  $t$ . В этом случае волновое уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.10)$$

Аналогичное уравнение получается и для вектора  $\mathbf{H}$ . Каждая из декартовых компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будет при этом удовлетворять одномерному скалярному уравнению (1.9), решение которого в виде бегущих плоских волн уже было рассмотрено выше. Уравнение (3.10) описывает процесс распространения в направлениях  $\pm \mathbf{m}$  со скоростью  $v = c / \sqrt{\varepsilon \mu}$  двух плоских векторных волн

$$\mathbf{E}_{1,2} = \mathbf{E}[t \mp \zeta / v].$$

Аналогично

$$\mathbf{H}_{1,2} = \mathbf{H}[t \mp \zeta / v].$$

Для определения структуры этих волн необходимо обратиться к уравнениям Максвелла. Рассмотрим волну, распространяющуюся в направлении  $+\mathbf{m}$ . В этом случае

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{m}\mathbf{E}), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{m}\mathbf{E}]$$

и система уравнений (3.1)–(3.4) будет иметь вид



$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \zeta}[\mathbf{mE}] &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \frac{\partial}{\partial \zeta}[\mathbf{mH}] &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathbf{mE}) &= 0, & \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathbf{mH}) &= 0.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Из последних двух уравнений (3.11) следует, что  $\partial E_\zeta / \partial \zeta = 0$  и  $\partial H_\zeta / \partial \zeta = 0$ , т.е. проекции векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на направление распространения волны если и не равны нулю, то могут зависеть только от времени. Умножая теперь скалярно первые два уравнения (3.11) на вектор  $\mathbf{m}$ , получим  $\partial E_\zeta / \partial t = \partial H_\zeta / \partial t = 0$ . Иными словами, проекции  $E_\zeta$  и  $H_\zeta$  не зависят также и от времени, т.е. тождественно равны нулю. Это означает, что электромагнитные волны в диэлектрической среде являются поперечными волнами; векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  лежат в плоскости фронта волны.

В проводящей среде  $\partial E_\zeta / \partial \zeta = 0$ , однако из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}[\mathbf{mH}] = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}$$

в случае  $\sigma \neq 0$  следует, что

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_\zeta}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_\zeta \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_\zeta = \mathbf{E}_\zeta(0) \exp\left(-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} t\right).$$

Продольная компонента вектора  $\mathbf{E}$  убывает во времени, а поэтому и в проводящей среде поле также поперечно.

Найдем теперь связь между векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  в бегущей плоской волне. Вводя координату  $\tau = t - \zeta / v$ , связанную с волной, получим  $\partial / \partial t = \partial / \partial \tau$ ,  $\partial / \partial \zeta = -\partial / (v \partial \tau)$ . Первое из уравнений (3.11) примет вид

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{v} [\mathbf{mH}] + \frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E} \right\} = 0, \quad \mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} [\mathbf{mH}].\tag{3.12}$$

Константу, получаемую при интегрировании по  $\tau$ , следует положить равной нулю, поскольку рассматриваются только переменные электромагнитные поля.

Как следует из (3.12), векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{m}$  образуют правую ортогональную тройку векторов. Величина

$$Z_0 = \sqrt{\mu / \varepsilon}, \quad (3.13)$$

определяющая количественную связь между напряженностями электрического и магнитного полей, называется *импедансом среды*.

Если среда обладает проводимостью, то распространение волны описывается уравнением (3.9). В этом случае без изменения формы может распространяться только гармоническая волна.

Рассмотрим распространение плоской гармонической волны. Принимая  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(\zeta)e^{-i\omega t}$ , для комплексной амплитуды получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_0}{d\zeta^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \mathbf{E}_0 = 0, \quad (3.14)$$

которое отличается от аналогичного уравнения для идеальной среды только тем, что вместо действительного коэффициента  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu / c^2$  в него входит комплексная величина

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \varepsilon^\kappa$$

Решение уравнения (3.14) можно записать в виде

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{A}_1 e^{ik\zeta} + \mathbf{A}_2 e^{-ik\zeta}, \text{ где } k = \frac{\omega}{c} (n + i\chi).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{E}(\zeta, t) = \mathbf{A}_1 e^{-\frac{\omega}{c}\chi\zeta} e^{-i\omega\left(t - \frac{n}{c}\zeta\right)} + \mathbf{A}_2 e^{\frac{\omega}{c}\chi\zeta} e^{-i\omega\left(t + \frac{n}{c}\zeta\right)}. \quad (3.15)$$

Решение (3.15) получено в виде двух бегущих плоских однородных волн, амплитуды которых убывают по мере распространения. Величина  $\chi$  характеризует скорость убывания

амплитуды волны в направлении распространения и называется **показателем поглощения** (следует отличать от коэффициента поглощения, равного  $k'' = \frac{\omega}{c} \chi$ ). Величина  $n = c/v$  определяет фазовую скорость волны в среде и называется **показателем преломления**.

### **Поглощение электромагнитных волн**

Выясним, как зависят показатели  $n$  и  $\chi$  от частоты волны и параметров среды. Введем величину

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}, \quad (3.16)$$

называемую **тангенсом угла потерь**. Приравнявая действительные и мнимые части равенства

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu(1 + i \operatorname{tg} \delta) = \frac{\omega^2}{c^2} (n + i\chi)^2,$$

получим систему уравнений для нахождения  $n$  и  $\chi$ :

$$n^2 - \chi^2 = \mu\varepsilon, \quad 2n\chi = \mu\varepsilon \operatorname{tg} \delta.$$

Решение этой системы дает искомые зависимости

$$\begin{aligned} n &= \left[ \frac{\mu\varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} + 1 \right) \right]^{1/2}, \\ \chi &= \left[ \frac{\mu\varepsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 \right) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Важно отметить, что в проводящей среде  $n$  и  $\chi$  зависят от частоты (поскольку  $\operatorname{tg} \delta \sim \omega^{-1}$ ), т.е. проводящая среда является диспергирующей. При распространении плоской волны произвольной формы происходит искажение ее профиля, поскольку фазовая скорость и коэффициент затухания различных частотных составляющих не одинаковы.

Рассмотрим предельные случаи малых и больших потерь. Для слабо затухающей волны ( $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ ).

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} = \text{const}, \quad \chi = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} = \chi(\omega).$$

Этот случай в некотором смысле аналогичен акустическому: дисперсии нет, а диссипация частотно-зависима.

Для волны, испытывающей сильное затухание ( $\operatorname{tg} \delta \gg 1$ ),

$$n \approx \chi = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \operatorname{tg} \delta} = \sqrt{2\pi \frac{\mu\sigma}{\omega}}. \quad (3.18)$$

Величина потерь и фазовая скорость в проводящей среде определяются не только значениями  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  и  $\mu$ , но существенным образом зависят от частоты.

Однако в случае  $\operatorname{tg} \delta \gg 1$  волновой процесс практически не реализуется, поскольку волна затухает на очень малых расстояниях. Убывание амплитуды в  $e$  раз происходит на длине

$$d = \frac{c}{\omega\chi} = \frac{\lambda}{2\pi\chi}.$$

В хороших проводниках  $n \approx \chi \gg 1$  (см. (3.18)), и, следовательно, глубина проникновения электромагнитной волны в проводящую среду (толщина скин-слоя)  $d \ll \lambda$ .

Найдем связь между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в проводящей среде. Учитывая (3.12), получим

$$\frac{H}{E} = \frac{\sqrt{n^2 + \chi^2}}{\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)^{1/4}. \quad (3.19)$$

В проводящей среде существует сдвиг фаз  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\chi}{n} = \left[ \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} - 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \delta + 1} + 1} \right]^{1/2} = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}, \quad \varphi = \delta / 2; \quad (3.20)$$

при  $\sigma \rightarrow \infty \varphi \rightarrow \pi / 4$ ; такая ситуация реализуется в очень хороших проводниках.

Для приближенного, более простого анализа уравнения (3.9) в случае плоских волн

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon v^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (3.21)$$

можно использовать метод медленно изменяющегося профиля, описанный в предыдущем параграфе, либо сконструировать линейное уравнение, воспользовавшись приближенным законом дисперсии

$$k \approx \frac{\omega}{v} \left( 1 + i \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \right) = \frac{\omega}{v} + \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon v},$$

справедливым для слабо проводящей среды  $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ . Оба приема позволяют понизить порядок исходного уравнения (3.21) и получить

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} + \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon v} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{E}(\zeta, \tau) = \mathbf{E}(0, \tau) \exp \left[ -\frac{2\pi\sigma}{\varepsilon v} \zeta \right]. \quad (3.22)$$

Сравнивая этот случай с акустическим, нетрудно видеть, что уравнение (3.22) имеет более простой вид. Это связано с тем обстоятельством, что в исходном уравнении (3.21) поглощение описывается производной первого порядка, в то время как для звуковых волн диссипативный член связан с производной третьего порядка, высшей по сравнению с другими членами уравнения.

### ***Поток энергии***

В среде, не обладающей проводимостью, энергия электромагнитного поля сохраняется. Закон сохранения энергии можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0. \quad (3.23)$$

Здесь  $W$  – объемная плотность энергии,  $\mathbf{S}$  – поток энергии. Для нахождения явного вида величин  $W$  и  $\mathbf{S}$  воспользуемся системой уравнений Максвелла для среды без дисперсии (3.8), в которой

положим  $\sigma = 0$ . Умножая первое уравнение (3.8) на  $\mathbf{E}$ , второе на  $\mathbf{H}$  и вычитая одно из другого, получим

$$\frac{\varepsilon}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mu}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (3.24)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = 0. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.25) с (3.23), находим выражение для плотности и потока энергии

$$W = \frac{1}{8\pi} (\varepsilon E^2 + \mu H^2), \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (3.26)$$

Второе выражение в (3.26) называется **вектором Умова–Пойнтинга**.

Сохранение полной энергии имеет место в достаточно большой области, на границах которой поток энергии  $\mathbf{S}$  равен нулю. Внутри же этого объема происходит перенос энергии из одной его части в другую, обусловленный распространением в системе электромагнитных волн.

### **Поляризация электромагнитных волн**

Электромагнитная волна имеет векторный характер. Для ее полного описания необходимо кроме амплитуды, фазы и частоты указать поляризацию волны, т.е. направление векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в пространстве: для плоской волны нужно знать направление  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в плоскости волнового фронта.

Необходимо указать, что поляризованными могут быть поперечные волны иной физической природы – например, волны в струне или упругом твердом теле, как уже было показано выше. Однако для определенности мы будем рассматривать поляризацию электромагнитных волн.

Пусть направление распространения плоской гармонической волны совпадает с осью  $z$ . Разложим вектор  $\mathbf{E}$  в плоскости  $x, y$  по двум взаимно перпендикулярным направлениям (рис. 3).

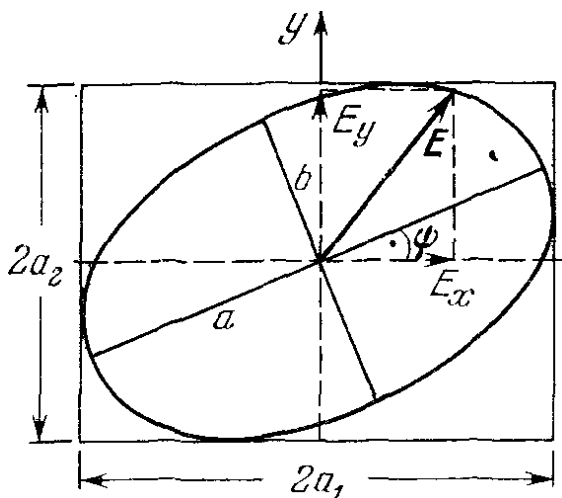


Рис. 3. Эллиптически-поляризованная волна.

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 \cos(\omega\tau + \varphi_1) = \operatorname{Re} a_1 \exp(-i\omega\tau - i\varphi_1), \\ E_y &= a_2 \cos(\omega\tau + \varphi_2) = \operatorname{Re} a_2 \exp(-i\omega\tau - i\varphi_2). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь  $\tau = t - z/v$ ;  $a_1, a_2; \varphi_1, \varphi_2$  — постоянные действительные амплитуды и фазы ортогональных проекций вектора  $\mathbf{E}$ .

Определим, как изменяется положение вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости  $x, y$ . Исключая из соотношений (3.27) временной множитель, получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - \frac{2E_x E_y}{a_1 a_2} \cos \Delta = \sin^2 \Delta, \quad \Delta = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (3.28)$$

Если  $\Delta = \pm\pi/2$ , уравнение (3.28) переходит в следующее:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 = 1,$$

т. е. при  $\Delta = \pm\pi/2 + \pi n$  оси эллипса совпадают с осями координат. При  $a_1 = a_2$  эллипс вырождается в окружность.

В случае  $\Delta = \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$ , из уравнения (3.28) следует

$$\left( \frac{E_x}{a_1} \pm \frac{E_y}{a_2} \right)^2 = 0$$

Это уравнение двух прямых, углы наклона которых  $\chi_{1,2}$  к оси  $x$  определяются отношением  $a_2 / a_1$ ;  $\text{tg } \chi_{1,2} = a_2 / a_1$ .

Состояние поляризации гармонической волны удобно характеризовать множителем поляризации

$$P = \frac{E_x}{E_y} = \frac{a_1}{a_2} e^{i\Delta}. \quad (3.29)$$

Как следует из предыдущих рассуждений, при комплексном  $P$  волна имеет эллиптическую поляризацию; при чисто мнимом  $P$  оси эллипса совпадают с осями координат. Когда  $P = \pm i$ , поляризация круговая. В случае действительного  $P$  волна поляризована линейно. Знак мнимой части  $P$  определяет направление вращения вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости поляризации. Знак плюс соответствует правой, минус – левой поляризации. Напомним, что правополяризованной называется волна, у которой вращение вектора  $\mathbf{E}$  для наблюдателя, смотрящего в направлении прихода волны, происходит по часовой стрелке. Если  $\text{Im } P = 0$  и  $P = \pm a_1 / a_2$ , то  $P = \text{ctg } \chi_{1,2}$ .

Таким образом, если отношение амплитуд ортогональных проекций вектора  $\mathbf{E}$  и сдвиг фаз между ними не изменяются, т.е.  $E_x$  и  $E_y$  когерентны, то электромагнитная волна поляризована.

В отличие от гармонических волн, которые всегда поляризованы, часто имеют дело со сложной случайной зависимостью от времени амплитуд  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$  и разности фаз  $\Delta(t)$ , когда все положения вектора  $\mathbf{E}$  в плоскости фронта волны оказываются равновероятными. Такая волна называется неполяризованной («естественный свет»).

Поляризацию волны можно определить из экспериментов, если фиксировать изменение во времени мгновенных значений компонент  $E_x$  и  $E_y$ . Однако провести такие измерения для быстро изменяющихся полей затруднительно в силу инерционных свойств измерительных приборов.



Состояние поляризации можно также определить, измеряя зависимость интенсивности излучения от направления в плоскости  $x, y$ . Если волна поляризована линейно, то средняя интенсивность отлична от нуля только в одном направлении. Для волны, поляризованной по кругу, распределение средней интенсивности будет равномерным по всей плоскости, так же как и для неполяризованной волны. Поэтому наличие круговой поляризации путем измерения интенсивности в разных направлениях плоскости  $x, y$  не может быть установлено непосредственно. Однако если ввести фазовую задержку на  $\pi/2$  в одну из прямоугольных компонент вектора  $\mathbf{E}$ , то волна с круговой поляризацией превратится в линейно-поляризованную, волна же неполяризованная не изменится. Полностью поляризованные и полностью неполяризованные волны представляют два противоположных предельных случая регулярного или случайного состояния поляризации волны. Часто приходится иметь дело с частично-поляризованными волнами, представляющими собой суперпозицию полностью неполяризованной и полностью поляризованной волны. Дело в том, что волны, которые мы считаем монохроматическими, в действительности всегда являются квазимонохроматическими. Их можно рассматривать как суперпозицию монохроматических волн с частотами в некотором промежутке  $\Delta\omega$ . В данной точке пространства поле такой волны будет описываться функцией

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{a}(t) \exp(-i\omega t - i\varphi(t)), \quad (3.30)$$

где  $\mathbf{a}(t)$  – амплитуда,  $\varphi(t)$  – фаза, которые на интервале  $T = 2\pi / \omega$  меняются мало.

### ***Отражение и преломление плоских электромагнитных волн на плоской границе раздела***

В теории волн очень часто приходится иметь дело с задачами о распространении сигналов в неоднородных средах. Здесь возникают значительные трудности, и преодолеваются они в основном с помощью приближенных методов расчета. Для того чтобы строить приближенную теорию, очень полезно знать решения некоторых простых задач, которые затем можно пытаться обобщить. Самая простая задача о распространении волн в неоднородной среде – это

задача о падении плоской монохроматической волны на плоскую границу раздела двух сред с различными свойствами. Как известно, при этом возникают преломлённая (прошедшая) и отражённая волны. Пусть граница раздела между двумя полубесконечными однородными средами совпадает с плоскостью  $z = 0$  декартовой системы координат. Среда, расположенная сверху ( $z > 0$ ) и снизу ( $z < 0$ ) от границы, характеризуются соответственно параметрами  $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1; \varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ . Пусть на эту границу из первой среды падает плоская волна под углом  $\theta_0$  к оси  $z$  (рис. 4) с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0 = k_1 \mathbf{m}_0$ , ( $k_1 = \sqrt{\varepsilon_1^k \mu_1} \omega / c$ ,  $\mathbf{m}_0$  – единичный вектор нормали к фронту падающей волны). Плоскость падения, содержащую вектор  $\mathbf{k}_0$  и ось  $z$ , совместим с плоскостью  $xz$ .

Задача об отражении и преломлении падающей волны здесь будет решена в линейном приближении. В этом случае гармоники не возникают, и частоты всех трёх волн – падающей, отражённой и преломлённой – одинаковы. Если, например, вторая среда нелинейна, при отражении может возникнуть волна с частотой  $2\omega$ ; этот эффект здесь не рассматривается.

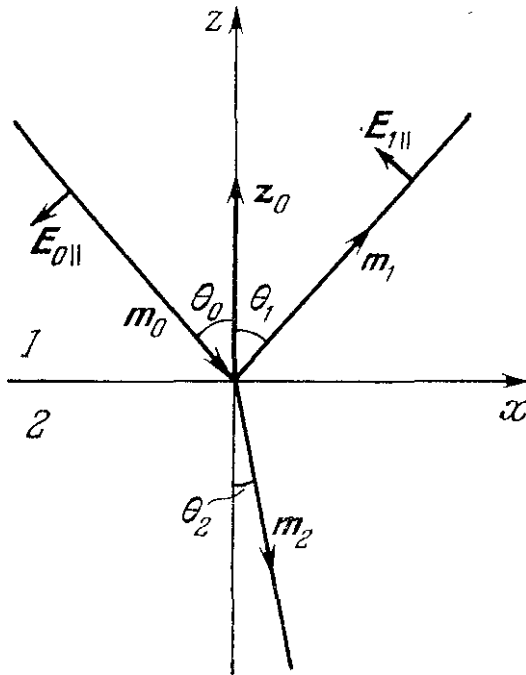


Рис. 4. Отражение и преломление плоской волны на плоской границе раздела двух сред.

Обозначим волновой вектор отраженной волны через  $\mathbf{k}_1 = k_1 \mathbf{m}_1$ , а преломленной  $\mathbf{k}_2 = k_2 \mathbf{m}_2$ ;  $\mathbf{z}_0$  – единичный вектор нормали к границе раздела, направленный из среды 2 в среду 1.

Согласно (3.12) и (3.15) электрические и магнитные поля можно записать следующим образом. Для падающей волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_I &= \mathbf{E}_0 \exp[ik_1(\mathbf{m}_0 \mathbf{r}) - i\omega t], \\ \mathbf{H}_I &= \frac{[\mathbf{m}_0 \mathbf{E}_0]}{Z_1} \exp[ik_1(\mathbf{m}_0 \mathbf{r}) - i\omega t]; \end{aligned} \quad (3.31)$$

для отраженной:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R &= \mathbf{E}_1 \exp[ik_1(\mathbf{m}_1\mathbf{r}) - i\omega t], \\ \mathbf{H}_R &= \frac{[\mathbf{m}_1\mathbf{E}_1]}{Z_1} \exp[ik_1(\mathbf{m}_1\mathbf{r}) - i\omega t]\end{aligned}\quad (3.32)$$

и для преломлённой:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_T &= \mathbf{E}_2 \exp[ik_2(\mathbf{m}_2\mathbf{r}) - i\omega t], \\ \mathbf{H}_T &= \frac{[\mathbf{m}_2\mathbf{E}_2]}{Z_2} \exp[ik_2(\mathbf{m}_2\mathbf{r}) - i\omega t]\end{aligned}\quad (3.33)$$

Здесь  $Z_1 = \sqrt{\mu_1 / \varepsilon_1^{\kappa}}$  и  $Z_2 = \sqrt{\mu_2 / \varepsilon_2^{\kappa}}$  – импедансы первой и второй сред.

При  $z = 0$  должны выполняться граничные условия, сводящиеся к требованию непрерывности тангенциальных компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  суммарного волнового поля. Следовательно, при  $z = 0$  поля должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}[\mathbf{z}_0\mathbf{E}_0]e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r})} + [\mathbf{z}_0\mathbf{E}_1]e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r})} &= [\mathbf{z}_0\mathbf{E}_2]e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r})}, \\ [\mathbf{z}_0[\mathbf{m}_0\mathbf{E}_0]]e^{i(\mathbf{k}_0\mathbf{r})} + [\mathbf{z}_0[\mathbf{m}_1\mathbf{E}_1]]e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r})} &= \frac{Z_1}{Z_2}[\mathbf{z}_0[\mathbf{m}_2\mathbf{E}_2]]e^{i(\mathbf{k}_2\mathbf{r})}.\end{aligned}\quad (3.34)$$

Поскольку соотношения (3.34) должны быть выполнены во всех точках плоскости  $z = 0$ , из них вытекает требование одинаковой зависимости полей всех трех волн от координат  $x$  и  $y$  при  $z = 0$ . Поэтому фазовые множители должны быть одинаковыми:

$$k_1(\mathbf{m}_0\mathbf{r})\Big|_{z=0} = k_1(\mathbf{m}_1\mathbf{r})\Big|_{z=0} = k_2(\mathbf{m}_2\mathbf{r})\Big|_{z=0}\quad (3.35)$$

или

$$k_1 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2.$$

Здесь  $\theta_1$  – угол отражения,  $\theta_2$  – угол преломления (см. рис. 4).

Из (3.35) следует, что угол отражения равен углу падения (закон отражения):

$$\theta_1 = \theta_0,\quad (3.36)$$

а синусы углов преломления и падения связаны соотношением:

$$\sin \theta_2 / \sin \theta_0 = k_1 / k_2. \quad (3.37)$$

Это – закон преломления, или закон Снеллиуса.

Если проводимости первой и второй сред равны нулю (прозрачные среды), то  $\theta_2$  в формуле (3.37) – действительный угол между нормалью к фронту преломленной волны и осью  $z$ . Заметим, что закон Снеллиуса справедлив и в случае комплексных  $k_1$  и  $k_2$ .

### ***Распространение волн в диспергирующих средах***

В простейшем из рассмотренных нами случаев распространение плоских волн описывалось уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.38)$$

При этом для гармонического возмущения  $u = \exp(i\omega t \pm ik\zeta)$  волновое число связано с частотой линейной зависимостью

$$k = \omega / c \text{ или } \omega = ck,$$

где скорость распространения волны  $c$  есть постоянная величина. Однако уже при учете диссипативных процессов поведение волны описывается более сложными уравнениями. Связь  $\omega(k)$  или  $k(\omega)$ , определяющая закон дисперсии, также усложняется. Как было показано ранее, для звуковых волн в вязкой теплопроводящей среде и электромагнитных волн в среде с проводимостью справедливы следующие соотношения между волновым числом и частотой:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \left( 1 - i \frac{b\omega}{c_0^2 \rho_0} \right)^{-1}, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \mu \left( \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)^{-1}.$$

В более общих случаях от частоты могут сложным образом зависеть и действительная, и мнимая части волнового числа

$$k(\omega) = k'(\omega) + ik''(\omega).$$

Действительная часть комплексного волнового числа характеризует зависимость от частоты фазовой скорости

распространения волны  $v_{\phi} = \omega / k'(\omega)$ , а мнимая – зависимость затухания амплитуды волны от частоты.

Проявление дисперсии приводит к изменению закономерностей распространения некогерентных волн. Действительно, различные спектральные компоненты распространяются в диспергирующей среде с отличающимися фазовыми скоростями и коэффициентами затухания:

$$F(\omega, \zeta) = A \exp \left\{ -i \left[ \omega t - k'(\omega) \zeta \right] - k''(\omega) \right\}.$$

В силу дисперсии фазовой скорости в процессе распространения изменяются фазовые соотношения между спектральными компонентами. Следовательно, изменяется результат их интерференции – форма импульса искажается. Дисперсия коэффициента поглощения  $k''(\omega)$  приводит к трансформации частотного спектра волны  $|F(\omega, \zeta)|^2$  и к дополнительному искажению импульса.

На практике очень часто имеют дело с волнами, обладающими сравнительно узкими частотными спектрами. Иногда оказывается, что в рассматриваемой ограниченной области частот можно пренебречь или затуханием волны, или дисперсией фазовой скорости. Так, для звуковых волн во многих случаях можно не учитывать дисперсию, а для электромагнитных, напротив, поглощение.

### ***Контрольные вопросы и задания***

1. Запишите исходную систему уравнений для определения электромагнитного поля в среде.
2. Каков вид и роль материальных уравнений? Запишите материальные уравнения в случае вакуума. Как в этом случае изменятся уравнения Максвелла?
3. Приведите вывод волнового уравнения в случае плоских электромагнитных волн в изотропной однородной среде.
4. Какова структура электромагнитного волнового поля в изотропной однородной среде?
5. Дайте определение показателя поглощения и показателя преломления? Как они связаны?
6. Что такое тангенс угла потерь? Как он связан с поглощением электромагнитных волн?
7. Приведите вывод выражений определяющих поток энергии электромагнитной волны и вектор Умова–Пойнтинга.
8. Объясните явление поляризации электромагнитных волн. Рассмотрите частные случаи.
9. Решите задачу падения плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред. Какие процессы при этом происходят?
10. Рассмотрите вопрос распространения электромагнитной волны в диспергирующих средах. Как изменится волновое уравнение?
11. Какие эффекты наблюдаются при распространении электромагнитной волны в диспергирующих средах?

## 4. Дисперсия и волновые пакеты

### *Физические причины, приводящие к появлению дисперсии*

Обсудим некоторые физические причины, ответственные за появление дисперсии. Рассмотрим несколько примеров.

Как известно из оптики, зависимость показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от длины световой волны (или ее частоты) наиболее сильно сказывается в окрестности резонансных частот  $\omega_{mn}$ , соответствующих переходам между квантовыми уровнями. Вблизи резонанса  $\omega \approx \omega_{mn}$  резко возрастает и затухание волны (это приводит к появлению темных полос в спектрах поглощения атомов). Таким образом, частотная дисперсия наиболее существенна при  $\omega \approx \omega_{mn}$ , т.е. в том случае, когда в среде имеются характерные внутренние процессы, время протекания которых сравнимо с периодом изменения внешнего волнового поля. В области этих частот отклик среды на изменение величины внешнего поля запаздывает во времени. Поле в диспергирующей среде в данный момент зависит от значений приложенного поля во все предшествующие моменты времени. Иногда говорят, что такая среда обладает «памятью».

Сказанное в равной мере относится к распространению волн в средах, имеющих характерный пространственный параметр. Примерами таких сред могут служить плазма (характерный размер – дебаевский радиус), неоднородная среда (масштаб неоднородности), а также обычные газообразные, жидкие и твердые тела при высоких частотах, когда длина звуковой волны становится сравнимой с длиной свободного пробега или периодом решетки, и приближение сплошной среды неприменимо. В этих случаях поле в данной точке среды зависит от значений поля в соседних точках, т.е. связь внутреннего и приложенного внешнего поля является нелокальной. Дисперсия, появляющаяся в этих случаях, называется **пространственной**. Итак, дисперсия становится особенно существенной в области частот и волновых чисел, близких к резонансным. Однако дисперсионные эффекты могут накапливаться с расстоянием, проходимым волной, и слабая дисперсия может стать заметной и вдали от резонансных частот. Примером может служить



разложение света в спектр оптически прозрачной призмой, отклоняющей спектральные компоненты на разные углы.

Вообще говоря, характерные параметры с размерностью времени или длины вовсе не обязательно должны отражать внутренние свойства среды. Известно, что дисперсия существенно сказывается при распространении волн в волноводах; здесь роль характерного масштаба выполняет размер поперечного сечения волновода. Другим примером может служить распространение в среде без дисперсии квазиплоской волны, ограниченной в пространстве в виде пучка. Здесь зависимость скорости волны от частоты связана с проявлением дифракции.

Мы будем рассматривать дисперсионные эффекты, влияющие на процесс распространения волн и связанные только с физическими свойствами материальной среды. Мы рассмотрим характерные особенности распространения гармонических плоских волн в различных материальных диспергирующих средах, а также распространение модулированных волн или волновых пакетов.

### ***Модулированные волны и сигналы. Волновые пакеты***

Ранее нами рассматривалось главным образом распространение монохроматических волн. Однако строго монохроматических волн в природе не существует. Для того чтобы передать посредством волн какую-либо информацию, т.е. передать энергию, необходимо промодулировать волну. В линейном приближении модулированную волну (или сигнал с конечной шириной спектра) можно представить в виде суперпозиции гармонических плоских волн. В среде без дисперсии (а следовательно, и без диссипации) скорости различных частотных составляющих сигнала одинаковы, поэтому сигнал распространяется без изменения своей формы. Распространение сигнала в этом случае описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4.1)$$

Решение этого уравнения может быть представлено в виде двух плоских волн произвольной формы.

В диспергирующей среде скорость распространения различных частотных компонент различна. Это приводит к изменению разности фаз между составляющими спектра сигнала и к изменению

его формы. Скорость распространения сигнала может существенным образом отличаться от фазовой скорости отдельных гармонических компонент, и поэтому само понятие «скорость сигнала» в диспергирующей среде должно быть уточнено.

Математически проблема распространения сигнала в диспергирующей среде сводится к нахождению решения уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L(u) = 0. \quad (4.2)$$

где  $L$  – некоторый линейный оператор, действующий на функцию  $u$ . Например, для электромагнитных волн в линейной среде

$$L(u) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\infty \chi(\tau) u(t - \tau) d\tau,$$

при распространении звуковых волн в реальной среде (с учетом диссипативных процессов)

$$L(u) = (b / c_0^2 \rho_0) \partial \Delta u / \partial t$$

и т. д.

### ***Распространение сигнала (волнового пакета) в диспергирующей среде***

Перейдем к изучению закономерностей распространения в диспергирующей среде плоских немонахроматических волн, бегущих в направлении оси  $z$ . Такие волны могут возбуждаться или на границе среды (например, источником, расположенным при  $z = 0$ ), или путем создания в начальный момент времени (например, при  $t = 0$ ) некоторого пространственно-распределенного возмущения. Приведем ход решения уравнения (4.2) в этих двух случаях.

Рассмотрим вначале граничную задачу. Пусть диспергирующая среда занимает полупространство  $z \geq 0$  и на ее границе задан входной сигнал

$$u(t, z = 0) = u_0(t), \quad (4.3)$$

который имеет частотный спектр

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.4)$$

Так как спектральные компоненты распространяются в линейной среде независимо друг от друга, то решение волнового уравнения (4.2) можно представить в виде суперпозиции гармонических волн

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{-i[\omega t - k(\omega)z]\} d\omega. \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.2), мы можем найти закон дисперсии в среде  $k = k(\omega)$ , который будет определяться видом оператора  $L(u)$ . Если подставить выражение для спектра  $F(\omega)$  из (4.4) в (4.5), то можно представить искомое решение через поле на границе

$$u(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(t') \exp\{-i[\omega(t-t') - k(\omega)z]\} d\omega dt'. \quad (4.6)$$

В теории передачи сигналов важное место занимают вопросы распространения волновых пакетов. Волновой пакет — это квазимонохроматический сигнал с узким частотным спектром. Выделяя некоторую среднюю частоту сигнала  $\omega_0$ , можно записать высокочастотный импульс в виде

$$u_0(t) = A_0(t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.7)$$

где  $A_0(t)$  — комплексная медленно изменяющаяся функция:

$\left| \frac{dA_0}{dt} \right| \ll \omega_0 |A_0|$ . Так как ширина частотного спектра волнового

пакета  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , то в пределах спектральной линии излучения можно описать зависимость волнового числа от частоты, разложив в ряд дисперсионное соотношение:

$$k(\omega) = k_0(\omega_0) + \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2k}{d\omega^2} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (4.8)$$

Принимая во внимание (4.8), можно написать выражение для поля волнового пакета в виде

$$u(z, t) = A(z, t) \exp[i(k_0 z - \omega_0 t)], \quad (4.9)$$

где

$$A(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(t') dt' \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i \left[ (t-t') - \frac{dk}{d\omega} z \right] (\omega - \omega_0) + \frac{i}{2} z \frac{d^2 k}{d\omega^2} (\omega - \omega_0)^2 \right\} d\omega \quad (4.10)$$

Учет различных членов в разложении (4.8) соответствует различным приближениям теории дисперсии.

На рис. 5 точный закон дисперсии  $k = k(\omega)$  изображен кривой 1; кривая 2 – это квадратичная аппроксимация  $k(\omega)$ , описываемая формулой (4.8). Учет только линейного члена в разложении  $k(\omega)$  приводит к приближению, показанному прямой 3; она наклонена к оси  $k$  под углом  $\beta$ , определяемым из соотношения  $\text{tg } \beta = \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\omega_0} = v_{gp}$ , и является касательной к кривым 1 и 2.

Наклон прямой, проведенной в точку касания из начала координат, определяет величину фазовой скорости:

$$\text{tg } \alpha = \omega_0 / k_0 = v_{\phi}$$

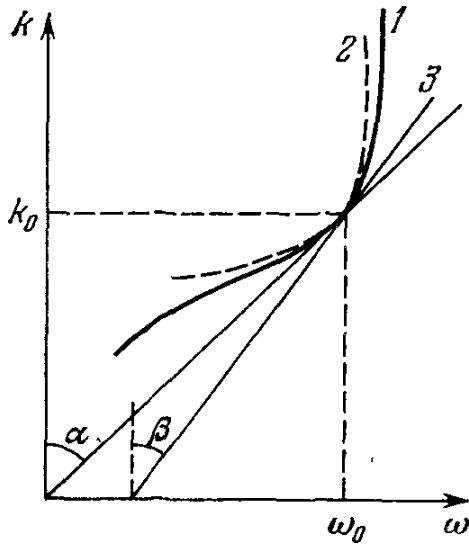


Рис. 5. Различные приближенные представления точного закона дисперсии  $k(\omega)$ .

### **Связь фазовой и групповой скоростей**

В первом приближении теории дисперсии, когда  $k(\omega) = k_0 + (dk/d\omega)_{\omega_0}(\omega - \omega_0)$ , внутренний интеграл в (4.10) превращается в дельта-функцию, и мы получаем

$$u(z, t) = A_0 \left( t - \frac{dk}{d\omega} z \right) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z)]. \quad (4.11)$$

Видно, что в данном случае волновой пакет распространяется без искажения с групповой скоростью

$$v_{gp} = \left( \frac{dk}{d\omega} \right)_{\omega_0}^{-1}. \quad (4.12)$$

Очевидно, что групповая скорость имеет физический смысл, когда она является действительной величиной, т.е. когда среда обладает малым поглощением. Слабое поглощение (в случае необходимости) может быть учтено только в экспоненциальном множителе в (4.11).

В первом приближении теории дисперсии амплитуда волнового пакета удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{1}{v_{gp}} \frac{\partial A}{\partial t} = 0. \quad (4.13)$$

Умножая (4.13) на комплексно-сопряженную амплитуду  $A^*$  и складывая с сопряженным уравнением, можно найти

$$\frac{\partial |A|^2}{\partial z} + \frac{1}{v_{gp}} \frac{\partial |A|^2}{\partial t} = 0. \quad (4.14)$$

Так как  $|A|^2$  характеризует плотность энергии волны, то видно, что энергия волнового пакета распространяется с групповой скоростью.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростями

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv_\phi)}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = v_\phi - \lambda \frac{dv_\phi}{d\lambda}.$$

Учитывая, что  $k = \omega / v_\phi = \omega n / c$ , можно также записать

$$v_{gp} = c \left[ \frac{d(n\omega)}{d\omega} \right]_{\omega_0}^{-1} = c \left[ n(\omega_0) + \omega_0 \left( \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right]^{-1}. \quad (4.15)$$

Для плазмы, например,  $n^2 = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  и  $v_{gp} = cn$ . Поскольку  $v_\phi = c / n$ , то  $v_{gp} v_\phi = c^2$ .

В области аномальной дисперсии (где имеется сильное поглощение)  $dn / d\omega < 0$ , и при  $n(\omega_0) + \omega_0 (dn / d\omega)_{\omega_0} < 1$  формально реализуется случай  $v_{gp} > c$ . Групповая скорость может быть также отрицательной, т.е. направления волнового вектора и групповой скорости могут быть противоположны.

Однако область частот, в которой дисперсия аномальна, всегда совпадает с областью сильного поглощения, понятие же групповой скорости (4.12) введено для среды, в которой диссипативные

процессы можно не учитывать (по крайней мере в той области длин волны, которая играет существенную роль в спектре сигнала).

Пакет распространяется без искажений только в первом приближении. Если же учесть отброшенный квадратичный член, то происходит его искажение, которое накапливается с расстоянием и может стать существенным. Изменяются как амплитуда, так и длительность импульса. Это определяет максимальную скорость передачи информации. Если два входных импульса будут отставать друг от друга на малое время  $T$ , то на выходе линии передачи они перекроются.

Мы рассмотрели распространение волновых пакетов или сигналов в диспергирующих средах. Если дисперсия в среде нормальная и не слишком велика, и диссипация энергии также мала, то сигнал может пройти в среде достаточно большое расстояние, существенно не расплываясь. В этом случае скорость распространения энергии, которую несет сигнал, равна групповой скорости. Если же условия, сформулированные выше, не выполняются, то групповая скорость не соответствует скорости распространения энергии.

Строгое решение задачи о скорости распространения сигнала для электромагнитного импульса в любой диспергирующей среде было получено Зоммерфельдом и Бриллюэном в 1914 г. и затем развито Бриллюэном в последующих работах. Исследование было проведено для сигнала с крутым передним фронтом, который представлял собой цуг колебаний, начинающихся в некоторый момент  $t_0$ . Мы приведем здесь лишь выводы, которые можно сделать из этих исследований.

Оказывается, что передний фронт сигнала всегда распространяется со скоростью электромагнитных волн в вакууме  $c$ . Этот результат физически понятен. Дисперсионные свойства различных сред объясняются вынужденными движениями зарядов среды. В начале возмущения (когда сигнал появляется на «входе» среды) электроны среды в силу инерции не имеют упорядоченного движения, и среда «оптически пуста», как вакуум, показатель преломления  $n = 1$ , а скорость распространения равна  $c$ . На спектральном языке этот результат можно пояснить следующим образом: в спектральном разложении сигнала конечной длительности присутствуют сколь угодно высокие частоты, для

которых  $n \rightarrow 1$ ,  $v_{gp} \approx v_{gf} \approx c$ . Однако удельный вес этих частот в спектре квазимонохроматического сигнала ничтожно мал. Поэтому передняя часть сигнала, так называемый «первый предвестник», имеет ничтожно малую амплитуду и высокую частоту. После прибытия первого предвестника происходят процессы установления сигнала.

Основной интерес имеет та часть сигнала, где его интенсивность значительна («основная часть» или «тело» сигнала). Скорость, с которой прибывает эта основная часть сигнала, всегда меньше  $c$ .

Таким образом, физический процесс распространения сигнала в среде может быть описан следующим образом (рис. б).

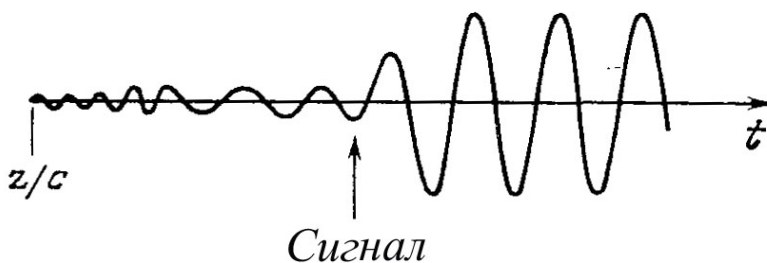


Рис. б. К установлению переднего фронта сигнала в диспергирующей среде.

До момента  $t < z/c$  все находится в покое: даже если фазовая скорость волны больше  $c$ , никакая волна не достигает точки  $z$  раньше, чем по истечении времени  $t = z/c$ . При  $t = z/c$  приходит первый «предвестник», однако амплитуда его при  $t = z/c$  равна нулю. Амплитуда первого предвестника с ростом  $t$  растет, частота колебаний велика по сравнению с частотой волны. При дальнейшем увеличении  $t$  амплитуда первого предвестника уменьшается и падает до нуля. За первым предвестником следует второй и т.д. Свойства второго предвестника подобны свойствам первого предвестника. Период второго предвестника сначала велик, потом убывает, амплитуда меняется примерно как у первого предвестника. Характер процессов установления и формы предвестников зависят от закона дисперсии в среде. Прибытие основной или главной части сигнала характеризуется ростом амплитуды. Эта главная часть распространяется со скоростью сигнала  $v_c$ . Простое выражение для



нее не может быть дано, ее определение произвольно и связано с методом вычисления, хотя физический смысл очевиден. Это та часть сигнала, прибытие которой сможет зарегистрировать прибор. Следует отметить, что по мере увеличения чувствительности прибора скорость, полученная из измерений, все ближе будет приближаться к скорости  $c$ . Однако предел наступит раньше, он связан с наличием флуктуационных шумов на входе измерительного прибора. В области слабой дисперсии скорость сигнала совпадает с групповой скоростью. Таким образом, скорость фронта сигнала всегда равна  $c$ . Фазовая скорость – скорость перемещения фазы в установившейся части сигнала. Она может быть и больше  $c$ . Групповая скорость отлична от фазовой только в диспергирующих средах. В области нормальной дисперсии групповая скорость меньше фазовой скорости. Относительно наблюдателя, движущегося вместе с огибающей сигнала при  $v_{\phi} > v_{gp}$ , синусоида высокочастотного заполнения будет двигаться вперед, при этом передние гребни синусоиды будут исчезать, доходя до передней границы сигнала, а задние гребни – возникать в хвосте сигнала.

### ***Контрольные вопросы и задания***

1. Назовите физические причины, приводящие к появлению дисперсии.
2. Какие виды дисперсии вы знаете?
3. Что такое модулированная волна? Цели модуляции.
4. Дайте определение волновому пакету.
5. Какие сложности возникают при распространении в диспергирующей среде волнового пакета?
6. Как связаны фазовая и групповая скорости при распространении в диспергирующей среде волнового пакета?

## 5. Электромагнитные волны в плазме и анизотропных средах

### *Распространение электромагнитных волн в плазме*

Дисперсия при распространении электромагнитных волн может проявляться двояким образом – как частотная (за счет зависимости  $\varepsilon, \mu, \sigma$  от частоты) и как пространственная (за счет зависимости этих же параметров от волнового вектора  $\mathbf{k}$ ). Частотная дисперсия существенна, если частота электромагнитных волн близка к собственным частотам колебаний в среде. Пространственная же дисперсия становится заметной, когда длина волны сравнима с некоторыми характерными размерами.

Для электромагнитных волн в большинстве случаев, даже в оптическом диапазоне, характерный размер  $a \ll \lambda$  (где  $\lambda$  — длина волны в среде:  $\lambda = \lambda_0 / n$ ) и пространственной дисперсией можно пренебречь. Однако в магнитоактивной плазме существуют области резонанса, в которых  $n \rightarrow \infty$  и параметр  $a/\lambda$  становится значительным уже в радиодиапазоне. Кроме того, при полном пренебрежении величинами, содержащими малое отношение  $a/\lambda$ , не учитываются некоторые явления, возникающие при распространении электромагнитных волн в различных средах. Так, учет пространственной дисперсии в плазме позволяет объяснить появление бегущих плазменных волн. Пространственная дисперсия является главной причиной (а не поправкой), вызывающей появление естественной оптической активности, оптической анизотропии кубических кристаллов. Если не интересоваться этими специальными случаями, то при рассмотрении частотной дисперсии пространственной дисперсией можно пренебречь.

При учете только частотной дисперсии диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon(\omega)$  для волны с частотой  $\omega$  записывается в следующем виде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (5.1)$$

где  $\chi(\tau)$  – действительная величина. Из (5.1) следует, что функция  $\varepsilon(\omega)$  является комплексной:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \quad (5.2)$$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega), \quad \varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega), \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega), \quad (5.3)$$

т. е.  $\varepsilon'(\omega)$  является четной, а  $\varepsilon''(\omega)$  – нечетной функцией. Все сказанное справедливо также для  $\sigma(\omega)$ :

$$\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega). \quad (5.4)$$

Если в недиспергирующей среде диэлектрическая проницаемость есть чисто реактивный параметр, а проводимость – чисто активный, то в среде с дисперсией это различие утрачивается. С увеличением частоты до значений, близких к собственным частотам среды, отличие в свойствах диэлектриков и проводников постепенно исчезает. Так, наличие у среды мнимой части диэлектрической проницаемости с макроскопической точки зрения неотлично от существования проводимости – и то, и другое приводит к выделению тепла. Поэтому электрические свойства вещества можно характеризовать одной величиной – комплексной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon^k = \varepsilon + i4\pi\sigma / \omega, \quad (5.5)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon' - 4\pi\sigma'' / \omega$ ,  $\sigma = \sigma' + \omega\varepsilon'' / 4\pi$ .

Можно установить предельный вид диэлектрической проницаемости  $\varepsilon^k(\omega)$  при больших частотах, справедливый для любой материальной среды. В пределе при  $\omega \rightarrow \infty$  имеем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \chi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\chi(0)}{i\omega} = 0,$$

и диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon^k(\omega)$ , определяемая выражениями (5.5), (5.1), стремится к единице при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Это же свойство диэлектрической проницаемости следует и из простого физического рассмотрения. При  $\omega \rightarrow \infty$ , когда частота волны велика по сравнению с собственными частотами колебаний электронов в атомах вещества, электроны можно считать свободными. Уравнение движения свободного электрона под

действием гармонического поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$  и решение этого уравнения имеют вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2}.$$

Здесь  $m, e$  – масса и заряд электрона. Мы не учитываем силу, действующую на заряд со стороны магнитного поля, так как рассматривается нерелятивистский случай ( $|\dot{\mathbf{r}}| \ll c$ ). Поляризация среды (дипольный момент единицы объема, содержащей  $N$  электронов) равна

$$\mathbf{P} = \sum e\mathbf{r} = -\frac{e^2 N}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

Отсюда  $\mathbf{D} = (1 - 4\pi N e^2 / m\omega^2) \mathbf{E}$  и

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}. \quad (5.6)$$

При  $\omega \rightarrow \infty$  мы получаем из (5.6) прежний результат:  $\varepsilon \rightarrow 1$  и  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$ . Область применимости формулы (5.6) для сред, в которых нет свободных электронов, лежит в диапазоне далекого ультрафиолета для самых легких элементов.

С учетом (5.6) уравнения Максвелла для комплексных амплитуд примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i \frac{\omega}{c} \varepsilon^k \mathbf{E}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \\ \operatorname{div}(\varepsilon^k \mathbf{E}) &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поясним вывод уравнения  $\operatorname{div}(\varepsilon^k \mathbf{E}) = 0$ . Из уравнения непрерывности при гармонической зависимости от времени следует

$$4\pi\rho = -i \frac{4\pi}{\omega} \operatorname{div}(\sigma \mathbf{E}).$$

Подставляя это соотношение в уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ , запишем его в форме

$$\operatorname{div} \left[ \left( \varepsilon + i \frac{4\pi}{\omega} \right) \mathbf{E} \right] = 0.$$

Учитывая определение  $\varepsilon^\kappa$ , получим уравнение  $\operatorname{div}(\varepsilon^\kappa \mathbf{E}) = 0$ .

Таким образом, для высокочастотных монохроматических полей вместо диэлектрической проницаемости и проводимости удобно ввести комплексную диэлектрическую проницаемость, объединяющую оба эти понятия. Физически это означает, что ток в среде для высокочастотных полей нецелесообразно рассматривать как сумму тока проводимости и тока смещения. Вместо этого вводится полный ток

$$\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t, \quad (5.8)$$

где  $\mathbf{P}$  – комплексный вектор поляризации среды.

### *Диэлектрическая проницаемость плазмы*

Плазма – это сильно или полностью ионизованный газ. Плазмой также называют слабо ионизованный газ и электронный газ (или электронную жидкость) в полупроводниках и металлах. Однако в дальнейшем главным образом будет идти речь о газовой плазме. Именно с такой плазмой придется сталкиваться при рассмотрении волновых процессов в земной ионосфере и в космическом пространстве. Для выяснения особенностей распространения волн в плазме необходимо найти зависимость ее диэлектрической проницаемости от частоты.

Мы рассмотрим наиболее простую модель, дающую достаточно хорошее согласие с экспериментом. Будем считать среду квазинейтральной и пренебрежем тепловым движением частиц. При этом в поле волны будет происходить лишь упорядоченное движение.

Пусть в единице объема среды содержится  $N$  свободных электронов и такое же количество однократно заряженных положительных ионов. Поскольку масса иона  $M$  во много раз больше массы электрона  $m$ , то в первом приближении движением ионов можно пренебречь. Неподвижные ионы образуют

положительный заряд, а электроны свободно движутся под действием поля волны, испытывая при этом соударения.

Уравнение движения для электрона имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}. \quad (5.9)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – среднее макроскопическое поле; в отличие от диэлектриков, при изучении плазмы можно считать, что действующее поле примерно равно макроскопическому:  $\mathbf{E}_d \approx \mathbf{E}$ ;  $\nu$  – это эффективная частота соударений электронов с ионами и нейтральными молекулами.

При гармонической зависимости поля от времени  $E \sim \exp(-i\omega t)$  имеем

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{e\mathbf{E}}{m(\nu - i\omega)}.$$

Поскольку плотность тока равна  $\mathbf{j} = eN\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathbf{P} / \partial t = -i\omega\mathbf{P}$ , нетрудно получить

$$\mathbf{P} = i \frac{e^2 N \mathbf{E}}{m\omega(\nu - i\omega)}. \quad (5.10)$$

Если учесть также смещение ионов в поле волны, то в выражение для поляризации войдет еще один член:

$$\mathbf{P} = i \frac{e^2}{\omega} \left[ \frac{1}{m(\nu - i\omega)} + \frac{1}{M(\nu - i\omega)} \right] N \mathbf{E}.$$

Однако вклад от ионов в поляризацию среды является лишь малой поправкой порядка  $m/M \sim 10^{-3}$  и его можно не учитывать. Поэтому

$$\varepsilon = 1 + i \frac{\omega_p^2}{\omega(\nu - i\omega)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} + i \frac{\omega_p^2(\nu / \omega)}{\omega^2 + \nu^2}, \quad (5.11)$$

где  $\omega_p^2 = 4\pi N e^2 / m$  – плазменная, или ленгмюровская, частота колебаний электронного газа.

Как мы уже знаем, мнимая часть диэлектрической проницаемости эквивалентна проводимости среды. Поэтому

$$\sigma = \frac{\omega}{4\pi} \varepsilon'' = \frac{\nu N e^2}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (5.12)$$

Для металлов при частотах волны  $\omega \leq 10^{10} \text{ c}^{-1}$  реализуются соотношения  $\omega_p \gg \nu$ ,  $\nu \gg \omega$ ; проводимость является действительной величиной:  $\sigma = Ne^2 / m\nu$ , не зависящей от частоты, а диэлектрическая проницаемость – мнимой.

Например, для меди  $N \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $\nu \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$  и  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ c}^{-1}$  (или  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$ ) для всей области частот вплоть до инфракрасной области спектра. В этом диапазоне частот показатель преломления и показатель поглощения примерно равны  $m = \chi = [\omega_p^2 / 2\omega\nu]^{1/2}$ . Поле существует только в скин-слое, толщина которого  $d = (kn)^{-1} \ll \lambda$ . Коэффициент отражения от поверхности металла близок к единице.

При более высоких частотах диэлектрическая проницаемость комплексна и существенным образом зависит от частоты. При  $\omega^2 > \omega_p^2$  металл становится прозрачным.

В разреженной плазме (например, в ионосфере) эффективная частота соударений  $\nu \sim 10^3 - 10^4 \text{ c}^{-1}$  и для волн с частотой  $f > 10^6 \text{ c}^{-1}$  выполняется условие  $\omega \gg \nu$ . В этом случае мнимой частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь и

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = n^2.$$

Закон дисперсии определяется соотношением (рис. 7)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),$$

или

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2. \quad (5.13)$$

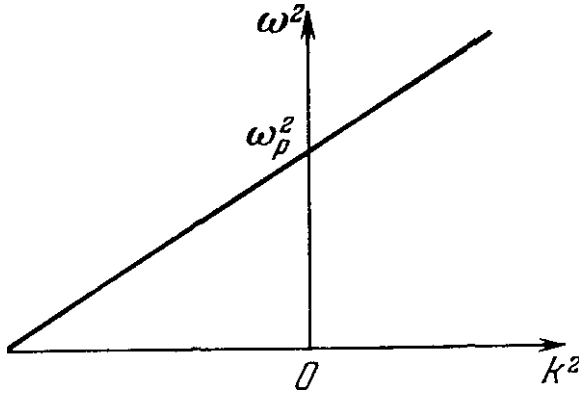


Рис. 7. Дисперсионная кривая для плазмы

Если  $\omega > \omega_p$ , то показатель преломления есть действительное число, и волны свободно распространяются в среде. Если  $\omega = \omega_p$ , то  $n = 0$ . При  $\omega < \omega_p$  показатель преломления становится мнимым, следовательно, волны при  $\omega \leq \omega_p$  должны отражаться от границы плазмы. Поскольку в ионосфере электронная концентрация является функцией высоты, возрастая от нуля в начале ионосферы до некоторого максимального значения, а затем снова убывая, имеется целая область частот для волн, отражающихся от ионосферы. Частота  $f_{кр}$ , равная максимальной плазменной частоте, называется критической:

$$f_{кр}^2 = \frac{e^2 N_{\max}}{\pi m}. \quad (5.14)$$

Заметим, что показатель преломления может обратиться в нуль или стать чисто мнимой величиной только в среде, в которой поглощение энергии пренебрежимо мало. В ионосферной плазме эти условия реализуются в широком диапазоне частот.

Для частоты, при которой  $\varepsilon = 0$ ,  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = 0$ , как следует из уравнений Максвелла,

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0,$$



т.е.  $\mathbf{H} = 0$ , и поле описывается лишь одним уравнением:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ или } \mathbf{E} = \text{grad } \varphi .$$

Следовательно, в этом случае возможно существование продольных электрических или плазменных волн. Однако, если не учитывать пространственную дисперсию, то дисперсионное уравнение  $\varepsilon(\omega) = 0$  определяет лишь одну частоту

$$\omega_p = \sqrt{4\pi N e^2 / m}$$

и мы получаем не волновой, а колебательный процесс. При учете пространственной дисперсии частота становится функцией волнового вектора, и групповая скорость продольных волн отлична от нуля. Пространственная дисперсия не существенна в том случае, когда поле мало изменяется на расстоянии, на котором в среде формируется отклик среды на поле  $\mathbf{E}$ , т.е. поляризация среды. Если учитывать тепловое движение в плазме, то за время  $\tau = 2\pi / \omega$  электрон, движущийся со средней тепловой скоростью  $\tilde{v} = \sqrt{k_B T / m}$ , проходит расстояние  $l = \tau \sqrt{k_B T / m}$ .

Пространственной дисперсией можно пренебречь, если  $l \ll \lambda$  или

$$\omega \gg k\tilde{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{k_B T}{m}} .$$

Поскольку  $v_\phi = \omega / k$ , то это условие эквивалентно требованию

$$v_\phi \gg \tilde{v} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{m}} . \quad (5.15)$$

Таким образом, пренебрежение пространственной дисперсией в плазме эквивалентно неучету теплового движения частиц (приближение «холодной» плазмы).

Рассмотрим поглощение волн в плазме, обусловленное столкновениями электронов с молекулами и ионами. При этом необходимо различать два случая: поглощение при прохождении волны через слой плазмы (когда можно считать, что  $\omega > \omega_p$ ) и поглощение при отражении волны от слоя (когда  $\omega \approx \omega_p$ ).

В первом случае, полагая в формуле (5.11)  $v^2 \ll \omega^2$ ,  $\omega > \omega_p$ , получим

$$\varepsilon' \approx 1, \quad \varepsilon'' = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{v}{\omega}, \quad \text{tg } \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \ll 1.$$

Показатель поглощения определяется формулой

$$\chi = \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{2} \text{tg } \delta = \frac{\omega_p^2 v}{2\omega^3}.$$

Коэффициент поглощения при этом равен

$$k'' = \frac{\omega}{c} \chi = \frac{\omega_p^2 v}{2c\omega^2}. \quad (5.16)$$

Как видно из формулы (5.16), более длинные волны сильнее поглощаются в ионосфере. Отсюда ясно, почему частотный диапазон волн, используемых в радиосвязи на большие расстояния в земных условиях, ограничен как сверху (частота должна быть ниже критической, иначе волна не отразится от ионосферы), так и снизу (вследствие увеличения поглощения с ростом длины волны).

Во втором случае, полагая в (5.11)  $v^2 \ll \omega^2$ ,  $\omega = \omega_p$ , получим

$$\varepsilon' \approx 0, \quad \text{tg } \delta \gg 1, \quad \varepsilon'' \approx v / \omega, \\ k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon'}{2}} \text{tg } \delta \approx \frac{\sqrt{\omega v}}{c\sqrt{2}}. \quad (5.17)$$

В области частот, которые могут отражаться от ионосферы, поглощение увеличивается с ростом частоты, но зависимость от  $\omega$  здесь более слабая. Кроме того, путь, проходимый волной на участке ее отражения, гораздо меньше длины остальных участков трассы. Поэтому определяющую роль играет поглощение при прохождении волн через ионизированный слой на таких высотах от земной поверхности, где отражения не происходит.

### ***Распространение электромагнитных волн в***

## *анизотропных средах*

Анизотропная среда – это среда, физические свойства которой зависят от направления. Анизотропная среда называется однородной, если зависимость ее свойств от направления в различных точках одинакова. Среда может быть изотропной в отношении каких-либо одних физических свойств и анизотропной в отношении других.

Например, при изучении распространения света в кристаллах (т.е. в задачах кристаллооптики) можно в большинстве случаев считать среду магнитно-изотропной, но электрически анизотропной. При этом вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$ , вообще говоря, не будут параллельны. Связь между ними осуществляется посредством тензорной величины – диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}$ . Если поместить точечный источник в оптически однородную изотропную среду, то фронт волны, создаваемой таким источником, будет иметь сферическую форму. Форма же волнового фронта в анизотропной среде отлична от сферической и бывает весьма сложной.

Анизотропия может быть связана со структурой среды (как, например, в кристаллах) или может создаваться наложением внешних полей – магнитного, электрического, поля упругих деформаций и т.д.

Особенности распространения электромагнитных волн в анизотропной среде (как и в любой другой материальной среде) определяются специфической формой материальных уравнений. В случае анизотропных сред эти уравнения для гармонических во времени полей имеют вид

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \mathbf{r}), \quad B_i(\omega, \mathbf{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \mathbf{r}).$$

Обычно свойства сред таковы, что тензором является либо  $\hat{\varepsilon}(\omega)$ , либо  $\hat{\mu}(\omega)$ ; одну из величин при этом можно считать скалярной. Поэтому материальные уравнения для анизотропной среды записываются в виде

$$D_i(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}(\omega) E_j(\omega, \mathbf{r}), \quad \mathbf{B}(\omega, \mathbf{r}) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}),$$

где  $\varepsilon_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} \chi_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ , а  $\mu(\omega)$  – скаляр, или в виде

$$B_i(\omega, \mathbf{r}) = \mu_{ij}(\omega) H_j(\omega, \mathbf{r}), \quad \mathbf{D}(\omega, \mathbf{r}) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}),$$

где  $\mu_{ij}(\omega) = \delta_{ij} + 4\pi \int_0^{\infty} K_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau$ , а  $\varepsilon(\omega)$  – скаляр. Особенности

распространения волн в различных анизотропных средах определяются структурой тензоров  $\mu_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , а также зависимостью компонент этих тензоров от частоты.

### ***Контрольные вопросы и задания***

1. Какие особенности возникают при распространении электромагнитных волн в плазме? Где на практике встречаются такие случаи?
2. Как выглядит выражение для диэлектрической проницаемости в случае распространения электромагнитных волн в плазме?
3. Найдите зависимость диэлектрической проницаемости плазмы от частоты электромагнитной волны.
4. Рассмотрите явление поглощения электромагнитных волн в плазме.
5. Как происходит распространение электромагнитных волн в анизотропных средах? Как изменяется при этом вид материальных уравнений?

## Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М, Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.
3. Тамм И.Е. Основы электричества. – М: Наука, 1966.
4. Крауфорд Ф. Берклеевский курс физики. Т. 3. Волны.— М.: Наука, 1976.
5. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 4. Оптика, волны. – М.: Наука. Физматгиз, 1998.
7. Иродов И.Е. Волновые процессы. Основные законы. – М.; СПб.: Физматгиз, 1999.
8. Кравченко И.Т. Теория волновых процессов. – М.: Изд-во УРСС, 2003.
9. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. – М.: Физматгиз, 2003.
10. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1992.