

УДК 517.9+531

СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*П.Н. Иваньшин***Аннотация**

В статье предложен сплайн-интерполяционный метод решения статических и динамических задач теории упругости. Метод позволяет решать задачи для класса тел с односвязными сечениями плоскостями, параллельными XOY . Решение пространственных и динамических задач сведено к решению серии краевых задач на плоскости. Построены рекурсивные формулы для определения коэффициентов сплайнов. Доказана сходимость построенных сплайн-интерполяционных решений к точным.

Ключевые слова: сплайн-интерполяция, теория упругости, динамическая задача, полигармонические функции.

Введение

В статье рассмотрены динамические уравнения теории упругости

$$\vec{a}_{tt} - \mu \Delta \vec{a} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{a} = 0, \quad (1)$$

где $\vec{a} = (u(t, h, x, y), v(t, h, x, y), w(t, h, x, y))$ – вектор смещений. В статическом случае эти уравнения превращаются в уравнения равновесия

$$-\mu \Delta \vec{a} - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{a} = 0. \quad (2)$$

Уравнениям (2) соответствуют краевые задачи определения смещений и (или) напряжений внутри тела по заданным на границе тела смещениям или напряжениям. В нестационарном случае к краевым условиям добавляются еще и начальные.

Доказательства существования и единственности решений подобных задач приведены, например, в работах Н.И. Мусхелишвили [1]. Значительным вкладом Г.В. Колосова и Н.И. Мусхелишвили в теорию решения плоских задач явилось введение методов аналитических функций комплексного переменного, что позволило получить точные решения задач для определенных классов областей [1, 2]. В статье [3] метод Колосова – Мусхелишвили переносится на построение интерполяционного решения плоской динамической задачи. В настоящей статье снова с использованием методов комплексного анализа построены сплайн-интерполяционное решение динамической задачи как для двумерного, так и для трехмерного случаев.

Например, сплайн-интерполяционное решение в стационарном трехмерном случае представляет собой набор решений уравнений равновесия для последовательных слоев тела, расположенных параллельно плоскости XOY . На общем торце решения «склеиваются» в смысле близости в пространстве $L_2(D)$ первых производных по третьей пространственной переменной H , здесь D – проекция тела на плоскость XOY . Полученные решения удовлетворяют заданным краевым смещениям на кромке общего торца и приближают граничные смещения в других точках

граничной поверхности. Близость граничных условий зависит от толщины слоя и от степени сплайна по третьей координате. Решения соответствующих краевых задач для аналитических функций на общих торцах строятся по одной схеме, что важно с точки зрения программной реализации.

Двумерная динамическая задача строится по той же схеме, только роль третьей координаты играет время. Трехмерная динамическая задача представляет собой набор решений, каждое из которых – функция, полиномиальная по времени и по третьей координате. Здесь схема построения решения также единообразна, что опять облегчает программную реализацию. Во всех случаях доказывается сходимость метода по норме L_2 .

Заметим, что предложенное сплайн-интерполяционное решение алгоритмизируемо. Оно отличается от решения стандартным методом конечных элементов, например, тем, что сплайн-интерполяционное решение дифференцируемо всюду в слое, что позволяет получать более точные значения напряжений во внутренних точках упругого тела.

При помощи вспомогательного приближенного конформного отображения можно построить сплайн-интерполяционное решение двумерной задачи для произвольной односвязной области. Соответственно, такое решение можно применить и для случая трехмерного тела, и для решения динамической задачи.

Предлагаемые сплайн-интерполяционные решения могут быть предложены в качестве описания свойств деталей, напечатанных на 3D-принтере, поскольку печать деталей на таких принтерах производится послойно, что соответствует схеме построения приближенного решения в настоящей работе.

1. Сплайн-интерполяционное решение плоской динамической задачи теории упругости

Рассмотрим уравнения плоской динамической задачи теории упругости при отсутствии объемных сил

$$u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)(u_x + v_y)_x = 0, \quad v_{tt} - \mu \Delta v - (\lambda + \mu)(u_x + v_y)_y = 0 \quad (3)$$

для $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $t \in (0, T]$. Здесь D – односвязная область с гладкой границей.

Начальные условия для классической постановки задачи плоской динамической теории упругости можно задать в виде $u(0, x, y) = U_0(x, y)$, $v(0, x, y) = V_0(x, y)$, $u_t(0, x, y) = U_{00}(x, y)$, $v_t(0, x, y) = V_{00}(x, y)$, $(x, y) \in D$. Краевые условия обычно имеют вид $u(t, x(s), y(s)) = U(t, s)$, $v(t, x(s), y(s)) = V(t, s)$, где s – длина дуги, $s \in [0, \tilde{S}]$, \tilde{S} – длина границы ∂D области D , $t \in [0, T]$.

Рассмотрим модифицированную задачу. Будем считать, что краевые условия заданы только для дискретного множества моментов времени t_k , $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$, то есть краевые условия имеют вид

$$u(t_k, x(s), y(s)) = U_k(s), \quad v(t_k, x(s), y(s)) = V_k(s), \quad s \in [0, \tilde{S}], \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

Считаем, что все заданные функции гельдеровы на $[0, \tilde{S}]$.

Далее полагаем, что функции U_0 , V_0 , U_{00} , V_{00} являются $(n+1)$ -гармоничными и H_n -регулярными в D . Напомним, что $f(x, y)$ называется $(n+1)$ -гармоничной, если $\Delta^{n+1} f = 0$, и H_n -регулярной, если предельные значения первых n производных этой функции на ∂D удовлетворяют условию Гельдера [8]. Условие полигармоничности естественно, поскольку по теореме Стоуна – Вейерштрасса множество полиномов по x, y плотно в $C(D)$, а каждый полином – полигармоническая функция.

Будем строить решение уравнения (3) для каждого временного интервала $t \in [t_{j-1}, t_j]$ и склеивать решения, найденные для соседних интервалов, в области D при общем значении временного параметра, а также приближать начальные условия.

Для введения комплексной структуры умножим второе уравнение системы (3) на i и сложим его с первым. В терминах комплексного переменного система (3) запишется в виде

$$(u + iv)_{tt} - 4\mu(u + iv)_{z\bar{z}} - 4(\lambda + \mu)(\operatorname{Re}((u + iv)_z))_{\bar{z}} = 0. \quad (4)$$

где $u + iv = (u + iv)(z, \bar{z})$, $z \in D$. Таким образом, решение системы уравнений (3) сведено к поиску функции $(u + iv)(z, \bar{z})$, удовлетворяющей уравнению (4).

Будем искать решение уравнения (4) в виде полинома по t :

$$u(t, z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^N t^j u_j(z, \bar{z}), \quad v(t, z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^N t^j v_j(z, \bar{z}), \quad z \in D.$$

Подставим это выражение в систему (4).

Сравнивая коэффициенты при степенях t , получим для старших коэффициентов данного представления уравнение

$$\mu(u_N + iv_N)_{z\bar{z}} + (\lambda + \mu)(\operatorname{Re}((u_N + iv_N)_z))_{\bar{z}} = 0. \quad (5)$$

Интегрируя обе части (5) по \bar{z} , а затем по z , получим

$$u_N(z, \bar{z}) + iv_N(z, \bar{z}) = \int \left[\frac{\operatorname{Re}(q_N)}{\lambda + 2\mu} + i \frac{\operatorname{Im}(q_N)}{\mu} \right] dz + \overline{p_N(z)}.$$

Здесь $p_N(z)$, $q_N(z)$ – две произвольные аналитические в D функции.

Для $j = N - 1$ имеем подобную формулу:

$$u_{N-1}(z, \bar{z}) + iv_{N-1}(z, \bar{z}) = \int \left[\frac{\operatorname{Re}(q_{N-1}(z))}{2\lambda + 4\mu} + i \frac{\operatorname{Im}(q_{N-1}(z))}{2\mu} \right] dz + \overline{p_{N-1}(z)},$$

где $p_{N-1}(z)$, $q_{N-1}(z)$ – две произвольные аналитические в D функции.

Последовательно сравнивая коэффициенты при всех степенях t в (4) для всех значений $k = N - 2, \dots, 0$ по убыванию, получим рекуррентную формулу

$$u_k(z, \bar{z}) + iv_k(z, \bar{z}) = \int \left[\frac{-\operatorname{Re}(q_k(z) - (k+2)(k+1) \int (u_{k+2}(z, \bar{z}) + iv_{k+2}(z, \bar{z})) d\bar{z})}{4\lambda + 8\mu} + \right. \\ \left. + i \frac{\operatorname{Im}((k+2)(k+1) \int (u_{k+2}(z, \bar{z}) + iv_{k+2}(z, \bar{z})) d\bar{z} - q_k(z))}{4\mu} \right] dz + \overline{p_k(z)}. \quad (6)$$

Здесь снова $p_k(z)$ и $q_k(z)$ – произвольные аналитические в области D функции.

Заметим, что $u_N(z, \bar{z}) + iv_N(z, \bar{z})$, $u_{N-1}(z, \bar{z}) + iv_{N-1}(z, \bar{z})$ – бигармонические функции, а каждое применение рекуррентной формулы увеличивает гармоничность на 1. При этом мы имеем дело с двумя независимыми друг от друга наборами коэффициентов при t^j , а именно с коэффициентами при четных и нечетных степенях.

Все произвольные аналитические функции, содержащиеся в этих коэффициентах, найдем, исходя из следующих условий: 1) компоненты вектора смещений приближенного решения удовлетворяют граничным условиям; 2) компоненты первой

производной по времени вектора смещений приближенного решения оптимально аппроксимируют в норме L_2 начальные условия на первую производную смещений по времени.

Решение модифицированной задачи является сплайном, склеивающимся из решений задачи в каждый промежуток времени $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, \dots, m$. Решение уравнения в каждом временном отрезке будем называть элементом сплайна.

В качестве примера построим линейный элемент сплайна для единичного круга D на временном отрезке $t \in [0, 1]$ с краевыми условиями

$$(u+iv)(0, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = U_0(\theta) + iV_0(\theta), \quad (u+iv)(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = U_1(\theta) + iV_1(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Согласно полученным ранее формулам для коэффициентов $u + iv$ имеем

$$(u+iv)(t, z, \bar{z}) = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \int q_0(z) dz - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \overline{zq_0(z) + p_0(z)} + \\ + t \left(\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \int q_1(z) dz - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \overline{zq_1(z) + p_1(z)} \right).$$

Тогда краевые условия на S для определения аналитических функций $q_0(z)$ и $p_0(z)$ имеют вид

$$\left[\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \int q_0(z) dz - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \overline{zq_0(z) + p_0(z)} \right]_{z=e^{i\theta}} = U_0(\theta) + iV_0(\theta).$$

Для определения $q_1(z)$ и $p_1(z)$ получим

$$\left[\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \int q_1(z) dz - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \overline{zq_1(z) + p_1(z)} \right]_{z=e^{i\theta}} = \\ = U_1(\theta) - U_0(\theta) + i(V_1(\theta) - V_0(\theta)).$$

Задача восстановления функций $p_j(z)$, $q_j(z)$, $j = 0, 1$, имеет точное решение [1].

Для некруговой области D потребуется вспомогательное отображение $z(\zeta)$, переводящее единичный круг на область D . Краевое условие для аналитических функций примет следующий вид:

$$\left[\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} Q(\zeta) - \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} z(\zeta) \frac{\overline{Q'(\zeta)}}{z'(\zeta)} + \overline{P(\zeta)} \right]_{\zeta=e^{i\theta}} = F(s(\theta)).$$

Здесь $s = s(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, – зависимость между длиной дуги границы области и длиной дуги единичной окружности θ , $Q(\zeta) = \int q(z(\zeta)) dz(\zeta)$, $P(\zeta) = p(z(\zeta))$.

Гельдеровость краевых условий на $[0, \tilde{S}]$ влечет гильдеровость функции $F(s(\theta))$ [9], что позволяет для решения краевой задачи применять интеграл типа Коши. Если $z(\zeta)$ – дробно-рациональная функция, то соответствующая краевая задача для аналитических функций имеет точное решение [1, 6].

В дальнейшем мы будем считать область D единичным кругом и пользоваться вспомогательным конформным отображением в общем случае.

1.1. Подклейка очередного элемента сплайна. Рассмотрим естественный вопрос о склейке элементов для соседних временных интервалов.

При построении очередного элемента сплайна $(u^j + iv^j)(t, z, \bar{z})$ для временного отрезка $[t_j, t_{j+1}]$ мы требуем, чтобы этот элемент удовлетворял равенству

$(u^j + iv^j)(t_j, z, \bar{z}) = (u^{j-1} + iv^{j-1})(t_j, z, \bar{z})$; кроме того, этот же элемент должен приближать значение $(u^j + iv^j)_t(t_j, z, \bar{z})$ к $(u^{j-1} + iv^{j-1})_t(t_j, z, \bar{z})$, $z \in D$, и одновременно удовлетворяем граничному условию $(u^j + iv^j)(t_{j+1}, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = U_{j+1}(\theta) + iV_{j+1}(\theta)$.

Поскольку каждый элемент сплайна содержит две независимых системы коэффициентов при четных и нечетных степенях t , за счет выбора «четных» и «нечетных» коэффициентов мы удовлетворим условию $(u^j + iv^j)(t_j, z, \bar{z}) = (u^{j-1} + iv^{j-1})(t_j, z, \bar{z})$, а за счет «нечетных» коэффициентов приблизим значение $(u^j + iv^j)_t(t_j, z, \bar{z})$ к $(u^{j-1} + iv^{j-1})_t(t_j, z, \bar{z})$, $z \in D$ и удовлетворим граничному условию $(u^j + iv^j)(t_{j+1}, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = U_{j+1}(\theta) + iV_{j+1}(\theta)$.

Каждый элемент сплайна можно представить в виде $(u^j + iv^j)(t, z, \bar{z}) = (u^{j,1} + iv^{j,1})(t, z, \bar{z}) + (u^{j,2} + iv^{j,2})(t, z, \bar{z})$, где $(u^{j,1} + iv^{j,1})(t, z, \bar{z})$ содержит только нечетные степени t , а $(u^{j,2} + iv^{j,2})(t, z, \bar{z})$ – только четные степени t . Согласно условиям склейки элементов сплайна и граничным условиям имеем $(u^{j,2} + iv^{j,2})(t_j, z, \bar{z}) = (u^{j-1} + iv^{j-1})(t_j, z, \bar{z})$, $(u^{j,1} + iv^{j,1})(t_{j+1}, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = U_{j+1}(\theta) + iV_{j+1}(\theta) - (u^{j,2} + iv^{j,2})(t_{j+1}, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ и $(u^{j,1} + iv^{j,1})(t_j, z, \bar{z})$ приближает $(u^{j-1} + iv^{j-1})_t(t_j, z, \bar{z}) - (u^{j,2} + iv^{j,2})(t_j, z, \bar{z})$.

Опишем эту процедуру на примере построения начального элемента сплайна $(u + iv)(t, z, \bar{z}) = (u^1 + iv^1)(t, z, \bar{z}) + (u^2 + iv^2)(t, z, \bar{z})$ на временном отрезке $[0, t_1]$.

1.1.1. Построение слагаемого $(u^2 + iv^2)(t, z, \bar{z})$ начального элемента сплайна. Для того чтобы удовлетворить условию $(u^2 + iv^2)(0, z, \bar{z}) = U_0(z, \bar{z}) + iV_0(z, \bar{z})$, рассмотрим представление $(u^2 + iv^2)(t, z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^n (u_j^2 + iv_j^2)(z, \bar{z})t^{2j}$. При

этом из рекуррентных соотношений (6) следует, что для $t = 0$ функция $(u^2 + iv^2)(0, z, \bar{z})$ – линейная комбинация функций вида $|z|^{2l}(f_l(z) - \kappa z f_l'(z) + g_l(z))$, $l = 0, \dots, n$, и функций, сопряженных к ним; здесь $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \neq \pm 1$, $f_l(z)$, $g_l(z)$ – произвольные аналитические функции в D . Докажем, что мы можем построить любую полигармоническую функцию с использованием таких линейных комбинаций.

Слагаемое $-|z|^{2l}\kappa z \overline{f_l'(z)}$, $l = 0, \dots, n$, формально отсутствует в каноническом представлении полигармонической функции при разложении по степеням $|z|^2$. Однако это слагаемое можно представить в виде $|z|^{2l}(-\kappa \overline{a_1 z}) + |z|^{2l+2} \overline{r_l(z)}$, где $r_l(z)$ – аналитическая функция, и потому каноническое представление в действительности имеет место.

В итоге получим функцию $(u^2 + iv^2)(0, z, \bar{z})$ в виде $\sum_{l=0}^n |z|^{2l}(F_l(z) + \overline{G_l(z)})$, где $F_l(z)$ и $G_l(z)$ – произвольные аналитические в D функции. Заданную $(n+1)$ -гармоническую функцию $U_0(z, \bar{z}) + iV_0(z, \bar{z})$ можно получить, подбирая соответствующие аналитические компоненты $F_l(z)$ и $G_l(z)$.

1.1.2. Построение слагаемого $(u^1 + iv^1)(t, z, \bar{z})$ начального элемента сплайна. В соответствии с начальным и граничным условиями имеем

$$(u^1 + iv^1)(t_1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = U_1(\theta) + iV_1(\theta) - (u^2 + iv^2)(t_1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\alpha_j + i\beta_j)e^{ij\theta},$$

и $(u_t^1 + iv_t^1)(0, z, \bar{z})$ должно приближать $U_{00}(x, y) + iV_{00}(x, y)$. Здесь $\sum_{j=-\infty}^{\infty} (\alpha_j + i\beta_j)e^{ij\theta}$ – заданный ряд Фурье. Предполагаем, что $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j + i\beta_j|^2 < +\infty$.

Для простоты считаем, что $U_{00}(x, y) + iV_{00}(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in D$. В противном случае сначала построим по методу, изложенному в предыдущем пункте, $(n+1)$ -гармоническую функцию $(\tilde{u} + i\tilde{v})(t, z, \bar{z})$, удовлетворяющую условию $(\tilde{u} + i\tilde{v}) \times \times (0, z, \bar{z}) = U_{00}(x, y) + iV_{00}(x, y)$, и рассмотрим разность $(u + iv)(t, z, \bar{z}) - \int (\tilde{u} + i\tilde{v})(t, z, \bar{z}) dt$.

Рассмотрим представление $(u^1 + iv^1)(t, z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^N (u_j^1 + iv_j^1)(z, \bar{z})t^{(2j+1)}$, где выбор числа N будет осуществлен позднее из соображений точности аппроксимации точного решения приближенным. Рекуррентные формулы для определения коэффициентов $(u_j^1 + iv_j^1)$ приводят к тому, что $(u^1 + iv^1)(t, z, \bar{z})$ является при фиксированном значении t $(N+1)$ -гармонической функцией, представляющей собой линейную комбинацию функций вида $|z|^{2k}(F_k(z) + \overline{G_k(z)})$, $k = 0, 1, \dots, N$, согласно доказанному в предыдущем параграфе.

Пусть $F_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_j^l z^l$, $\overline{G_j(z)} = \sum_{l=0}^{\infty} \overline{g_j^l} \bar{z}^l$. Из формулы (6) следует, что коэффициенты разложения функции $F_j(z) = \sum_{l=0}^{\infty} f_j^l z^l$, являющиеся элементами $u_j^1 + iv_j^1$, в коэффициенте $u_{j-1}^1 + iv_{j-1}^1$ перейдут в слагаемые вида

$$\frac{(\lambda + 3\mu)(j-2)(j-1)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \sum_{l=0}^{\infty} f_j^l z^{l+1} \bar{z} \quad \text{и} \quad - \frac{(\lambda + \mu)(j-2)(j-1)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \sum_{l=0}^{\infty} f_j^l \bar{z}^{l+1} z.$$

Аналогично функция $\overline{G_j(z)}$ порождает в коэффициенте $u_{j-1}^1 + iv_{j-1}^1$ слагаемые

$$\frac{(\lambda + 3\mu)(j-2)(j-1)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \sum_{l=0}^{\infty} \overline{g_j^l} \bar{z}^{l+1} z \quad \text{и} \quad - \frac{(\lambda + \mu)(j-2)(j-1)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \sum_{l=0}^{\infty} \overline{g_j^l} z^{l+1} \bar{z}.$$

Рассмотрим слагаемое, порожденное функцией $F_N(z) + \overline{G_N(z)}$ в представлениях $u_1^1 + iv_1^1$, $(u^1 + iv^1)$. Выберем все остальные слагаемые $F_j(z) + \overline{G_j(z)}$, $j = 0, \dots, N-1$, тождественно равными нулю.

В коэффициент $u_1^1 + iv_1^1$ параметр f_N^l войдет в виде числового коэффициента при множителях типа $k_N z^l |z|^{2N}$ в 2^N слагаемых, где $k_N > 0$.

Коэффициент при $f_N^l e^{il\theta}$ в представлении $(u_1^1 + iv_1^1)(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ есть

$$A^l = \sum_{m=0}^N C_N^m \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^m \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^{N-m} \frac{(2N)!l!}{(N+l)!j!}.$$

Коэффициент при $f_N^l e^{il\theta}$ в представлении $(u^1 + iv^1)(t_1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ есть

$$B^l = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^j C_k^m \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^m \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^{N-m} (t_1)^k \frac{(2N)!l!}{(2N-2k)!(k+l)!k!}.$$

Аналогично коэффициент при $-\overline{g_N^l} e^{i\theta}$ в представлении функции $(u_1^1 + iv_1^1) \times (e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ есть

$$D^l = \sum_{m=0}^N C_N^m \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^m \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^{N-m} \frac{(2N)!l!}{(N+l)!j!}.$$

Коэффициент при $-\overline{g_N^l} e^{i\theta}$ в представлении $(u^1 + iv^1)(t_1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$ есть

$$E^l = \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N C_k^m \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^m \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \right)^{N-m} (t_1)^k \frac{(2N)!l!}{(2N-2k)!(k+l)!k!}.$$

Подберем произвольные аналитические функции $F_N(z)$ и $G_N(z)$ так, чтобы минимизировать норму $\|(u_1^1 + iv_1^1)(z, \bar{z})\|_{L_2}$ при выполнении краевого условия $(u^1 + iv^1)(t_1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\alpha_j + i\beta_j) e^{ij\theta}$.

Выберем $f_N^l = -\overline{g_N^l}$. Обозначим $\delta^l = A^l f^l - D^l \overline{g^l} = (A^l + D^l) f_N^l$, $a^l = \frac{B^l + E^l}{A^l + D^l}$. При указанном выборе f_N^l и g_N^l получим, что $a^l > 1$.

Тогда

$$(u_1^1 + iv_1^1)(re^{i\theta}, re^{-i\theta}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta^l r^{2N+|l|} e^{il\theta}$$

и

$$(u^1 + iv^1)(t_1, e^{i\theta}, e^{-i\theta}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a^l \delta^l e^{il\theta}.$$

Следовательно, норма функции $u_1^1 + iv_1^1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \|u_1^1 + iv_1^1\|_{L_2} &= \sqrt{\int_0^1 r \left[\int_0^{2\pi} \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta^l r^{2N+|l|} e^{il\theta} \right|^2 d\theta \right] dr =} \\ &= \sqrt{2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \delta^l \overline{\delta^l} r^{2(2N+|l|)+1} dr} = \sqrt{2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Phi(\delta^l)}, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(\delta^l) = \int_0^1 \delta^l \overline{\delta^l} r^{2(2N+|l|)+1} dr = \frac{\delta^l \overline{\delta^l}}{2(2N + |l| + 1)}.$$

Удовлетворяя условию

$$a^l \delta_e^l = \alpha_l + i\beta_l,$$

имеем $\delta^l = \frac{\alpha_l + i\beta_l}{a^l}$, и

$$\Phi(\delta^l) = \frac{|\alpha_l + i\beta_l|^2}{(a^l)^2 2(2N + |l| + 1)} \leq \frac{|\alpha_l + i\beta_l|^2}{4N + 2}.$$

Суммируя $\Phi(\delta^l)$ по l , получим $\|u_1^1 + iv_1^1\|_{L_2} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, поскольку

$$\|u_1^1 + iv_1^1\|_{L_2} \leq \sqrt{\frac{\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha_j + i\beta_j|^2}{2N + 1}}.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Пусть функции $U_{00}(x, y)$, $V_{00}(x, y)$ непрерывны в круге D , а функции $U_1(\theta)$, $V_1(\theta)$ непрерывны на окружности S^1 . Тогда при повышении степени $\max\{2N - 1, 2n\}$ по t сплайн-интерполяционное решение приближает граничное условие $U_{00} + iV_{00}$ с точностью $O(1/\sqrt{N})$ в норме $L_2(D)$.

Напомним, что n – порядок гармоничности условия $U_0 + iV_0$, а N определяет приближение начального условия $U_{00} + iV_{00}$.

1.2. Сходимость сплайн-интерполяционного решения модифицированной двумерной динамической задачи к точному решению соответствующей классической задачи. В связи с отсутствием объемных сил имеем, согласно [1], следующее выражение для производной работы внешних напряжений по времени

$$\frac{dR}{dt} = \int_{\partial D} [X_n u_t + Y_n v_t] ds. \quad (7)$$

Здесь

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y), \quad Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y),$$

$$X_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_x = X_y = 2\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Y_y = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

вектор (u, v) представляет собой разность векторов смещений для решений точной и модифицированной задач.

Как и в [1], проинтегрируем (7) по t . Учитывая совпадение на границе начальных условий классической и модифицированной задач, с помощью неравенства Гельдера получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left\{ \int_{\partial D} |X_n u_t + Y_n v_t| ds \right\} dt = \int_{\partial D} \left[\int_{t_0}^t X_n \frac{du}{dt} dt + \int_{t_0}^t Y_n \frac{dv}{dt} dt \right] ds \leq \\ & \leq \int_{\partial D} |X_n u|_{t_0}^t ds + \int_{\partial D} |Y_n v|_{t_0}^t ds + \int_{\partial D} \int_{t_0}^t \left| u \frac{dX_n}{dt} \right| dt ds + \int_{\partial D} \int_{t_0}^t \left| v \frac{dY_n}{dt} \right| dt ds \leq \\ & \leq \left(\int_{\partial D} (X_n(t, x(s), y(s)))^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial D} u^2(t, x(s), y(s)) ds \right)^{1/2} + \\ & + \left(\int_{\partial D} (Y_n(t, x(s), y(s)))^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial D} v^2(t, x(s), y(s)) ds \right)^{1/2} + \\ & + \int_{t_0}^t \left[\left(\int_{\partial D} \left(\frac{dX_n}{dt}(t, x(s), y(s)) \right)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial D} u^2(t, x(s), y(s)) ds \right)^{1/2} \right] dt + \\ & + \int_{t_0}^t \left[\left(\int_{\partial D} \left(\frac{dY_n}{dt}(t, x(s), y(s)) \right)^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial D} v^2(t, x(s), y(s)) ds \right)^{1/2} \right] dt. \end{aligned}$$

Все слагаемые в правой части последнего неравенства содержат граничные значения $u(t, x, y)$ или $v(t, x, y)$, близкие к нулю при достаточно малом шаге разбиения временного интервала модифицированной задачи в силу того, что функции

$u(t, x, y)$ или $v(t, x, y)$ по построению приближаются на границе тела сплайном с точностью $O(\Delta t)$. Поэтому последнее выражение неравенства может быть сделано сколь угодно малым.

Теорема 2. Пусть функции $U_{00}(x, y)$, $V_{00}(x, y)$ непрерывны в круге D , а функции $U_1(\theta)$, $V_1(\theta)$ непрерывны на окружности S^1 и дважды непрерывно дифференцируемы по t на $[0, T] \times S^1$. Тогда при повышении степени $\max\{2N - 1, 2n\}$ по t сплайн-интерполяционное решение отличается от точного на $O(1/\sqrt{N}, \Delta t)$ в норме $L_2([t_0, t] \times D)$.

2. Статическая задача в трехмерном случае

Рассмотрим в пространстве XUH с координатами (x, y, h) односвязное деформируемое тело M , выпуклое в направлении OH , с гладкой поверхностью S . Уравнения равновесия внутри тела M имеют вид

$$\begin{aligned}\mu\Delta_3 u + (\lambda + \mu)(u_x + v_y + w_h)_x &= 0, \\ \mu\Delta_3 v + (\lambda + \mu)(u_x + v_y + w_h)_y &= 0, \\ \mu\Delta_3 w + (\lambda + \mu)(u_x + v_y + w_h)_z &= 0.\end{aligned}\tag{8}$$

Здесь $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial h^2}$.

Классическая формулировка трехмерной задачи теории упругости такова: найти компоненты вектора $\vec{a} = (u(x, y, h), v(x, y, h), w(x, y, h))$, удовлетворяющие уравнениям (8) при $(x, y, h) \in M$ и краевым условиям $u|_S = U$, $v|_S = V$, $w|_S = W$.

Так же, как и в п. 2, введем комплексную структуру.

Сложим первое уравнение системы (8) со вторым, умноженным на i , и рассмотрим комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Получим систему из двух уравнений

$$\begin{aligned}\mu\Delta_3(u + iv) + (\lambda + \mu)((\operatorname{Re}((u + iv)_z) + w_h)_x + i(\operatorname{Re}((u + iv)_z) + w_h)_y) &= 0 \\ \mu\Delta_3 w + (\lambda + \mu)(\operatorname{Re}((u + iv)_z) + w_h)_h &= 0\end{aligned}\tag{9}$$

Модифицированная задача относительно комплекснозначной функции $u + iv$ и вещественной функции w аналогична модифицированной задаче из предыдущего пункта, так как краевые условия задаются для фиксированных значений третьей пространственной переменной $h_0 < h_1 < \dots < h_L$ и на граничных торцах.

Таким образом, модифицированная задача состоит в следующем. Найти компоненты вектора смещений $\vec{a} = (u(z, \bar{z}, h), v(z, \bar{z}, h), w(z, \bar{z}, h))$, удовлетворяющие внутри каждого сегмента, заключенного в M между сечениями плоскостями $h = h_{j-1}$ и $h = h_j$, уравнениям (9) и следующим краевым условиям: на каждом уровне h_j краевое условие есть

$$(u(z(s), \bar{z}(s), h_j), v(z(s), \bar{z}(s), h_j), w(z(s), \bar{z}(s), h_j))) = (U^j(s), V^j(s), W^j(s)),$$

где s – параметр длины дуги границы сечения $M \cap \{h = h_j\}$, $s \in [0, \tilde{S}_j]$, здесь функции $U^j(s)$, $V^j(s)$, $W^j(s) \in C^1(M \cap \{h = h_j\})$. Считаем, что на торцах $h = h_0$, $h = h_L$ краевые смещения – полигармонические функции по переменным z, \bar{z} : $u(z, \bar{z}, h_0) = U^0(z, \bar{z})$, $v(z, \bar{z}, h_0) = V^0(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, h_0) = W^0(z, \bar{z})$ при $z \in D_0$, и $u(z, \bar{z}, h_L) = U^L(z, \bar{z})$, $v(z, \bar{z}, h_L) = V^L(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, h_L) = W^L(z, \bar{z})$ для $z \in D_L$, где D_0 и D_L – нижний и верхний торцы тела M соответственно.

Будем искать решение для каждого слоя $h \in [h_j, h_{j+1}]$ в виде полинома по переменной h :

$$w^j(z, \bar{z}, h) = \sum_{j=0}^N h^j u_j(z, \bar{z}), \quad v^j(z, \bar{z}, h) = \sum_{j=0}^N h^j v_j(z, \bar{z}), \quad w^j(z, \bar{z}, h) = \sum_{j=0}^N h^j w_j(z, \bar{z})$$

последовательно, начиная с произвольного торца. Сначала найдем решение для $h \in [h_0, h_1]$, затем используем значения решения на торце $h = h_1$ первого слоя как краевое условие на нижнем торце при $h = h_1$ для сплайна в слое $h \in [h_1, h_2]$ и т. д.

Приведем схему решения для одного слоя $h \in [h_k, h_{k+1}]$.

Подставим полиномиальные по h выражения для компонент вектора смещений в уравнения (9) и получим для старших коэффициентов соотношения

$$w_N(z, \bar{z}) = W_N(z) + \overline{W_N(z)},$$

$$(u_N + iv_N)(z, \bar{z}) = \int \left[\frac{-\operatorname{Re}(q_N)}{2\lambda + 4\mu} + i \frac{-\operatorname{Im}(q_N)}{2\mu} \right] dz + \overline{p_N(z)}.$$

Здесь $W_N(z)$, $p_N(z)$, $q_N(z)$ – произвольные аналитические функции.

Аналогично получим

$$w_{N-1}(z, \bar{z}) = \frac{N}{4\mu} \iint \left[-2(\lambda + \mu) \operatorname{Re}((u_N + iv_N)_z) \right] dz d\bar{z} + W_{N-1}(z) + \overline{W_{N-1}(z)},$$

$$(u_{N-1} + iv_{N-1})(z, \bar{z}) = \int \left[\frac{-2N(\lambda + \mu)w_N - \operatorname{Re}(q_{N-1})}{4\lambda + 8\mu} + i \frac{\operatorname{Im}(q_{N-1}(z))}{-4\mu} \right] dz + \overline{p_{N-1}(z)}.$$

Общие формулы для коэффициентов при $n < N - 1$ принимают вид

$$(u_n + iv_n)(z, \bar{z}) =$$

$$= \int \left[\frac{-2(n+1)(\lambda + \mu)w_{n+1} - \operatorname{Re}(q_n(z) + (n+2)(n+1) \int (u_{n+2} + iv_{n+2}) d\bar{z})}{4\lambda + 8\mu} + \right.$$

$$\left. + i \frac{\operatorname{Im}(q_n(z) + (n+2)(n+1) \int (u_{n+2} + iv_{n+2}) d\bar{z})}{-4\mu} \right] dz + \overline{p_n(z)}, \quad (10)$$

$$w_n(z, \bar{z}) = \frac{n+1}{4\mu} \iint \left[-(n+2)(\lambda + 2\mu)w_{n+2} - \right.$$

$$\left. -2(\lambda + \mu) \operatorname{Re}((u_{n+1} + iv_{n+1})_z) \right] dz d\bar{z} + W_n(z) + \overline{W_n(z)}.$$

Аналитические функции $W_n(z)$, $p_n(z)$, $q_n(z)$, $n = 0, \dots, N$, восстановим из краевых условий на уровнях $h = h_l$, $l = k, k+1$. Считаем, что разбиение $h_0 < h_1 < \dots < h_L$ настолько мелкое, что восстанавливаемые в слое $h \in [h_k, h_{k+1}]$ функции $W_n(z)$, $p_n(z)$, $q_n(z)$, $j = 0, \dots, N$, аналитичны при z , принадлежащем проекции пересечений тела M с плоскостями $h = h_k$, $h = h_{k+1}$ на плоскость OXY .

Далее считаем тело M круговым цилиндром, а его сечение на любом уровне – единичным кругом D . В противном случае с помощью конформного отображения всегда можно свести построение приближенного решения к решению задачи относительно круговых областей. Кроме того, можно решать задачи с особенностями на границе тела (углы, каспы) за счет рассмотрения мероморфных функций и выделения особенностей.

2.1. Склейка на торцах для трехмерной задачи. Рассмотрим задачу склейки, подобную той, что была решена для двумерной динамической задачи, то есть склейку решений в смежных секторах на общем торце D в пространстве $C(D)$. Пусть цилиндр M высотой H разбит на L слоев плоскостями $h = h_j$, $j = 0, \dots, L$, с постоянным шагом разбиения $\Delta h = H/L$.

Без ограничения общности рассмотрим только элемент сплайна для первого сегмента $h \in [0, h_1]$, где $h_1 = H/L$. Предположим, что функции $U^0(z, \bar{z})$, $V^0(z, \bar{z})$, $W^0(z, \bar{z})$ являются n -гармоническими в области D .

Необходимо найти функции

$$u^j(z, \bar{z}, h) = \sum_{j=0}^{2N-1} h^j u_j(z, \bar{z}), \quad v^j(z, \bar{z}, h) = \sum_{j=0}^{2N-1} h^j v_j(z, \bar{z}),$$

$$w^j(z, \bar{z}, h) = \sum_{j=0}^{2N-1} h^j w_j(z, \bar{z}), \quad N \geq n,$$

построенные по указанному выше способу так, чтобы $u(z, \bar{z}, 0) + iv(z, \bar{z}, 0) = (u_0 + iv_0)(z, \bar{z}) = U^0(z, \bar{z}) + iV^0(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, 0) = W^0(z, \bar{z})$, и, кроме того, $u(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_1) + iv(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_1) = (U^1 + iV^1)(\phi)$, $w(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_1) = W^1(\phi)$.

Поскольку функции $(u_0 + iv_0)(z, \bar{z})$ и $w_0(z, \bar{z})$ являются n -гармоническими по построению, необходимо подобрать входящие в них аналитические функции так, чтобы удовлетворялись заданные условия на торце $h = 0$. Благодаря наличию $6N$ произвольных аналитических функций удается по аналогии с динамической плоской задачей с помощью «четных» коэффициентов $(u_k + iv_k)(z, \bar{z})$, $w_k(z, \bar{z})$ удовлетворить заданным условиям $u(z, \bar{z}, 0) + iv(z, \bar{z}, 0) = (U^0 + iV^0)(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, 0) = W^0(z, \bar{z})$ на торце, а «нечетные» коэффициенты использовать для удовлетворения условиям на верхней кромке: $u(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_1) + iv(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_1) = (U^1 + iV^1)(\phi)$, $w(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_1) = W^1(\phi)$. Решение последней задачи неоднозначно в силу наличия $3N$ свободных аналитических функций, соответствующих «нечетным» коэффициентам. В дальнейшем «лишние» функции будут использованы для выполнения дополнительных условий склейки.

Для элемента сплайна в последнем слое $h \in [h_{L-1}, h_L]$, $h_L = H$, мы имеем краевые условия на двух торцах: $u(z, \bar{z}, h_{L-1}) + iv(z, \bar{z}, h_{L-1}) = (U^{L-1} + iV^{L-1})(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, h_{L-1}) = W^{L-1}(z, \bar{z})$, $u(z, \bar{z}, h_L) + iv(z, \bar{z}, h_L) = (U^L + iV^L)(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, h_L) = W^L(z, \bar{z})$. Таким образом, получили задачу о представлении четырех N -гармонических функций $u(z, \bar{z}, 0) + iv(z, \bar{z}, 0) = (u_0 + iv_0)(z, \bar{z})$, $w(z, \bar{z}, 0) = w_0(z, \bar{z})$, $u(z, \bar{z}, h_1) + iv(z, \bar{z}, h_1)$, $w(z, \bar{z}, h_1)$ четырьмя линейно-независимыми линейными

комбинациями функций вида $\sum_{k=0}^N |z|^{2k} (F_k^m(z) + \overline{G_k^m(z)})$, $\sum_{k=0}^N |z|^{2k} (\omega_k^m(z) + \overline{\omega_k^m(z)})$, $m = 0, 1$.

Так же, как и для динамической задачи, получим представление $u(z, \bar{z}, h_{L-1}) + iv(z, \bar{z}, h_{L-1})$, $u(z, \bar{z}, h_L) + iv(z, \bar{z}, h_L)$ линейными комбинациями функций вида $\sum_{k=0}^N |z|^{2k} (F_k(z) + \overline{G_k(z)})$. Заметим, что функции $w(z, \bar{z}, h_L)$, $w(z, \bar{z}, h_{L-1})$ имеют вид $\sum_{k=0}^N |z|^{2k} (\omega_k(z) + \overline{\omega_k(z)})$ по построению. Здесь $F_k(z)$, $G_k(z)$, $\omega_k(z)$ – аналитические функции.

В силу линейной независимости представлений функций $u(x, y, h_{L-1}) + iv(x, y, h_{L-1})$, $w(x, y, h_{L-1})$, $u(x, y, h_L) + iv(x, y, h_L)$, $w(x, y, h_L)$ всегда можно

выбрать входящие в коэффициенты $u_j(z, \bar{z}) + iv_j(z, \bar{z})$, $w_j(z, \bar{z})$, $j = 0, \dots, 2N - 1$, аналитические функции так, чтобы на торцах получились заданные N -гармонические функции.

Займемся дополнительными условиями склейки для элементов сплайна, не являющихся последним элементом. С помощью «лишних» аналитических функций можно дополнительно добиться приближения в пространстве $L_2(D)$ к нулю разностей значений производных u_h , v_h , w_h , вычисляемых на соответствующем срезе для элементов сплайна в слоях, примыкающих к срезу с двух сторон. Таким образом, при подклеивании очередного элемента сплайна следует не только удовлетворить условию на нижнем торце и на верхней кромке, но и приблизить в норме $L_2(D)$ соответствующие производные.

Для аппроксимации производных по переменной h в норме L_2 на торцах перейдем к полярным координатам на торце и воспользуемся следующей леммой из [7].

Лемма 1. Пусть $l \in \mathbb{Z}$. Минимум квадратичной формы

$$\int_0^1 \left[a_0 + a_1 r^{2+|l|} + \dots + a_N r^{2N+|l|} \right]^2 r dr$$

при условии $\sum_{k=0}^N a_k = 1$ не превосходит $\frac{1}{2(N+1)^2}$.

Покажем, как можно с помощью $3N$ произвольных аналитических функций, оставшихся после подклеивания элемента на нижнем торце, приблизить в норме $L_2(D)$ производные u_h , v_h , w_h к соответствующим производным, вычисленным для предыдущего элемента, с любой заданной точностью на общем торце смежных секторов. Предположим, что мы получили «четные» коэффициенты элемента, относящегося к слою $[h_1, h_2]$, и хотим получить приближение производной $u_h(z, \bar{z}, h_1) + iv_h(z, \bar{z}, h_1) = u_1(z, \bar{z}) + iv(z, \bar{z})$ функцией $\sum_{k=0}^N |z|^{2k} (A_k(z) + \overline{B_k(z)})$,

а производной $w_h(z, \bar{z}) = w_1(z, \bar{z})$ функцией $\sum_{k=0}^N |z|^{2k} (D_k(z) + \overline{D_k(z)})$, где $A_k(z)$, $B_k(z)$, $D_k(z)$ – произвольные аналитические в D функции. Например, минимизируем разность производных $u_h + iv_h$ на общем торце:

$$\|\tilde{u}_h + i\tilde{v}_h\|_{L_2} = \left(\int_0^1 r \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^N r^{2k} (A_k(re^{i\phi}) + \overline{B_k(re^{-i\phi})}) \right]^2 d\phi dr \right)^{1/2}$$

при одном краевом условии $(\tilde{u} + i\tilde{v})(e^{i\phi}, e^{-i\phi}, h_2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\alpha_l + i\beta_l) e^{il\phi}$. Пусть

$$A_k(re^{i\phi}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_k^l r^l e^{il\phi}, \quad B_k(re^{i\phi}) = \sum_{l=0}^{\infty} B_k^l r^l e^{-il\phi}.$$

Далее применим лемму 1 для каждого фиксированного l и получим, что

$$\|\tilde{u}_h + i\tilde{v}_h\|_{L_2} \leq \left(\sqrt{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\alpha_l + i\beta_l|^2 \right) / (N+1).$$

Последнее неравенство показывает, что для уменьшения погрешности приближения производных по h соседних элементов следует увеличивать степень по переменной h соответствующего элемента сплайна.

Поскольку для последнего элемента сплайна нет возможности приблизить производные по h к соответствующим производным соседнего элемента на общем торце, для минимизации разностей производных решения модифицированной задачи можно применить усреднение сплайнов, полученных при всевозможных последовательностях выбора последних элементов сплайна для данного разбиения. При достаточно большом значении L согласно лемме 1 можно добиться сколь угодно точного приближения производных итогового сплайна.

Обозначим максимальную оценку разности производных по h на одном торце через ε . Пусть норма функций, составляющих краевое условие, ограничена числом Q . Тогда существует $K > 0$ такое, что отклонение производной, например, u_h от точного решения на втором торце второго сегмента равно $Q + KhQ$. Следовательно, для $L - 1 = [H/\Delta h] - 1$ последовательно приближенных сплайнов погрешность равна $Q(1 + K\Delta h)^{L-1} < 3^{KH}Q$, здесь H – высота тела, $[\cdot]$ – целая часть числа.

Погрешность склейки на последнем шаге равна $(L - 1)\varepsilon$. Следовательно, общее отклонение есть $(3^{KH}Q + (L - 1)\varepsilon)/L \leq (3^{KH}Q)/L + \varepsilon$, то есть при достаточно большом L погрешность произвольно мала. Таким образом, имеет место

Теорема 3. Пусть функции $U^0(x, y)$, $V^0(x, y)$, $W^0(x, y)$, $U^L(x, y)$, $V^L(x, y)$, $W^L(x, y)$ непрерывны на торцах D_0 и D_L , а функции $U_j(\theta)$, $V_j(\theta)$, $W_j(\theta)$ – на сечениях $S \cap \{h = h_j\}$. Тогда при повышении степени $\max\{2N - 1, 2n\}$ по t сплайн-интерполяционное решение приближает первые производные $U_h + iV_h$, W_h на сечениях $M \cap \{h = h_j\}$ с точностью $O(1/\sqrt{N})$ в норме $L_2(D_j)$.

Получим теперь интегральную оценку разности решений классической и модифицированной задач в M , обозначив через (u, v, w) разность векторов смещений для модифицированной и классической задач.

Заметим, что граничные значения краевого условия на боковой поверхности тела M , как и в случае динамической задачи, приближаются граничными значениями сплайн-интерполяционного решения с точностью $O(1/L)$.

По предположению отсутствуют объемные силы. Тогда согласно [1] имеем

$$\iint_S [X_n u + Y_n v + Z_n w] dS = 2 \iiint_M W dV.$$

Здесь W – потенциальная энергия деформации, рассчитанная на единицу объема, следовательно, правая часть последнего тождества – потенциальная энергия деформированного тела, S – граница тела M ,

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_h \cos(n, h),$$

$$Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_h \cos(n, h),$$

$$Z_n = Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_h \cos(n, h)$$

и

$$X_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial h} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_x = X_y = 2\mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Y_y = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial h} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$Y_h = Z_y = 2\mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad Z_h = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial h} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial h}, \quad X_h = Z_x = 2\mu \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Если докажем, что потенциальная энергия деформированного тела близка к нулю, то согласно [1] получим, что вектор (u, v, w) близок к нулевому. Следовательно, сплайн-интерполяционное решение модифицированной задачи будет близко к точному решению классической.

Обозначим производную по нормали X_n на торце D_j , $j = 1, \dots, L-1$, в направлении, совпадающем с направлением h , через X_n^+ , а в направлении, обратном h , через X_n^- . Заметим, что $X_n^+ + X_n^-$ на одном торце – разность между производными по h сплайн-интерполяционного решения.

Теперь с помощью неравенства Гельдера для первого из трех слагаемых (для остальных слагаемых рассуждения аналогичны) получим

$$\begin{aligned} \left| \iint_S X_n u dS \right| &= \left| \iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} X_n^+ u dS + \iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} X_n^- u dS + \iint_{D_0 \cup D_L} X_n u dS + \iint_{S \setminus \{\bigcup_{j=0}^L D_j\}} X_n u dS \right| = \\ &= \left| \iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} (X_n^+ + X_n^-) u dS + \iint_{D_0 \cup D_L} X_n u dS + \iint_{S \setminus \{\bigcup_{j=0}^L D_j\}} X_n u dS \right| \leq \\ &\leq \left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} (X_n^+ + X_n^-)^2 dS \right)^{1/2} \left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} u^2 dS \right)^{1/2} + \left(\iint_{D_0 \cup D_L} (X_n)^2 dS \right)^{1/2} \left(\iint_{D_0 \cup D_L} u^2 dS \right)^{1/2} + \\ &\quad + \left(\iint_{S \setminus \{\bigcup_{j=0}^L D_j\}} (X_n)^2 dS \right)^{1/2} \left(\iint_{S \setminus \{\bigcup_{j=0}^L D_j\}} u^2 dS \right)^{1/2} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Здесь D_j – торцы, а $S \setminus \{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j\}$ – боковая поверхность M .

Пусть $K = \max_{(z, \bar{z}, h) \in M} |u(z, \bar{z}, h)|$. Тогда по лемме 1 интеграл I_1 можно оценить следующим образом: $I_1 \leq (L-1)K/N$. Выполнение краевого условия на торцах D_0, D_L подразумевает, что $I_2 = 0$. Приближение краевого условия на боковой поверхности сплайном влечет то, что $I_3 = O(1/L)$. Следовательно, для получения требуемой оценки сначала необходимо выбрать достаточно большое число L для оценки I_3 , а затем подобрать N так, чтобы интеграл I_1 также был достаточно малым.

Теорема 4. Пусть функции $U(x, y, h)$, $V(x, y, h)$, $W(x, y, h)$ непрерывны на торцах D_0 и D_L и дважды непрерывно дифференцируемы по h на боковой поверхности тела M , а функции $U_j(\theta)$, $V_j(\theta)$, $W_j(\theta)$ непрерывны на сечениях $S \cap \{h = h_j\}$. Тогда при повышении степени $\max\{2N-1, 2n\}$ по h сплайн-интерполяционное решение отличается от точного на $O(1/\sqrt{N}, \Delta h)$ в норме $L_2(M)$.

3. Динамическая пространственная задача

Рассмотрим систему уравнений равновесия при отсутствии объемных сил в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \mu \Delta_3 u - (\lambda + \mu)(u_x + v_y + w_h)_x &= 0, \\ v_{tt} - \mu \Delta_3 v - (\lambda + \mu)(u_x + v_y + w_h)_y &= 0, \\ w_{tt} - \mu \Delta_3 w - (\lambda + \mu)(u_x + v_y + w_h)_h &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Применение комплексных переменных позволяет привести систему (11) к системе $(u + iv)_{tt} - 4\mu(u + iv)_{z,\bar{z}} - \mu(u + iv)_{hh} - 4(\lambda + \mu)(\operatorname{Re}((u + iv)_z))_{\bar{z}} - 2(\lambda + \mu)w_{h\bar{z}} = 0$, $w_{tt} - 4\mu w_{z,\bar{z}} - \mu w_{hh} - (\lambda + \mu)(2\operatorname{Re}((u + iv)_z) + w_h)_h = 0$.

Классическая задача ставится следующим образом: найти функции, удовлетворяющие системе уравнений (11) и дополнительным краевому и начальным условиям. Как и в случае плоской задачи, запишем начальные условия в виде

$$\begin{aligned} u(0, x, y, h) &= U_0(x, y, h), & v(0, x, y, h) &= V_0(x, y, h), \\ w(0, x, y, h) &= W_0(x, y, h), & u_t(0, x, y, h) &= U_{00}(x, y, h), \\ v_t(0, x, y, h) &= V_{00}(x, y, h), & w_t(0, x, y, h) &= W_{00}(x, y, h), \end{aligned} \quad (x, y, h) \in V,$$

а краевые условия – в виде

$$u_S = U_1(t, x, y, h), \quad v_S = V_1(t, x, y, h), \quad w_S = W_1(t, x, y, h), \quad (x, y, h) \in S = \partial V.$$

Модифицируем эту задачу следующим образом. Снова считаем, что начальные и краевые условия заданы в конечном числе кривых – пересечений двумерных плоскостей $t = t_j$, $h = h_k$, $j = 1, \dots, P$, $k = 1, \dots, L$, с боковой поверхностью тела M и на торцах данного тела. На каждом уровне $\{t_j\} \times \{h = h_k\} \cap V$ краевое условие имеет вид

$$\begin{aligned} (u(t_j, x(s), y(s), h_k), v(t_j, x(s), y(s), h_k), w(t_j, x(s), y(s), h_k))) &= \\ &= (U^{j,k}(s), V^{j,k}(s), W^{j,k}(s)), \end{aligned}$$

где s – параметр длины дуги границы сечения $M \cap \{h = h_k\}$, $s \in [0, \tilde{S}_k]$. Считаем, что $U^{j,k}(s)$, $V^{j,k}(s)$, $W^{j,k}(s) \in C^1(V \cap \{h = h_k\})$, а на торцах V краевые и начальные смещения – полигармонические функции.

Приближенное решение строим в виде полинома по h и t :

$$\begin{aligned} u(t, h, z, \bar{z}) &= \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^N h^j t^k u_{j,k}(z, \bar{z}), & v(t, h, z, \bar{z}) &= \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^N h^j t^k v_{j,k}(z, \bar{z}), \\ w(t, h, z, \bar{z}) &= \sum_{k=0}^M \sum_{j=0}^N h^j t^k w_{j,k}(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (3.), получим для старших коэффициентов

$$\begin{aligned} w_{N,M}(z, \bar{z}) &= W_{N,M}(z) + \overline{W_{N,M}(z)}, \\ (u + iv)_{N,M}(z, \bar{z}) &= \int \left[\frac{-\operatorname{Re}(q_{N,M}(z))}{4\mu + 2\lambda} + i \frac{\operatorname{Im}(q_{N,M}(z))}{-2\mu} \right] dz + \overline{p_{N,M}(z)}. \end{aligned}$$

В общем случае

$$\begin{aligned} (u + iv)_{n,m}(z, \bar{z}) &= \int \left[(-2(n+1)(\lambda + \mu)w_{n+1,m}(z, \bar{z}) - \right. \\ &\quad - \operatorname{Re}(q_{n,m}(z) + \mu(n+2)(n+1) \int (u + iv)_{n+2,m} dz - \\ &\quad - (m+2)(m+1) \int (u + iv)_{n,m+2} dz) / (8\mu + 4\lambda) + \\ &\quad + \frac{i}{-4\mu} \left\{ \operatorname{Im}(q_{n,m}(z) + \mu(n+2)(n+1) \int (u + iv)_{n+2,m} dz - \right. \\ &\quad \left. \left. - (m+2)(m+1) \int (u + iv)_{n,m+2} dz \right\} \right] dz + \overline{p_{n,m}(z)}, \end{aligned}$$

$$w_{n,m}(z, \bar{z}) = \frac{1}{4\mu} \iint \left[-(\lambda + 2\mu)(n+2)(n+1)w_{n+2,m} - \right. \\ \left. - 2(\lambda + \mu)(n+1)\operatorname{Re}(((u+iv)_{n+1,m})_z) + (m+2)(m+1)w_{n,m+2} \right] dzd\bar{z} + \\ + W_{n,m}(z) + \overline{W_{n,m}(z)}.$$

Строим решение, начиная со слоя $t = 0$, $h \in [h_0, h_1]$. Далее достраиваем все элементы сплайна до $h \in [h_{L-1}, h_L]$. Склеивка решений для разных значений t_k и h_j производится по схемам, приведенным выше для динамической плоской и стационарной трехмерной задач.

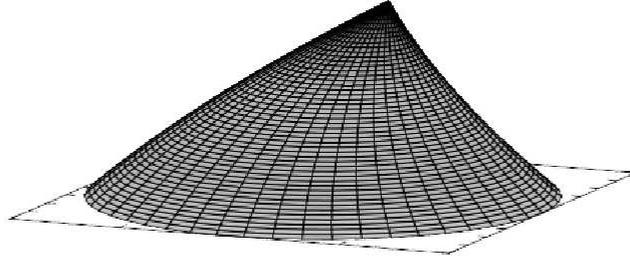
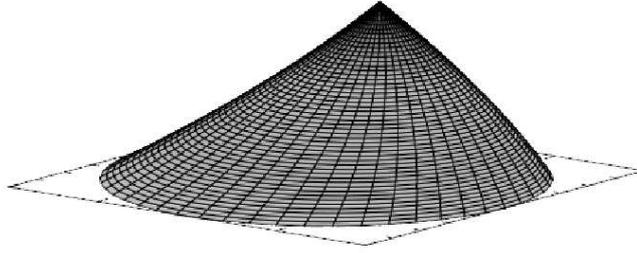
3.1. Сходимость к точному решению. Поскольку объемные силы отсутствуют, согласно для производной работы по времени имеем [1]

$$\frac{dR}{dt} = \iint_S [X_n u_t + Y_n v_t + Z_n w_t] dS.$$

Как и в случае плоской задачи, проинтегрируем это равенство по t :

$$\left| \int_{t_0}^t \left(\iint_S X_n u_t dS \right) dt \right| = \left| \int_{t_0}^t \left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} X_n^+ u_t dS \right) dt + \int_{t_0}^t \left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} X_n^- u_t dS \right) dt + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t \left(\iint_{D_0 \cup D_L} X_n u_t dS \right) dt + \int_{t_0}^t \left(\iint_{S \setminus \left(\bigcup_{j=0}^L D_j \right)} X_n u_t dS \right) dt \right| \leq \\ \leq \left| \int_{t_0}^t \left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} (X_n^+ + X_n^-) u_t dS \right) dt \right| + \left| \int_{t_0}^t \left(\iint_{D_0 \cup D_L} X_n u_t dS \right) dt \right| + \\ + \left| \int_{t_0}^t \left(\iint_{S \setminus \left(\bigcup_{j=0}^L D_j \right)} X_n u_t dS \right) dt \right| \leq \\ \leq \int_{t_0}^t \left(\left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} (X_n^+ + X_n^-)^2 dS \right)^{1/2} \left(\iint_{\bigcup_{j=1}^{L-1} D_j} u_t^2 dS \right)^{1/2} \right) dt + \\ + \iint_{S \cup D_0 \cup D_L} \left[\left(\int_{t_0}^t \left(\frac{dX_n}{dt} \right)^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{t_0}^t u^2 dt \right)^{1/2} \right] dS.$$

Используя лемму 1, уменьшим на торцах элементы $X_n^+ + X_n^-$. Оценим первое слагаемое в правой части так же, как в пространственном случае. Оценка для второго слагаемого следует из того, что построенное решение приближает линейным сплайном краевое условие на u на поверхности тела M .

Рис. 1. Боковая поверхность деформированного конуса при $A = -0.1$, $B = 0.1$ Рис. 2. Боковая поверхность деформированного конуса при $A = 0.1$, $B = 0.1$

4. Примеры

Приведем примеры приближенного решения, построенного в работе. Рассмотрим симметричный конус с вершиной в точке $(0, 0, 1)$ и основанием – единичным кругом с центром в точке $(0, 0, 0)$. Построим боковую поверхность деформированного конуса.

Пусть окружность, ограничивающая основание, фиксирована, центр основания сдвинут по оси OX на A , а вершина – по оси OZ на B . Тогда

$$\begin{aligned}
 (u + iv)(z, \bar{z}, h) = & (-1/(2\mu))(-\kappa q_2 + \bar{p}_2)h^2 + \\
 & + (-1/(2\mu))(-\kappa q_1 + \bar{p}_1 + (\lambda + \mu)/(2(\lambda + 2\mu))((\lambda + 3\mu)z\bar{W}_2 - (\lambda + \mu)zW_2))h + \\
 & + (-1/(2\mu))(-\kappa q_0(z) + z\bar{q}_0(z) + \bar{p}_0(z) + (1/4(\lambda + 2\mu))(2(\lambda^2 + 4\lambda\mu + 5\mu^2)/(\lambda + \mu)|z|^2 q_2 - \\
 & - (\lambda + 3\mu)z^2 \bar{q}_2 - (\lambda + 3\mu)|z|^2 \bar{p}_2 + (\lambda + \mu)p_2 z^2) + \\
 & + (\lambda + \mu)/(4(\lambda + 2\mu))(4\mu((\lambda + \mu)/(2\mu^2))(\mu/(\lambda + \mu))(|z|^2 q_2 + z^2/2\bar{q}_2) + \\
 & + (\lambda + 3\mu)z\bar{W}_1 - (\lambda + \mu)W_1 z));
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w(z, t, h) = & (\bar{W}_2 + W_2)/2h^2 + ((\bar{W}_1 + W_1)/2 + ((\lambda + \mu)/(2\mu^2))(\mu/(\lambda + \mu))(\bar{z}q_2 + z\bar{q}_2))h + \\
 & + (W_0(z) + \bar{W}_0(\bar{z}))/2 + (-\lambda + \mu)/(4\mu^2)(-\mu/(\lambda + \mu)(\bar{z}q_1 + z\bar{q}_1) + \\
 & + \text{Re}[(\lambda + \mu)/(2(\lambda + 2\mu))((\lambda + 3\mu)|z|^2 \bar{W}_2 - (\lambda + \mu)|z|^2 W_2)) - (\lambda + 2\mu)/(2\mu)|z|^2 W_2];
 \end{aligned}$$

Разрешив систему уравнений для сдвигов $A = -0.1$, $B = 0.1$, получим

$$w(z, \bar{z}, h) = 0, \quad (u + iv)(x, y, h) = (1651y^2 + 1651x^2 - 17h^2 + 3319h - 1651)/16510$$

(см. рис. 1).

Разрешив систему уравнений для сдвигов $A = 0.1$, $B = 0.1$, получим

$$w(z, \bar{z}, h) = 0, \quad (u + iv)(x, y, h) = -(1651y^2 + 1651x^2 - 17h^2 + 17h - 1651)/16510$$

(см. рис. 2).

Аналогично данным примерам решение можно построить и для произвольно заданных сдвигов конечного набора точек в основании конуса.

Summary

P.N. Ivanshin. Spline-Interpolation Solution of Elasticity Theory Problems.

A spline-interpolation solution of static and dynamic elasticity theory problems is suggested. The method allows to solve the problems for solids with plane sections parallel to the plane XOY . We reduce space and dynamic problems to the series of plane boundary-value problems. The recursive formulas are obtained to determine the spline coefficients. The convergence of the constructed approximate solutions to the exact solutions is proved.

Keywords: spline interpolation, elasticity theory, dynamic problem, polyharmonic functions.

Литература

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. *Колосов Г.В.* Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 227 с.
3. *Широкова Е.А., Иваньшин Н.А.* Решение второй основной задачи теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла // Прикл. матем. и механика. – 1997. – Т. 61, № 2. – С. 350–351.
4. *Andersen L., Nielsen S.R.K.* Elastic Beams in Three Dimensions. – Aalborg University, 2008. – 104 p.
5. *Strang G.* Introduction to Applied Mathematics. – Wellesley, Mass.: Wellesley-Cambridge Press, 1986. – 767 p.
6. *Shirokova E.A., Ivanshin P.N.* Spline-Interpolation Solution of One Elasticity Theory Problem. – Bentham Sci. Publ., 2011. – 255 p.
7. *Ivanshin P.N., Shirokova E.A.* Spline-interpolation solution of 3D Dirichlet problem for a certain class of solids // IMA J. Appl. Math. – 2013. – V. 78, No 6. – P. 1109–1129.
8. *Векуа И.Н.* Решение основной краевой задачи для уравнения $\Delta^{n+1}u = 0$ // Сообщения АН Грузинской ССР. – 1942. – Т. 3, № 3. – С. 213–220.
9. *Cho S., Pai S.R.* On the regularity of the Riemann mapping function in the plane // Pusan Kyongnam Math. J. – 1996. – V. 12, No 2. – P. 203–211.

Поступила в редакцию
29.05.15

Иваньшин Петр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: pivanshi@yandex.ru