УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
*Том 154, кн. 4* Физико-математические науки *2012*

УДК 517.98

# О РАСШИРЕНИИ АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА

*Т.А. Григорян, Е.В. Липачева, В.А. Тепоян*

**Аннотация**

В работе исследованы $C^*$-расширения алгебры Теплица с помощью изометрических операторов. Показано, что в случае, когда алгебра Теплица действует неприводимо, все такие расширения порождают одну и ту же алгебру, то есть нет нетривиальных расширений алгебры Теплица. Приведены примеры нетривиальных расширений алгебры Теплица в случае, когда ее представление приводимо.

**Ключевые слова:** инверсная полугруппа, инверсное представление, алгебра Теплица, $\pi$-расширение, инверсное $\pi$-расширение, $C^*$-алгебра.

---

## Введение

В своей известной работе [1] Кобурн доказал теорему о том, что все изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел порождают $C^*$-алгебры, канонически изоморфные алгебре Теплица. Многие авторы обобщили эту теорему на более широкий класс полугрупп. Дуглас [2] показал, что все изометрические неунитарные представления любого положительного конуса вещественных чисел $\mathbb{R}$ порождают канонически изоморфные алгебры. Мерфи [3] доказал эту теорему для положительных конусов абелевых групп с полным порядком. С другой стороны, Мерфи [3] и Джанг [4] показали, что теорема неверна для полугруппы $\mathbb{Z}_+\backslash\{1\}$. Изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+\backslash\{1\}$ были изучены в работах [5–7].

В настоящей работе введено понятие $\pi$-расширения полугруппы неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$ (см. определение 1). Исследованы свойства $C^*$-алгебр, порожденных $\pi$-расширением полугруппы $\mathbb{Z}_+$. Введено также понятие инверсного $\pi$-расширения полугруппы $\mathbb{Z}_+$ (см. определение 3). Доказано, что если $\pi$ – неприводимое представление полугруппы $\mathbb{Z}_+$, то у $\mathbb{Z}_+$ нет нетривиального инверсного $\pi$-расширения. В случае, когда $\pi$ – приводимое представление, существует неинверсное $\pi$-расширение. С другой стороны, показано, что для любого изометрического представления $\mathbb{Z}_+$ всегда существует неинверсное $\pi$-расширение.

В работе также исследованы расширения алгебры Теплица, порожденные инверсными $\pi$-расширениями полугруппы $\mathbb{Z}_+$. Показано, что среди таких расширений есть расширения, представляющие собой башню вложенных друг в друга алгебр Теплица, индуктивный предел которых есть $C^*$-алгебра, рассмотренная в работе Дугласа [2].

## 1. Необходимые сведения

Рассмотрим изометрическое представление полугруппы $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел $\pi : \mathbb{Z}_+ \to B(H)$, где $B(H)$ – множество всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве $H$. Обозначим через $\mathrm{Is}\,(H)$ полугруппу всех изометрических операторов из $B(H)$.

**Определение 1.** Подполугруппу $M \subset \mathrm{Is}\,(H)$ назовем $\pi$-расширением полугруппы $\mathbb{Z}_+$, если
1) $\pi(\mathbb{Z}_+) \subset M$;
2) $\pi(i)T = T\pi(i)$ для $T$ из $M$ и $i$ из $\mathbb{Z}_+$.

Всюду в статье, где не оговаривается противное, рассматривается неприводимое представление $\pi : \mathbb{Z}_+ \to B(H^2)$, где $H^2(S^1, d\mu)$ – пространство Харди интегрируемых с квадратом комплекснозначных функций на единичной окружности $S^1$ по мере Хаара $\mu$, спектр которых лежит в $\mathbb{Z}_+$.

Оператор $\pi(n)$ есть мультипликативный оператор умножения на функцию $e^{in\theta}$, то есть $\pi(n) : H^2 \to H^2$ и $\pi(n)f(e^{i\theta}) = e^{in\theta}f(e^{i\theta})$.

Ортонормированная система функций $1$, $e^{i\theta}$, $e^{i2\theta}$, $\ldots$ в $H^2$ является базисом, оператор $\pi(1)$ – оператором сдвига на этом базисе: $\pi(1)e^{in\theta} = e^{i(n+1)\theta}$. Поэтому $C^*$-подалгебра алгебры $B(H^2)$, порожденная операторами $\pi(1)$ и $\pi^*(1)$, есть алгебра Теплица.

Инверсные расширения алгебры Теплица исследованы в разд. 5.

## 2. Инверсные представления

*Инверсная полугруппа* $P$ – это полугруппа, в которой каждый элемент $x$ имеет единственный *инверсный* элемент $x^*$ такой, что выполняются равенства

$$xx^*x = x, \quad x^*xx^* = x^* \tag{1}$$

Обозначим через $\Delta_S$ множество всех изометрических представлений полугруппы $S$. Для $\pi \in \Delta_S$ определим $S^\pi$ как полугруппу, порожденную операторами $\pi(i)$ и $\pi^*(i)$, где $i \in S$.

**Определение 2.** Представление $\pi \in \Delta_S$ назовем инверсным, если $S^\pi$ является инверсной полугруппой.

*Регулярным изометрическим представлением* называется отображение

$$\pi : S \to B(l^2(S)), \quad i \mapsto \pi(i),$$

заданное следующим образом:

$$(\pi(i)f)(j) = \begin{cases} f(k), & \text{если } \ j = i + k \ \text{ для некоторого } \ k \in S; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$C^*$-алгебра, порожденная регулярным изометрическим представлением полугруппы $S$, называется *приведенной полугрупповой $C^*$-алгеброй* и обозначается $C^*_{\mathrm{red}}(S)$ [8–10].

**Теорема 1 [11, 12].** *Регулярное представление полугруппы $S$ является инверсным.*

Приведем пример неинверсного представления.

Пусть $\pi : \mathbb{Z}_+ \to B(H^2)$ – представление полугруппы $\mathbb{Z}_+$, описанное в разд. 1, такое, что $\pi(n)$ есть оператор-мультипликатор умножения на функцию $e^{in\theta}$.

Каждая внутренняя функция $\Phi(z)$ также определяет изометрический оператор-мультипликатор $T_\Phi$: $T_\Phi f = \Phi f$.

**Теорема 2.** *Пусть $\widetilde{\pi} : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \to B(H^2)$ – представление, отображающее $(n, 0)$ на $e^{in\theta}$ и $(0, m)$ на $\Phi^m$, где $\Phi$ – любая внутренняя функция, не принадлежащая $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^\infty$. Тогда $\widetilde{\pi}$ – неинверсное представление, то есть $(\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+)^{\widetilde{\pi}}$ – неинверсная полугруппа.*

**Доказательство.** Произвольная внутренняя функция имеет следующий вид: $\Phi(z) = B(z)S(z)$, где $B(z)$ – произведение Бляшке, а $S(z)$ – внутренняя сингулярная функция. В общем случае $B(z)$ в нуле равняется нулю, поэтому найдется такое $n$, что $\Phi(z) = z^n B_1(z)S(z)$, где $B_1(z)$ – произведение Бляшке и $B_1(0) \neq 0$. Зафиксируем это $n$. Заметим, что $\widetilde{\pi}(k,m) = \pi(k)T_\Phi^m$.

Нам достаточно показать, что [13]

$$\widetilde{\pi}(0,1)\widetilde{\pi}^*(0,1)\widetilde{\pi}(n+1,0)\widetilde{\pi}^*(n+1,0) \neq \widetilde{\pi}(n+1,0)\widetilde{\pi}^*(n+1,0)\widetilde{\pi}(0,1)\widetilde{\pi}^*(0,1),$$

или

$$T_\Phi T_\Phi^* \pi(n+1)\pi^*(n+1) \neq \pi(n+1)\pi^*(n+1)T_\Phi T_\Phi^*. \tag{2}$$

Вычислим левую и правую части неравенства (2) от функции $e^{in\theta}$. Поскольку $\pi^*(n+1)(e^{in\theta}) = 0$, очевидно, что $T_\Phi T_\Phi^* \pi(n+1)\pi^*(n+1)(e^{in\theta}) = 0$.

Рассмотрим $T_\Phi^* e^{in\theta}$. Покажем, что все коэффициенты Фурье этой функции в разложении в ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik\theta}$, кроме нулевого коэффициента, равны 0. Для этого вычислим скалярное произведение на элементы $e^{ik\theta}$, где $k > 0$

$$(e^{ik\theta}, T_\Phi^* e^{in\theta}) = (\Phi e^{ik\theta}, e^{in\theta}) = (e^{ik\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}), 1) = \int\limits_{S^1} e^{ik\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta})\, d\mu = 0.$$

Теперь подсчитаем нулевой коэффициент в этом разложении:

$$\begin{aligned}(1, T_\Phi^* e^{in\theta}) = (\Phi, e^{in\theta}) = (e^{in\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}), e^{in\theta}) = \\ = (B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}), 1) = \int\limits_{S^1} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta})\, d\mu = B_1(0)S(0).\end{aligned}$$

Таким образом, $T_\Phi^* e^{in\theta} = B_1(0)S(0)1$. Отсюда

$$T_\Phi T_\Phi^* e^{in\theta} = B_1(0)S(0)\Phi = B_1(0)S(0)e^{in\theta} B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}),$$

тогда

$$\pi^*(n+1)T_\Phi T_\Phi^* e^{in\theta} = \pi^*(1)B_1(0)S(0)B_1(e^{i\theta})S(e^{i\theta}) \neq 0,$$

следовательно, $(\pi(n+1)\pi^*(n+1)T_\Phi T_\Phi^*)(e^{in\theta}) \neq 0$.

Итак, выполнено неравенство (2) и поэтому $\widetilde{\pi}$ – неинверсное представление. □

## 3. $\pi$-расширение полугруппы $\mathbb{Z}_+$

**Лемма 1.** *Для всякого изометрического оператора из $\pi$-расширения полугруппы $\mathbb{Z}_+$ существует единственная внутренняя функция $\Phi$ такая, что этот изометрический оператор совпадает с оператором-мультипликатором умножения на функцию $\Phi$.*

**Доказательство.** Пусть $T$ – некоторый изометрический оператор из $\pi$-расширения полугруппы $\mathbb{Z}_+$. Обозначим $\mathcal{Q}_0 = TH^2 \subset H^2$. Покажем, что $\mathcal{Q}_0$ инвариантно относительно сдвигов $\pi(1)$. Поскольку $T$ коммутирует с $\pi(1)$, то $\pi(1)\mathcal{Q}_0 = = \pi(1)TH^2 = T\pi(1)H^2 \subset TH^2 = \mathcal{Q}_0$.

Тогда, по теореме Берлинга [14], если $\mathcal{Q}_0 \neq 0$, то существует внутренняя функция $\Phi$ такая, что $\mathcal{Q}_0 = \Phi H^2$, причем $\Phi$ единственна с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим $\Phi' = T \cdot 1$. Поскольку $||(T \cdot 1)h||$ совпадает с $||h||$ для любого $h$ из $H^2$, то $\Phi'$ – внутренняя функция, причем $Th = T_{\Phi'} h,\ h \in H^2$.

Таким образом, по теореме Берлинга получаем, что всякий изометрический оператор $T$ представляется через единственную внутренную функцию. □

Через $C^*_\pi(\mathbb{Z}_+)$ обозначим $C^*$-алгебру, порожденную изометрическим представлением $\pi$, описанным в разд. 1; через $C^*_\pi(M)$ – $C^*$-алгебру, порожденную полугруппой $M \subset \mathrm{Is}\,(H^2)$.

Если $M$ – $\pi$-расширение полугруппы $\mathbb{Z}_+$, то по лемме 1 каждому изометрическому оператору $T \in M$ соответствует единственная внутренняя функция $\Phi$ такая, что оператор $T$ есть оператор-мультипликатор умножения на $\Phi$. Обозначим $M' = \{\Phi;\ T_\Phi \in M\}$.

**Теорема 3.** *Пусть $M$ – $\pi$-расширение полугруппы $\mathbb{Z}_+$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $C^*_\pi(\mathbb{Z}_+) = C^*_\pi(M)$;
2) $M'$ *– подполугруппа полугруппы конечных произведений Бляшке.*

**Доказательство.** Пусть $M'$ – подполугруппа полугруппы конечных произведений Бляшке. Докажем, что $C^*_\pi(\mathbb{Z}_+) = C^*_\pi(M)$.

Каждое конечное произведение Бляшке определяет изометрический оператор-мультипликатор и равномерно аппроксимируется конечными линейными комбинациями функций $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому если $B(z)$ – конечное произведение Бляшке, то оператор $T_B$ принадлежит алгебре $C^*_\pi(\mathbb{Z}_+)$. Следовательно, $C^*_\pi(\mathbb{Z}_+) = C^*_\pi(M)$.

Теперь докажем обратное. Пусть $T \in M$. Тогда оператору $T$ соответствует некоторая внутренняя функция $\Phi \in M'$ такая, что для любого $h \in H^2$: $Th = \Phi h$. Поскольку $C^*_\pi(\mathbb{Z}_+) = C^*_\pi(M)$, то $T \in C^*_\pi(\mathbb{Z}_+)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация мономов $W_i$, состоящих из степеней $\pi(1)$ и $\pi^*(1)$, такая, что

$$\|T - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i W_i\| < \varepsilon.$$

Легко проверить, что моном $W_i$ можно записать в виде произведения $\pi(n)\pi^*(m)$.

Подставляя $W_i = \pi(n_i)\pi^*(m_i)$ в приведенное выше неравенство, получим

$$\|T - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \pi(n_i)\pi^*(m_i)\| < \varepsilon.$$

Пусть $m_0 = \max\limits_{i=\overline{1,l}} \{m_i\}$. Тогда

$$\|T\pi(m_0) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \pi(n_i)\pi^*(m_i)\pi(m_0)\| < \|T - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \pi(n_i)\pi^*(m_i)\| \cdot \|\pi(m_0)\| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\|T\pi(m_0) - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \pi(n_i')\| < \varepsilon.$$

Так как оператор $T$ является оператором-мультипликатором умножения на $\Phi$, а оператор $\pi(n)$ – на функцию $e^{in\theta}$, то

$$\|\Phi e^{im_0\theta} - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i e^{in_i'\theta}\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\|\Phi - \sum_{i} \lambda_i e^{i(n_i' - m_0)\theta}\| < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, функция $\Phi$ равномерно аппроксимируется непрерывными функциями, и следовательно, сама является непрерывной функцией на окружности. Поскольку любая внутренняя функция, непрерывная на окружности, является конечным произведением Бляшке, получаем, что $\Phi$ – конечное произведение Бляшке. $\square$

## 4. Инверсное $\pi$-расширение

Обозначим через ${\mathbb{Z}_+}^\pi$ инволютивную полугруппу, порожденную $\pi(\mathbb{Z}_+)$ и $\pi(\mathbb{Z}_+)^*$. Отметим, что ${\mathbb{Z}_+}^\pi$ – бициклическая полугруппа. Все неприводимые представления этой полугруппы полностью описаны в работе [15]. Пусть $M$ – $\pi$-расширение полугруппы $\mathbb{Z}_+$. Обозначим через $\mathcal{M}^*$ полугруппу, порожденную $M$ и $M^*$.

**Определение 3.** $\pi$-расширение полугруппы $\mathbb{Z}_+$ называется инверсным, если $\mathcal{M}^*$ – инверсная полугруппа.

Пусть $\pi : \mathbb{Z}_+ \to B(H^2)$ – представление полугруппы $\mathbb{Z}_+$, описанное в разд. 1. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *$\mathcal{M}^*$ инверсна тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}^* = {\mathbb{Z}_+}^\pi$.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{M}^* = {\mathbb{Z}_+}^\pi$. Каждый элемент полугруппы ${\mathbb{Z}_+}^\pi$ записывается в виде произведения $\pi(n)\pi^*(m)$. Инверсным к нему будет представление $\pi(m)\pi^*(n)$. Поэтому ${\mathbb{Z}_+}^\pi$, а следовательно и $\mathcal{M}^*$ – инверсные полугруппы.

Обратно, пусть $\mathcal{M}^* \neq {\mathbb{Z}_+}^\pi$. Тогда каждый изометрический оператор $T \in$ $\in M\backslash\pi(\mathbb{Z}_+)$ по лемме 1 представляется через единственную внутреннюю функцию: $T = T_\Phi$. По аналогии с доказательством теоремы 2 можно показать, что в этом случае $\mathcal{M}^*$ – неинверсная полугруппа. $\square$

Рассмотрим произвольное изометрическое представление $\pi : \mathbb{Z}_+ \to B(H)$. Обозначим $H_0 = \ker \pi^*(1)$. Ясно, что $H_0$ – гильбертово подпространство в $H$.

**Теорема 5.** *Пусть $\pi : \mathbb{Z}_+ \to B(H)$ – изометрическое представление полугруппы $\mathbb{Z}_+$ такое, что подпространство $H_0 = \ker \pi^*(1)$ не является одномерным. Тогда существует инверсное $\pi$-расширение $M$ полугруппы $\mathbb{Z}_+$ такое, что ${\mathbb{Z}_+}^\pi$ является собственной инволютивной подполугруппой инволютивной полугруппы $\mathcal{M}^*$.*

**Доказательство.** Покажем, что $\pi$ является приводимым изометрическим представлением.

Обозначим $H_1 = \pi(1)H_0, \ldots, H_n = \pi(n)H_0, \ldots$ Подпространства $H_0$, $H_1$, $H_2, \ldots$ попарно ортогональны. Действительно, проверим, что $H_n \perp H_m$ при $m > n$. Имеем $(\pi(n)h_0, \pi(m)h_0) = (\pi^*(m-n)h_0, h_0) = 0$.

Таким образом, $H = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} H_n$, причем подпространство $H_0$, а следовательно, и $H_n$, $n > 0$, не являются одномерными.

Пусть $\{e_0^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots,$ – конечный или бесконечный базис в $H_0$. Пусть $e_n^{(j)} = \pi(n)(e_0^{(j)})$. Тогда $\{e_n^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots,$ – базис в $H_n$, $\{e_n^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \ldots;$ $n = 0, 1, 2, \ldots,$ – базис в $H$.

Рассмотрим подпространство в $H$ с базисом $\{e_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$. На этом базисе оператор $\pi(1)$ действует как оператор сдвига: $\pi(1)(e_n^{(j)}) = e_{n+1}^{(j)}$.

Подпространство $H$ является пространством Харди, обозначим его через $H_j^2$.

Таким образом, пространство $H$ представляется в виде прямой суммы, конечной или бесконечной, подпространств Харди $H = \bigoplus\limits_j H_j^2$, причем представление $\pi$ является на каждом из $H_j^2$ неприводимым.

Так как $H_0$ не является одномерным подпространством, прямая сумма $\bigoplus\limits_j H_j^2$ содержит по крайней мере два слагаемых. Зафиксируем два пространства Харди $H_1^2$ и $H_2^2$ с базисами $\{e_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{e_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ соответственно.

Рассмотрим оператор $T \in B(H)$, который на $H_1^2 \oplus H_2^2$ действует следующим образом:

$$T(e_n^{(1)}) = e_n^{(2)}; \quad T(e_n^{(2)}) = e_{n+1}^{(1)}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$T = \pi(1)$ на $H_j^2$ $(j \neq 1,\ j \neq 2)$. Заметим, что $\pi(1) = T^2$ на $H_1^2 \oplus H_2^2$.

Отсюда следует, что $\pi(1)T = T\pi(1)$, $\pi^*(1)T^* = T^*\pi^*(1)$, но $T^*\pi(1) \neq \pi(1)T^*$, $T\pi^*(1) \neq \pi^*(1)T$.

Пусть $M$ – полугруппа, порожденная $\pi(\mathbb{Z}_+)$ и оператором $T$. Очевидно, что она является $\pi$-расширением полугруппы $\mathbb{Z}_+$ и $\mathbb{Z}_+^{\pi} \subsetneq \mathcal{M}^*$.

Отметим, что $\mathcal{M}^*$ является инверсной полугруппой. Это следует из того, что любой моном в $\mathcal{M}^*$ имеет вид $T^kT^{*l}\pi(n)\pi^*(m)T^sT^{*p}$, а инверсным к нему будет моном $T^pT^{*s}\pi(m)\pi^*(n)T^lT^{*k}$. □

## 5. Инверсные расширения алгебры Теплица

Пусть даны две сингулярные внутренние функции

$$\Phi_1 = \exp\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} \quad \text{и} \quad \Phi_t = \exp t\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1},$$

где $t$ – некоторое положительное вещественное число.

Функции $\Phi_1$ соответствует изометрический оператор-мультипликатор $T_{\Phi_1}$, функции $\Phi_t$ – оператор $T_{\Phi_t}$.

Заметим, что изометрические операторы $T_{\Phi_1}$ и $T_{\Phi_t}$, $t > 0$, отображают пространство Харди $H^2$ снова в $H^2$, то есть

$$T_{\Phi_t} = PT_{\Phi_t} \quad \text{и} \quad T_{\Phi_1} = PT_{\Phi_1},$$

где $P$ – проектор из $L^2(S^1 d\mu)$ на $H^2(S^1 d\mu) = H^2$.

Сопряженным оператором, например, к оператору $T_{\Phi_t}$ является $T_{\Phi_t}^* = PT_{\Phi_t^{-1}} = PT_{\Phi_{-t}}$. Операторы $T_{\Phi_t}^*$ и $T_{\Phi_1}^*$ не являются изометрическими.

По теореме Кобурна [1] $C^*$-алгебра, порожденная изометрическим оператором $T_{\Phi_1}$, канонически изоморфна алгебре Теплица. Через $\mathcal{T}_1$ обозначим $C^*$-алгебру Теплица, порожденную оператором $T_{\Phi_1}$, через $\mathcal{T}_t$ – $C^*$-алгебру Теплица, порожденную $T_{\Phi_t}$.

Рассмотрим $C^*$-алгебру, порожденную операторами $T_{\Phi_1}$ и $T_{\Phi_t}$. Обозначим ее $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$. Ясно, что $\mathcal{T}_1 \subset C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t})$.

Если $t$ – положительное рациональное число, то справедлива следующая теорема.

**Лемма 2.** *Пусть $t = m/n$, где $m$ и $n$ – взаимно простые числа. Тогда $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_t}) \cong \mathcal{T}_{1/n}$, где $\mathcal{T}_{1/n}$ – $C^*$-алгебра Теплица, порожденная оператором $T_{\Phi_{1/n}}$.*

**Доказательство.** Очевидно, что справедливы равенства $T_{\Phi_{m/n}} = T_{\Phi_{1/n}}^m$ и $T_{\Phi_1} = T_{\Phi_{1/n}}^n$. Это означает, что $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}}) \subseteq \mathcal{T}_{1/n}$.

С другой стороны, если $m$ и $n$ – взаимно простые числа, то из *алгоритма Евклида* следует, что существуют целые числа $k$ и $l$ такие, что

$$nk + ml = 1 \quad \text{или} \quad k + \frac{lm}{n} = \frac{1}{n}.$$

Возможны два случая:
1) $k > 0,\ l < 0$;
2) $k < 0,\ l > 0$.

Проверим, что в первом случае $T_{\Phi_{1/n}} = (T^*_{\Phi_{m/n}})^{|l|} T^k_{\Phi_1}$, а во втором случае $T_{\Phi_{1/n}} = (T^*_{\Phi_1})^{|k|} T^l_{\Phi_{m/n}}$.

Действительно, например, в первом случае имеем

$$(T^*_{\Phi_{m/n}})^{|l|} T^k_{\Phi_1} = (PT_{\Phi_{-m/n}})^{|l|} T^k_{\Phi_1} = \underbrace{(PT_{\Phi_{-m/n}})(PT_{\Phi_{-m/n}}) \dots (PT_{\Phi_{-m/n}})}_{|l|} T^k_{\Phi_1}.$$

Поскольку

$$T_{\Phi_{-m/n}} T^k_{\Phi_1} = T_{\Phi_{-m/n}} T_{\Phi_k} = T_{\Phi_{k-(m/n)}} \quad \text{и} \quad k - \frac{m}{n} > 0,$$

то $PT_{\Phi_{-m/n}} T^k_{\Phi_1} = T_{\Phi_{k-(m/n)}}$.

Аналогично,

$$PT_{\Phi_{-m/n}} T_{\Phi_{k-(m/n)}} = T_{\Phi_{k-(2m/n)}},$$

и т. д. В итоге получаем

$$(PT_{\Phi_{-m/n}})^{|l|} T^k_{\Phi_1} = T_{\Phi_{k-(|l|m/n)}} = T_{\Phi_{k+(lm/n)}} = T_{\Phi_{1/n}}.$$

Это означает, что $\mathcal{T}_{1/n} \subseteq C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}})$.

Таким образом, получаем $C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}}) \cong \mathcal{T}_{1/n}$. $\square$

Из леммы 2 следует, что $C^*$-алгебра $\mathcal{T}_{1/n}$ является инверсным расширением $C^*$-алгебры $\mathcal{T}_1$:

$$\mathcal{T}_1 \subset C^*(T_{\Phi_1}, T_{\Phi_{m/n}}) \cong \mathcal{T}_{1/n}.$$

Как и при доказательстве леммы 2, можно показать, что

$$\mathcal{T}_{1/n} \subset C^*(T_{\Phi_{1/n}}, T_{\Phi_{m/n^2}}) \cong \mathcal{T}_{1/n^2},$$

и для любого $k$

$$\mathcal{T}_{1/n^k} \subset C^*(T_{\Phi_{1/n^k}}, T_{\Phi_{m/n^{k+1}}}) \cong \mathcal{T}_{1/n^{k+1}}.$$

Таким образом, получаем последовательность $C^*$-алгебр Теплица

$$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_{1/n} \subset \mathcal{T}_{1/n^2} \subset \mathcal{T}_{1/n^3} \subset \dots,$$

в которой каждая следующая $C^*$-алгебра является инверсным расширением предыдущей.

**Теорема 6.** *Индуктивный предел $C^*$-алгебр Теплица*

$$\mathcal{T}_1 \xrightarrow{j} \mathcal{T}_{1/n} \xrightarrow{j} \mathcal{T}_{1/n^2} \dots,$$

*где $j$ – вложение, порождает $C^*$-алгебру, изоморфную $C^*_{red}(\mathbb{Q}^{(n)}_+)$, где $\mathbb{Q}^{(n)}$ – полугруппа рациональных чисел, порожденная числами вида $m/n^k$, где $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, а $\mathbb{Q}^{(n)}_+ = \mathbb{Q}_+ \cap \mathbb{Q}^{(n)}$.*

Рассмотрим теперь случай, когда $t$ – иррациональное положительное число. Пусть $\Gamma$ – группа, порожденная числами $m+nt$, всюду плотная в $\mathbb{R}$, где $m$, $n\in\mathbb{Z}$. Обозначим $\Gamma_+=\Gamma\cap\mathbb{R}_+$.

**Теорема 7.** *Пусть* $C^*(T_{\Phi_1},T_{\Phi_t})$ – $C^*$*-алгебра, порожденная* $T_{\Phi_1}$ *и* $T_{\Phi_t}$. *Тогда* $C^*(T_{\Phi_1},T_{\Phi_t})$ *канонически изоморфна* $C^*_{red}(\Gamma_+)$.

**Доказательство.** Пусть представление $\pi:\Gamma_+\to B(H^2)$ задано следующим образом:

$$m+nt\mapsto\begin{cases} T^m_{\Phi_1}T^n_{\Phi_t}, & \text{если } n>0,\quad m>0;\\ (T^*_{\Phi_1})^{|m|}T^n_{\Phi_t}, & \text{если } n>0,\quad m<0;\\ (T^*_{\Phi_t})^{|n|}T^m_{\Phi_1}, & \text{если } n<0,\quad m>0.\end{cases}$$

Нетрудно показать, так же как и при доказательстве теоремы 2, что

$$\pi(m+nt)=T_{\Phi_{m+nt}},$$

поэтому очевидно, что $T_{\Phi_{m+nt}}$ является изометрическим оператором-мультипликатором умножения на внутреннюю функцию $\Phi_{m+nt}$ $(m+nt>0)$. Заметим, что $C^*(T_{\Phi_1},T_{\Phi_t})$ порождается изометрическим представлением $\pi$.

Таким образом, из теоремы Дугласа [2] следует, что $C^*(T_{\Phi_1},T_{\Phi_t})$ канонически изоморфна $C^*_{red}(\Gamma_+)$. □

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору С.А. Григоряну за полезные обсуждения и ценные указания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-97016).

**Summary**

*T.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, V.A. Tepoyan.* On the Extension of the Toeplitz Algebra.

We study the $C^*$-extensions of the Toeplitz algebras with the assistance of isometric operators. It is shown that in the case when the Toeplitz algebra acts irreducibly, all such $C^*$-extensions generate the same algebra, i.e., there is no non-trivial extension of the Toeplitz algebra. We provide the examples of the non-trivial extensions of the Toeplitz algebra in the case when its representation is reducible.

**Key words:** inverse semigroup, inverse representation, Toeplitz algebra, $\pi$-extension, inverse $\pi$-extension, $C^*$-algebra.

**Литература**

1. *Coburn L.A.* The $C^*$-algebra generated by an isometry // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73. – P. 722–726.
2. *Douglas R.G.* On the $C^*$-algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. – 1972. – V. 128, No 1. – P. 143–152.
3. *Murphy G.J.* Ordered groups and Toeplitz algebras // J. Operator Theory. – 1987. – V. 18, No 2. – P. 303–326.
4. *Jang S.Y.* Uniqueness property of $C^*$-algebras like the Toeplitz algebras // Trends Math. – 2003. – V. 6, No 2. – P. 29–32.
5. *Raeburn I., Vittadello S.T.* The isometric representation theory of a perforated semigroup // J. Operator Theory. – 2009. – V. 62, No 2. – P. 357–370.

6. *Grigoryan S.A., Tepoyan V.H.* On isometric representations of the perforated semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2013. – V. 34, No 1. – P. 85–88.

7. *Tepoyan V.H.* On isometric representations of the semigroup $\mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}$ // J. Contemp. Math. Anal. – 2013. – V. 48, No 2. – P. 51–57.

8. *Jang S.Y.* Reduced crossed products by semigroups of automorphisms // Korean Math. Soc. – 1999. – V. 36. – P. 97–107.

9. *Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф.* $C^*$-алгебры, порожденные полугруппами // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 10. – С. 68–71.

10. *Jang S.Y.* Generalized Toeplitz algebras of a certain non-amenable semigroup // Bull. Korean Math. Soc. – 2006. – V. 43, No 2. – P. 333–341.

11. *Aukhadiev M.A., Tepoyan V.H.* Isometric representations of totally ordered semigroups // Lobachevskii J. Math. – 2012. – V. 33, No 3. – P. 39–243.

12. *Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф.* $C^*$-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 1. – С. 16–25.

13. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: в 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.

14. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.

15. *Арзуманян В.А.* *-представления инверсных полугрупп // Изв. Академии наук Арм. ССР. – 1978. – Т. 13, № 2. – С. 107–113.

Поступила в редакцию
28.09.12

**Григорян Тамара Анатольевна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: *tkhorkova@gmail.com*

**Липачева Екатерина Владимировна** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: *elipacheva@gmail.com*

**Тепоян Вардан Акопович** – аспирант кафедры высшей математики Казанского государственного энергетического университета.

E-mail: *tepoyan.math@gmail.com*