КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ

Н.Р. Хуснутдинов

Расчетные задания и методические указания по курсу Векторный и тензорный анализ

Учебно-методическое пособие

КАЗАНЬ 2014

УДК 517

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»*

*методической комиссии института физики
Протокол № 6 от 25 июня 2014 г.*

*заседания кафедры теории относительности и гравитации
Протокол № 5 от 20 июня 2014 г.*

Автор-составитель
доктор физ.-мат. наук, доц. Н.Р. Хуснутдинов

Рецензент
доктор физ.-мат. наук, доцент А.А. Попов

Расчетные задания и методические указания по курсу Векторный и тензорный анализ: Учебно-методическое пособие / Н.Р. Хуснутдинов. – Казань: Казанский университет, 2014. – 37 с.

Цель настоящего учебно-методического пособия состоит в оказании помощи студентам II-го курса физического факультета в освоении курса "Векторный и тензорный анализ". В нем содержится необходимый теоретический материал и типовые задачи с решениями.

Оглавление

1 Поверхности и линии уровня скалярных полей

Определение 1.1 *Геометрическое место точек, в которых скалярное поле v принимает постоянное значение равное C, называется поверхностью уровня или эквипотенциальной поверхностью.*

Второе название пришло из физики. Рассмотрим ситуацию, когда скалярное поле v описывает потенциальную энергию частицы во внешнем силовом поле. В этом случае поверхность уровня $v = C$ описывает такую поверхность, на которой потенциальная энергия частицы v равна постоянной C. Задавая различные значения постоянной C, можно наглядно представить себе распределение потенциала в пространстве.

Задача 1.1 *Найти поверхности уровня потенциальной энергии взаимодействия двух единичных зарядов.*

Решение. В этом случае энергия взаимодействия имеет следующий вид: $v = 1/r$, где r – расстояние между зарядами. Выберем декартову систему координат с центром в первом заряде. Тогда $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где (x, y, z) суть координаты второго заряда. Очевидно, что скалярное поле определено во всем пространстве кроме начала координат. Для нахождения эквипотенциальной поверхности приравняем потенциальную энергию (скалярное поле) u постоянной $C = v_0$. Тогда уравнение эквипотенциальной поверхности принимает вид $1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = v_0$. Отсюда, возводя в квадрат, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 1/v_0^2$. Это уравнение описывает сферу радиусом $R = |1/v_0|$. Эквипотенциальная поверхность с бóльшим значение потенциальной энергии v_0 находится ближе к началу координат (первому заряду). Таким образом, поверхностями уровня будут концентрические сферы, и скалярное поле является сферическим.

1.1 Задачи

Найти поверхности уровня скалярного поля U и поверхность, проходящую через точку M.
1.1 $U = 10^{x+y-3z},\ M(1, 2, -3)$
1.2 $U = 4x^2 + 9y^2,\ M(2, 0, 1)$
1.3 $U = \frac{2}{x^2+9y^2-4z},\ M(2, 1, 0)$
1.4 $U = x^2 - y^2 + 9z,\ M(1, 0, -1)$
1.5 $U = x + yz,\ M(-1, 0, 1)$
1.6 $U = e^{\frac{z}{x^2+y^2}},\ M(-3, 0, 1)$
1.7 $U = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ M(1, 0, 1)$

1.8 $U = \frac{y}{z}$, $M(-1,1,1)$
1.9 $U = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16}$, $M(1,1,1)$
1.10 $U = 4x^2 + 9y^2 - z$, $M(-1,1,1)$
1.11 $U = \ln\sqrt{\frac{y}{2x}}$, $M(1,1,0)$
1.12 $U = \ln \boldsymbol{r}^2$, $M(-1,1,1)$
1.13 $U = e^{\frac{z^2+y^2}{x}}$, $M(-3,0,1)$
1.14 $U = \arcsin\frac{x}{\sqrt{z^2+y^2}}$, $M(1,0,1)$
1.15 $U = e^{\boldsymbol{ar}}$, $M(3,1,1)$. $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
1.16 $U = \frac{z^2+y^2}{4x}$, $M(-3,0,1)$
1.17 $U = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16}$, $M(1,1,1)$
1.18 $U = \frac{y}{x}$, $M(-1,1,-2)$
1.19 $U = 2y + xz$, $M(1,0,1)$
1.20 $U = \frac{2}{x^2+9y^2+4z}$, $M(1,1,0)$
1.21 $U = \sin \boldsymbol{ar}$, $M(3,-1,1)$. $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
1.22 $U = \ln\frac{y}{2z^2}$, $M(1,1,1)$
1.23 $U = \frac{y}{2z^2+x^2}$, $M(-1,1,1)$
1.24 $U = \frac{x}{z^2+2y^2}$, $M(-1,-2,1)$
1.25 $U = \frac{y^2-z^2}{x^2}$, $M(-1,1,-2)$

2 Градиент и производная по направлению скалярного поля

Определение 2.1 *Градиентом скалярного поля v называется вектор, составленный из частных производных поля*

$$\operatorname{grad} v = \frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Определение 2.2 *Производной по направлению $\boldsymbol{l}$ скалярного поля v называется проекция градиента поля на это направление:*

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \textit{Пр}_l \operatorname{grad} v = \operatorname{grad} v \cdot \boldsymbol{l}. \qquad (1)$$

Вектор градиента имеет несколько полезных свойств, проясняющих его смысл:

1. Вектор $\operatorname{grad} v$ в точке M ортогонален эквипотенциальной поверхности, проходящей через эту точку.

2. Производная скалярного поля в точке M имеет наибольшее значение в направлении $\operatorname{grad} v$.

3. Максимальная скорость изменения скалярного поля в заданной точке численно равна длине вектора градиента в этой точке.

Задача 2.1 *Вычислить производную скалярного поля $v = 1/r$ в точке $M_0(1, 2, -2)$ по направлению точки $M_1(1, -1, 0)$.*

Решение. Для вычисления производной по направлению необходимо вычислить вектор градиента в точке M_0 и координаты вектора $\boldsymbol{l}$, задающего направление. Градиент поля $v = 1/r = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^3}$ равен $\operatorname{grad} v = -\boldsymbol{r}/r^3$, где $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор произвольной точки. Далее находим координаты вектора $\overrightarrow{M_0M_1} = (-2, -3, 2)$. Единичным вектором $\boldsymbol{l}$ в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ является орт вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$: $\boldsymbol{l} = \overrightarrow{M_0M_1}/|\overrightarrow{M_0M_1}| = (-2, -3, 2)/\sqrt{17}$. По определению (1) имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \operatorname{grad} v \cdot \boldsymbol{l} = -\frac{(1, 2, -2)}{27} \cdot \frac{(-2, -3, 2)}{\sqrt{17}} = \frac{12}{27\sqrt{17}}.$$

Производная по направлению одинакова вдоль любой кривой, касательной к этому направлению. Поэтому для вычисления производной по направлению достаточно задать точку, в которой вычисляется производная и кривую, проходящую через эту точку, касательная к которой совпадает с заданным направлением.

Задача 2.2 *Вычислить производную двумерного скалярного поля $w = \arctan(xy)$ в точке $M_0(2, 4)$ по направлению параболы $y = x^2$, проходящей через эту точку, в сторону увеличения абсциссы x.*

Решение. Для вычисления производной необходимо задать направление в точке M_0, т.е. касательный вектор в этой точке. Для нахождения вектора, касательного к параболе, представим ее в параметрическом виде. Простейший способ – принять переменную x за параметр t :

$$x = t, \ y = t^2.$$

Если считать переменную t "временем", то эти уравнения описывают координаты точки, движущейся по параболе. Вектор скорости движения точки касателен к траектории. Дифференцируя радиус-вектор $\boldsymbol{r} = (t, t^2)$ по "времени" t получаем, что вектор, касательный к траектории, имеет вид $\boldsymbol{v} = (1, 2t)$. Поскольку координата $v_x = 1 > 0$, то полученный вектор скорости направлен в сторону увеличения абсциссы. Точке $M_0(2, 4)$ соответствует значение параметра $t = 2$. Подставляя это значение в вектор скорости, получаем вектор, касательный к параболе в точке $M_0(2, 4)$:

$\boldsymbol{v} = (1, 4)$. Далее действуем обычным способом. Находим орт вектора скорости $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}| = (1, 4)/\sqrt{17}$. Затем вычисляем градиент в точке $M_0(2, 4)$: $\operatorname{grad} w|_{M_0} = (4, 2)/65$ и находим производную скалярного поля w в направлении вектора $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{\partial w}{\partial l} = \operatorname{grad} w \cdot \boldsymbol{l} = \frac{12}{65\sqrt{17}}.$$

2.1 Задачи

При решении задач используйте скалярное поле U и точку M из предыдущего пункта.

2.1 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{2}$

2.2 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении перпендикулярным плоскости $2x - 3y - 5z = 8$

2.3 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению к точке $M_1(2, 4, 5)$

2.4 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении радиуса-вектора этой точки

2.5 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении вектора $\boldsymbol{a} = (-1, -2, 3)$

2.6 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению градиента поля в этой точке

2.7 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению прямой $x = 2 - 3t, y = 1 - 4t, z = -2 + 6t$

2.8 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении перпендикулярным плоскости, проходящей через три точки $M_1(1, 1, 1), M_2(2, 3, 4), M_3(-1, -3, 2)$

2.9 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению к точке $M_1(-2, 0, 7)$

2.10 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении радиуса-вектора этой точки

2.11 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении вектора $\boldsymbol{a} = (1, 2, 0)$

2.12 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению градиента поля в этой точке

2.13 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z &= 7, \\ x + y - 3z &= 1. \end{cases}$$

2.14 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении перпендикулярным плоскости, отсекающей от координатного угла отрезки $3, -4, 2$

2.15 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению к точке $M_1(-1, 4, 0)$

2.16 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении радиуса-вектора этой точки

2.17 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении вектора $\boldsymbol{a} = (6, 2, -1)$

2.18 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению градиента поля в этой точке

2.19 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению прямой $\frac{-x+1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{5}$

2.20 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении перпендикулярным плоскости $x + 3y + 2z = 7$

2.21 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению прямой $\frac{-x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$

2.22 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении перпендикулярным плоскости $2(x-1) - 3(y-2) - 5(z-4) = 0$

2.23 Найти производную скалярного поля U в точке M по направлению к точке $M_1(-2, -4, 5)$

2.24 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении радиуса-вектора этой точки

2.25 Найти производную скалярного поля U в точке M в направлении вектора $\boldsymbol{a} = (1, -2, -3)$

3 Векторные линии

Определение 3.1 *Векторной линией векторного поля* $\boldsymbol{F}$ *называется кривая, направление касательной к которой в каждой ее точке совпадает с направлением вектора* $\boldsymbol{F}$ *в этой точке.*

Вектором, касательным к линии $\boldsymbol{r}(t)$, является вектор скорости $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = d\boldsymbol{r}(t)/dt$. По этой причине дифференциальное уравнение векторной линии имеет следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \lambda \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t)).$$

Векторное поле в декартовой системе координат имеет три компоненты $\boldsymbol{F} = F^x \boldsymbol{i} + F^y \boldsymbol{j} + F^z \boldsymbol{k}$. Уравнение векторной линии записывается в следующем виде:

$$\frac{\dot{x}}{F^x} = \frac{\dot{y}}{F^y} = \frac{\dot{z}}{F^z} = \lambda. \qquad (2)$$

Задача 3.1 *Найти все векторные линии векторного поля* $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$ *(b - const) и линию, проходящую через точку* $M_0(1,1,1)$.

Решение. В данном примере векторное поле имеет компоненты $F^x = -y, F^y = x, F^z = b$. Подставляя их в уравнения векторных линий (2), получаем

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}. \qquad (3)$$

Будем искать решение уравнений в виде $y = y(x), z = z(x)$. Рассмотрим вначале первую часть уравнений (3). Интегрируя это соотношение, получаем $x^2 + y^2 = C_1^2$. Таким образом, векторная линия лежит на цилиндре радиусом C_1, направленным вдоль оси z. Выразим y через x: $y = \pm\sqrt{C_1^2 - x^2}$ и используем это соотношение во втором равенстве. Получаем уравнение $\pm dx/\sqrt{C_1^2 - x^2} = dz/b$, которое легко интегрируется: $z = \pm b \arcsin(x/C_1) + C_2$. Таким образом, получаем решение в следующем виде:

$$x^2 + y^2 = C_1^2\ ,\ z = \pm b \arcsin(\frac{x}{C_1}) + C_2\ .$$

Для выяснения вида кривой перейдем к цилиндрическим координатам $x = \rho\sin\varphi, y = \rho\cos\varphi, z = z$, т.е. параметризуем векторную линию полярным углом φ. Получим

$$\rho = C_1\ ,\ z = \pm b\varphi + C_2\ .$$

Теперь уже достаточно легко нарисовать полученную векторную линию. Выберем для определенности знак " + ". Углу $\varphi = 0$ соответствует точка $M_0(0, C_1, C_2)$. После совершения полного оборота $\varphi = 2\pi$ мы попадаем в точку $M_1(0, C_1, 2\pi b + C_2)$, которая находится на расстоянии $2\pi b$ над (вдоль z) первоначальной M_0. Очевидно, это спираль с шагом $2\pi b$. Выбор другого знака " − " меняет направление движения на противоположное.

3.1 Задачи

Найти семейство векторных линий поля $\boldsymbol{F}$ и линию, проходящую через точку M.

3.1 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, M(1,-1,1)$

3.2 $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}, M(1,1,0)$

3.3 $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}, M(-1,-1,-1)$
3.4 $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}, M(1,0,-1)$
3.5 $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}, M(1,0,1)$
3.6 $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}, M(1,-1,1)$
3.7 $\boldsymbol{F} = (x+3y)\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j}, M(1,-2,1)$
3.8 $\boldsymbol{F} = \frac{2}{x}\boldsymbol{i} + \frac{1}{y}\boldsymbol{j} - \frac{2}{z}\boldsymbol{k}, M(1,-1,1)$
3.9 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}, M(1,0,0)$
3.10 $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}, M(1,0,0)$
3.11 $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}, M(1,1,1)$
3.12 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}, M(1,1,0)$
3.13 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + zy\boldsymbol{k}, M(1,0,0)$
3.14 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + zy\boldsymbol{k}, M(-2,0,0)$
3.15 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}, M(-2,1,1)$
3.16 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, M(2,1,1)$
3.17 $\boldsymbol{F} = -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, M(2,1,-1)$
3.18 $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, M(3,1,-1)$
3.19 $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}, M(-1,1,-1)$
3.20 $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + (y-z)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}, M(-1,1,-1)$
3.21 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, M(1,-2,1)$
3.22 $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 3(x-z)\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}, M(1,3,0)$
3.23 $\boldsymbol{F} = 2x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}, M(-1,1,-1)$
3.24 $\boldsymbol{F} = -(x-y)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2(z-x)\boldsymbol{k}, M(1,2,-1)$
3.25 $\boldsymbol{F} = -(x-y)\boldsymbol{i} + 2(y-x)\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}, M(1,2,1)$

4 Поток и дивергенция векторного поля

Определение 4.1 *Потоком* Π *векторного поля* $\boldsymbol{F}$ *через ориентированную поверхность* S *называется поверхностный интеграл*

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ *– единичный вектор нормали к поверхности* S*.*

Направление вектора нормали обычно оговаривается в условии задачи. В случае замкнутой поверхности направление вектора нормали выбирается "изнутри наружу".

Если векторное поле $\boldsymbol{F}$ представляет собой поле скоростей жидкости, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}$, то потоком векторного поля через поверхность является количество жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени. Если поток через замкнутую поверхность оказывается ненулевым, то это означает, что внутри поверхности есть источники ($\Pi > 0$) или стоки ($\Pi < 0$) жидкости. Для количественного описания этих стоков и источников используется понятие дивергенции векторного поля.

Определение 4.2 *Дивергенцией векторного поля $\boldsymbol{F}$ в точке M называется предел отношения потока через замкнутую поверхность, окружающую точку M, к объему области, ограниченной этой поверхностью:*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \lim_{V \to M} \frac{\iint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS}{V},$$

при стягивании поверхности к точке M.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления потока.

Задача 4.1 *Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ через часть плоскости $-x + 3y + z = 3$, $x \in [-1, 0]$, $y \in [0, 1]$ в отрицательном направлении оси z.*

Решение. Во первых, необходимо найти координаты вектора нормали. Из аналитической геометрии известно, что общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где коэффициенты (A, B, C) суть координаты вектора нормали. Очевидно, что вектор $(-A, -B, -C)$ также является вектором нормали. По условию необходимо вычислить поток в отрицательном направлении оси z. Поэтому третья компонента должна быть отрицательна. Таким образом, вектор нормали имеет вид $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Для вычисления потока необходимо иметь *единичный* вектор нормали. В качестве него берем орт вектора нормали $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{N}/|\boldsymbol{N}| = (1, -3, -1)/\sqrt{11}$. Далее вычисляем скалярное произведение $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) = (x^2 - 3xy - yz)/\sqrt{11} = (x^2 - 3xy - y(3 + x - 3y))/\sqrt{11} = (x^2 - 4xy + 3y^2 - 3y)/\sqrt{11}$. Подставляем полученное выражение в определение потока:

$$\Pi = \iint (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} (x^2 - 4xy + 3y^2 - 3y) dx dy = 5/6.$$

Здесь мы использовали известную формулу из теории поверхностных интегралов

$$dS = \sqrt{{z'_x}^2 + {z'_y}^2 + 1} dx dy = \sqrt{11} dx dy.$$

Рассмотрим более сложный пример, в котором вектор нормали имеет в различных точках поверхности различные направления.

Задача 4.2 *Вычислить поток векторного поля* $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ *через боковую поверхность цилиндра* $x^2 + z^2 = 9, y \in [1, 3]$ *в направлении внешней нормали.*

Решение. Для нахождения вектора нормали поступим следующим образом. Любую поверхность можно рассматривать как поверхность уровня некоторого скалярного поля. В нашем случае это поле имеет вид $U = x^2 + z^2 - 9$. Градиент скалярного поля, как известно, перпендикулярен поверхности уровня и коллинеарен с единичным вектором нормали. Вычисляем градиент: $\nabla U = (2x, 0, 2z)$. Нормированный вектор градиента принимаем за нормаль $\boldsymbol{n} = \nabla U / |\nabla U| = (x, 0, z)/\sqrt{x^2 + z^2}$.

Осталось правильно выбрать знак нормали. По условию необходимо вычислить поток в направлении внешней нормали. Наша поверхность является цилиндром, расположенным вдоль оси y. Очевидно, что при положительном z вектор внешней (т.е. изнутри цилиндра наружу) нормали имеет положительную третью компоненту. Полученный нами вектор нормали удовлетворяет этому требованию. Далее вычисляем скалярное произведение $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) = (x^3 + yz^2)/\sqrt{x^2 + z^2}$ и подставляем его в определение потока. Для удобства вычислений перейдем в цилиндрическую систему координат $x = \rho \cos \varphi, z = \rho \sin \varphi, y = y$. В этом случае наша поверхность описывается уравнением $\rho = 3$. Элемент поверхности $dS = \rho d\varphi dy = 3 d\varphi dy$. В итоге вычисляем поток

$$\Pi = \int_1^3 \int_0^{2\pi} 9(3 \cos^3 \varphi + y \sin^2 \varphi) d\varphi dy = 36\pi.$$

Рассмотрим другой пример с замкнутой поверхностью.

Задача 4.3 *Вычислить поток векторного поля* $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ *через поверхность сферы* $x^2 + z^2 + y^2 = 9$.

Решение. Поскольку в данном случае как векторное поле, так и все его производные непрерывны внутри и на границе замкнутой поверхности, вычисления можно производить и более простым способом – используя теорему Остроградского - Гаусса. Согласно этой теореме

$$\Pi = \iint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} dV, \tag{4}$$

при условии непрерывности поля и всех первых производных как в объеме V, так и на его границе S. Вначале вычислим дивергенцию поля :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial F^x}{\partial x} + \frac{\partial F^x}{\partial y} + \frac{\partial F^z}{\partial z} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial yz}{\partial z} = 3x + y.$$

Подставим эту функцию в правую часть (4). Для удобства вычислений перейдем в сферическую систему координат

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta, dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Таким образом,

$$\Pi = \int_0^3\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(3r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi)r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi = 0.$$

Этот результат вполне понятен. Вспомним гидродинамический смысл дивергенции. Если считать векторное поле $\boldsymbol{F}$ полем скоростей жидкости, то $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ представляет собой плотность источников ($\operatorname{div}\boldsymbol{F} > 0$) или стоков ($\operatorname{div}\boldsymbol{F} < 0$) в этом объеме. В нашем случае $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 3x+y$. Если $\operatorname{div}\boldsymbol{F} > 0$ в какой-либо точке $M(x, y, z)$, то в центрально-симметричной к ней точке $M'(-x, -y, -z)$ $\operatorname{div}\boldsymbol{F} < 0$. Поверхность, через которую мы вычисляем поток, тоже центрально-симметричная (сфера с центром в начале координат). Таким образом, внутри сферы плотность источников жидкости равняется плотности стоков, и поэтому поток через сферу будет равен нулю.

4.1 Задачи

Вычислить дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{F}$ и его поток через поверхность S.

4.1 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$, $S : \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$

4.2 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 + z = 9, x < 0, y < 0, z > 0\right\}$

4.3 $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, S : *Треугольник с вершинами в точках* $A(0, 0, 4), B(-2, 1, 0), C(2, 1, 0)$

4.4 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 = (z-1)^2, y < 0, 1 > z > -1\right\}$

4.5 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$, $S : \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x < 0, y < 0, z > 0\right\}$

4.6 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$, $S : \left\{x^2 + y^2 + z = 9, x > 0, 0, y > 0, z > 0\right\}$

4.7 $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 + z = 9, x > 0, z > 0\right\}$

4.8 $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}$, S : *Треугольник с вершинами в точках* $A(0, 0, 5), B(-2, -3, 0), C(-2, 1, 0)$

4.9 $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, $S : \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, z > 0\right\}$

4.10 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 + z = 9, y > 0, z > 0\right\}$

4.11 $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}$, $S : \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z < 0\right\}$

4.12 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$, $S : \left\{x^2 + y^2 = (z-1)^2, x > 0, y > 0, 1 > z > 0\right\}$

4.13 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $S : \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y > 0, z > 0\right\}$

4.14 $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 + z = 9, -1 < z < 0\right\}$
4.15 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$, S : *Треугольник с вершинами в точках* $A(0,0,1)$, $B(1,1,0), C(1,-1,0)$
4.16 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + z^2 = (y-1)^2, x > 0, z > 0, 1 > y > -1\right\}$
4.17 $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$, S : *Треугольник с вершинами в точках* $A(0,0,-1), B(-1-,1,0), C(1,-1,0)$
4.18 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, S : *Треугольник с вершинами в точках* $A(0,0,-3), B(2,-1,0), C(-2,1,0)$
4.19 $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$, $S : \left\{y^2 + z^2 = (x+2)^2, x > 0, 0 > x > -2\right\}$
4.20 $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} + (y+z)\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 = (-z+1)^2, 1 > z > -2\right\}$
4.21 $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{r}$, $S : \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, x > 0, y > 0, z > 0\right\}$
4.22 $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$, $S : \left\{x^2 + y^2 + 3z = 9, x < 0, y < 0, z > 0\right\}$
4.23 $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$, S : *Треугольник с вершинами в точках* $A(0,0,2), B(-2,1,0), C(2,1,0)$
4.24 $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$, $S : \left\{2x^2 + 2y^2 = (z-1)^2, y < 0, 1 > z > -1\right\}$
4.25 $\boldsymbol{F} = 3x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$, $S : \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{9}{c^2} = 1, x < 0, y < 0, z > 0\right\}$

5 Циркуляция и ротор векторного поля

Определение 5.1 *Циркуляцией векторного поля* $\boldsymbol{F}$ *вдоль пути* γ *называется криволинейный интеграл*

$$\text{Циркуляция} = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l},$$

вычисленный вдоль этого пути.

Важной локальной характеристикой векторного поля является плотность циркуляции.

Определение 5.2 *Плотностью циркуляции векторного поля* $\boldsymbol{F}$ *в точке* M *в направлении вектора* $\boldsymbol{n}$ *называется плотность циркуляции в этой точке по любой поверхности* S*, имеющей в качестве нормали (в точке* M*) вектор* $\boldsymbol{n}$*:*

$$\lim_{\sigma \to 0} \frac{\oint_l \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l}}{\sigma} .$$

Плотность циркуляции в точке M в направлении нормали $\boldsymbol{n}$ зависит как от точки M, так и от направления $\boldsymbol{n}$, но не зависит от поверхности, проходящей через эту точку. Поэтому плотность циркуляции можно представить в виде скалярного произведения двух векторов: вектора ротора $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$, который зависит от точки, и вектора нормали $\boldsymbol{n}$. Таким образом, плотность циркуляции в т. M в направлении $\boldsymbol{n}$ равна $(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})$. В декартовой системе координат $\boldsymbol{F} = F^x\boldsymbol{i} + F^y\boldsymbol{j} + F^z\boldsymbol{k}$ и

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F^z}{\partial y} - \frac{\partial F^y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F^x}{\partial z} - \frac{\partial F^z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

Чтобы легче запомнить эту формулу, ее удобно записать в виде формального определителя

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^x & F^y & F^z \end{vmatrix}.$$

Определение 5.3 *Ротором векторного поля* $\boldsymbol{F}$ *является вектор* $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$*, компоненты которого представляют собой плотности циркуляции поля в направлении координатных осей.*

Рассмотрим некоторые типовые задачи.

Задача 5.1 *Вычислить циркуляцию векторного поля* $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$ *вдоль отрезка прямой* $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z+4}{4}$ *от точки* $M_0(1,-1,-4)$ *до точки* $M_1(3,-1,0)$.

Решение. Для вычисления циркуляции необходимо вначале задать кривую в параметрическом виде. В данном случае кривой является прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{a} = (2,0,4)$. Общее уравнение прямой легко переписать в параметрическом виде: $x = 1 + 2t, y = -1, z = -4 + 4t$. Точке $M_0(1,-1,-4)$ соответствует $t = 0$, поскольку в точке M_0 координата $x = 1 = 1 + 2t$, а точке $M_1(3,-1,0)$ соответствует $t = 1$. Подставим эту прямую в определение циркуляции

$$\int_{M_0}^{M_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{M_0}^{M_1} (x^2dx + xydy + yzdz) = \int_0^1 (18 - 8t + 8t^2)dt = \frac{50}{3}.$$

Задача 5.2 *Вычислить циркуляцию векторного поля* $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ *вдоль замкнутой кривой* $r = 49, \theta = \pi/4, \varphi \in [0, 2\pi]$*, где* (r,θ,φ) *– сферические координаты.*

Решим задачу двумя способами: используя теорему Стокса и прямым вычислением. Теорема Стокса утверждает, что

$$\textit{Циркуляция} = \oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})dS, \qquad (5)$$

при условии непрерывности поля и его ротора в области S и на его границе. Вначале вычислим ротор

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = (y - 2x)\boldsymbol{j} + (y - z)\boldsymbol{k}.$$

Поверхность интегрирования в формуле Стокса (5) выбирается так, чтобы контур интегрирования лежал на ней. В нашем случае контур представляет собой окружность радиуса $R = 7\sin\pi/4 = 7/\sqrt{2}$, расположенную параллельно плоскости xOy и на расстоянии $d = 7\cos\pi/4 = 7/\sqrt{2}$ от нее. Удобно провести через нее плоскость $z = 7/\sqrt{2}$, поскольку вектор нормали к ней будет постоянным вектором, что упрощает вычисления. Очевидно, что вектор нормали коллинеарен вектору $\boldsymbol{k}$. Для правильного выбора направления вектора нормали ($+\boldsymbol{k}$ или $-\boldsymbol{k}$) необходимо использовать правило согласования направления нормали с обходом контура. Необходимо выбирать такое направление нормали, чтобы направление обхода контура было против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора нормали. Поскольку $\varphi \in [0, 2\pi]$ то, очевидно, что правильно выбрать $\boldsymbol{n} = +\boldsymbol{k}$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\textit{Циркуляция} &= \iint (\operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}) dS = \iint (y - z) dS = \\
&= \int_0^{7/\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (\rho \sin\varphi - 7/\sqrt{2}) \rho d\rho d\varphi = -\frac{343\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

При вычислении мы перешли к полярной системе координат на плоскости $z = 7/\sqrt{2}$.

Получим циркуляцию прямым вычислением. Для этого необходимо параметризовать кривую. Очевидно, что окружность лежит в плоскости $z = 7/\sqrt{2}$. Введем в этой плоскости полярные координаты $x = 7/\sqrt{2}\cos\varphi$, $y = 7/\sqrt{2}\sin\varphi$, т.е., мы параметризовали окружность полярным углом φ. Теперь вычисляем циркуляцию

$$\begin{aligned}
\textit{Циркуляция} &= \int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int (yzdx + xydy + x^2 dz) = \\
&= \left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)^3 \int_0^{2\pi} (-\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos^2\varphi) d\varphi = -\frac{343\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

5.1 Задачи

Вычислить ротор векторного поля $\boldsymbol{F}$ и его циркуляцию вдоль пути Γ.

5.1 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$, $\Gamma : \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + y + z = 0\right\}$

5.2 $\boldsymbol{F} = (x + z)\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j} + (y + z)\boldsymbol{k}$, Γ : *контур треугольника с вершинами в точках* $A(0, 0, 0), B(1, 1, 2), C(-1, 0, 4)$

5.3 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 4\right\}$

5.4 $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{4x^2 + 9y^2 + z = 4, z = 3\right\}$

5.5 $\boldsymbol{F} = (x + 2y)\boldsymbol{i} + (z - 2y)\boldsymbol{j} + (2x - z)\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0, z = -3\right\}$

5.6 $\boldsymbol{F} = r^2\boldsymbol{r}$, $\Gamma : \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + y + z = 0\right\}$

5.7 $\boldsymbol{F} = (x - 2z)\boldsymbol{i} + (x - 3y)\boldsymbol{j} + (y - z)\boldsymbol{k}$, Γ : *контур треугольника с вершинами в точках* $A(0, 0, 1), B(1, -1, 2), C(1, 0, 4)$

5.8 $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} - xz\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1, z = 3\right\}$

5.9 $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{9x^2 + 4y^2 + z = 10, z = -3\right\}$

5.10 $\boldsymbol{F} = (2x + 3y)\boldsymbol{i} + (2z - 5y)\boldsymbol{j} + (x - z)\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \{9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 - z^2 = 0, z = -2\}$

5.11 $\boldsymbol{F} = -x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 16, x + y + z = 0\right\}$

5.12 $\boldsymbol{F} = (2x - z)\boldsymbol{i} + 3(x - y)\boldsymbol{j} + 2(y - z)\boldsymbol{k}$, Γ : *контур треугольника с вершинами в точках* $A(1, 0, 1), B(1, 1, 2), C(-1, 0, 4)$

5.13 $\boldsymbol{F} = 2zy\boldsymbol{i} - 3xz\boldsymbol{j} - xy\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1, z = 10\right\}$

5.14 $\boldsymbol{F} = z^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{9x^2 + 4y^2 + 3z = 30, z = -2\right\}$

5.15 $\boldsymbol{F} = (x-3y)\boldsymbol{i}+(2z+7y)\boldsymbol{j}+3(x-z)\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \{9(x+1)^2+4y^2-z^2 = 0, z = -4\}$

5.16 $\boldsymbol{F} = -z\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 16, 2x + y + z = 0\right\}$

5.17 $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + 3(x + y)\boldsymbol{j} + (2y - z)\boldsymbol{k}$, Γ : *контур треугольника с вершинами в точках* $A(1, 1, 1), B(-1, 0, 2), C(1, 0, 4)$

5.18 $\boldsymbol{F} = -3zy\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} - 5xz\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1, z = 11\right\}$

5.19 $\boldsymbol{F} = 2z^2\boldsymbol{i} + 3x^2\boldsymbol{j} + 4y^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{16x^2 + 4y^2 + 2z = 40, z = -1\right\}$

5.20 $\boldsymbol{F} = (3x-y)\boldsymbol{i}+(x+7y)\boldsymbol{j}+(3x-z)\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \{9x^2+4(y-1)^2-z^2 = 0, z = -2\}$

5.21 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}$, $\Gamma : \left\{x^2 + y^2 + z^2 = 9, 2x + 3y + z = 0\right\}$

5.22 $\boldsymbol{F} = -(x + z)\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j} + 2(y + z)\boldsymbol{k}$, Γ : *контур треугольника с вершинами в точках* $A(0, 0, 0), B(2, 1, 2), C(-1, 0, 4)$

5.23 $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, z = 5\right\}$

5.24 $\boldsymbol{F} = 2y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{4x^2 + 9y^2 + z = 6, z = 2\right\}$

5.25 $\boldsymbol{F} = 2(x + 2y)\boldsymbol{i} + 3(z - 2y)\boldsymbol{j} + (2x - z)\boldsymbol{k}$, $\Gamma : \left\{9x^2 + y^2 - z^2 = 0, z = -3\right\}$

6 Оператор Гамильтона ∇.

Определение 6.1 *Оператором Гамильтона является вектор, компонентами которого являются операторы взятия частных производных*

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

За этим оператором закрепилось название "набла"[1].

Используя это определение, легко переписать градиент скалярного поля, дивергенцию и ротор векторного поля, а также Лапласиан в следующем виде:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u, \;\; \operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}, \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}, \;\; \triangle u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u.$$

Другими словами, градиент скалярного поля представляет собой произведение вектора набла на это поле. Дивергенция и ротор векторного поля – соответственно, скалярное и векторное произведение вектора набла и векторного поля. Оператор Лапласа представляет собой квадрат оператора Гамильтона.

Вектор набла является оператором, поэтому в выражениях, содержащих оператор Гамильтона, необходимо следить за порядком следования символов. Оператор набла всегда действует слева направо. В физической литературе используют оператор, действующий справа налево, а также разницу действия слева направо и справа налево, помечая символ набла соответствующим значком

$$\overset{\leftarrow}{\nabla} u = \nabla u, \;\; u \overset{\leftrightarrow}{\nabla} v = u \nabla v - v \nabla u.$$

Поскольку оператор Гамильтона имеет дифференциальные и векторные свойства, то при раскрытии выражений, содержащих этот оператор, вначале необходимо учитывать его дифференциальные свойства (правило Лейбница), а затем уже его векторные свойства.

Задача 6.1 *Доказать равенство*

$$\operatorname{rot}(u\boldsymbol{F}) = u \operatorname{rot} \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \times \operatorname{grad} u.$$

Решение. В терминах оператора Гамильтона левая часть имеет следующий вид: $\nabla \times (u\boldsymbol{F})$. Учтем вначале дифференциальные свойства оператора Гамильтона $\nabla \times (\overset{\vee}{u}\boldsymbol{F}) + \nabla \times (u\overset{\vee}{\boldsymbol{F}})$. Здесь значком $\vee$ помечается величина, на которую действует оператор ∇ дифференциальным образом. Затем мы переносим действие оператора на соответствующую величину с учетом его векторных свойств. Первая величина является скаляром, и поэтому набла действует на него давая градиент, но векторное произведение остается действующим на следующий вектор: $\nabla \times (\overset{\vee}{u}\boldsymbol{F}) = (\nabla u) \times \boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F} \times \operatorname{grad} u$. Второе слагаемое раскрывается вполне очевидным образом

[1]Набла - древнеассирийская арфа, имеющая внешнее сходство с символом оператора Гамильтона. Название было предложено Р. Смитом, другом Максвелла, в личной переписке и постепенно стало традиционным

$\nabla \times (u\overset{\vee}{\boldsymbol{F}}) = u\nabla \times \boldsymbol{F} = v \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$. Складывая оба члена получаем правую часть выражения.

Задача 6.2 *Доказать равенство*

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - \triangle\boldsymbol{F}.$$

Решение. Левая часть имеет вид двойного векторного произведения $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})$. Применим к двойному векторному произведению известную формулу "бац – цаб" из аналитической геометрии $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. Получаем $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla\boldsymbol{F}) - (\nabla\cdot\nabla)\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - \triangle\boldsymbol{F}$. Поскольку оператор Гамильтона действует направо, то необходимо располагать вектор $\boldsymbol{F}$ справа. Оператор Лапласа действует на каждую компоненту вектора $\boldsymbol{F}$ как на скаляр.

6.1 Задачи

6.1 Доказать: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{H}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{H}$
6.2 Вычислить: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.3 Вычислить $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор, u – скалярное поле
6.4 Доказать: $\triangle e^u = e^u\left(\triangle u + (\operatorname{grad} u)^2\right)$
6.5 Доказать: $\triangle u(v) = u'_v\triangle v + u''_{vv}(\operatorname{grad} v)^2$
6.6 Вычислить: $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}))$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.7 Вычислить: $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b}))$, где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы
6.8 Доказать: $\triangle(uv) = u\triangle v + v\triangle u + 2(\operatorname{grad} u\cdot\operatorname{grad} v)$
6.9 Доказать: $\triangle\ln u = \frac{\triangle u}{u} - \left(\frac{\operatorname{grad} u}{u}\right)^2$
6.10 Вычислить: $\operatorname{div}(u\operatorname{grad} v)$
6.11 Вычислить: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{E}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{H})$
6.12 Доказать: $\operatorname{rot}(u(r)\boldsymbol{a}) = \frac{u'}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.13 Доказать: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u\times\operatorname{grad} v) = 0$
6.14 Доказать: $\operatorname{div}((\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{r}) = -2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.15 Доказать: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ – постоянные векторы
6.16 Доказать: $\operatorname{rot}((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{r}) = 3(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.17 Вычислить: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.18 Вычислить: $\operatorname{rot}(u\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.19 Вычислить: $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.20 Доказать: $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.21 Доказать: $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})) = -\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}$ – постоянные векторы
6.22 Вычислить: $\operatorname{div}(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}))$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор
6.23 Вычислить: $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}))$, где $\boldsymbol{a}$ – постоянный вектор

6.24 Вычислить: $\mathrm{grad}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})$
6.25 Вычислить: $\triangle(u^2)$

7 Криволинейные координаты

Определение 7.1 *Говорят, что в области V пространства заданы криволинейные координаты, если каждой точке пространства M взаимно-однозначно поставлена в соответствие тройка чисел (q^1, q^2, q^3).*

Другими словами, координаты представляют собой способ нумерации точек пространства.

Через каждую точку пространства проходят три координатные линии, на каждой из которых одна координата меняется, а пара других постоянна. Тройка единичных векторов, касательных к координатным линиям, называется координатным базисом. Координаты разделяются на ортогональные и косоугольные в зависимости от того, ортогонален или нет координатный базис в каждой точке. Координатами (F^1, F^2, F^3) векторного поля являются коэффициенты разложения по координатному базису:

$$\boldsymbol{F} = F^1\boldsymbol{e}_1 + F^2\boldsymbol{e}_2 + F^3\boldsymbol{e}_3.$$

Ортогональная система координат характеризуется тройкой функций (H_1, H_2, H_3), называемых коэффициентами Ламэ. При смещении вдоль k-ой координатной линии q_k на расстояние dl_k соответствующая координата изменяется на dq_k.

Определение 7.2 *Коэффициентом Ламэ H_k называется коэффициент пропорциональности между приращением координаты dq^k и приращением соответствующей длины dl_k:*

$$dl_k = H_k dq^k.$$

Дифференциальные операции над скалярным и векторным полями в ортогональной системе координат полностью определяются коэффициентами Ламэ. Приведем соответствующие формулы для градиента, лапласиана, дивергенции и ротора:

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\triangle u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q^3}\right)\right\},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial(F^1 H_2 H_3)}{\partial q^1} + \frac{\partial(F^2 H_3 H_1)}{\partial q^2} + \frac{\partial(F^3 H_1 H_3)}{\partial q^3} \right\},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial(F^3 H_3)}{\partial q^2} - \frac{\partial(F^2 H_2)}{\partial q^3} \right\} \boldsymbol{e}_1 +$$

$$+ \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial(F^1 H_1)}{\partial q^3} - \frac{\partial(F^3 H_3)}{\partial q^1} \right\} \boldsymbol{e}_2 +$$

$$+ \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial(F^2 H_2)}{\partial q^1} - \frac{\partial(F^1 H_1)}{\partial q^2} \right\} \boldsymbol{e}_3.$$

В физике наиболее часто используются три системы координат – декартова, цилиндрическая и сферическая. Приведем сводку формул для этих систем координат.

I Декартовы координаты $(q^1, q^2, q^3) = (x, y, z)$. В этой системе координат все коэффициенты Ламэ равны единице: $H_x = H_y = H_z = 1$. Квадрат длины между бесконечно близкими точками

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

II Цилиндрические координаты $(q^1, q^2, q^3) = (\rho, \varphi, z)$. Координата ρ имеет смысл расстояния от точки до оси z. Область изменения координат: $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$. Связь с декартовыми координатами

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& \rho \cos\varphi \\ y &=& \rho \sin\varphi \\ z &=& z \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \rho &=& \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &=& \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ z &=& z \end{array} \right.$$

Коэффициенты Ламэ $H_\rho = H_1 = 1, H_\varphi = H_2 = \rho, H_z = H_3 = 1$. Квадрат длины между бесконечно близкими точками

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial \rho} \boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{e}_z,$$

$$\triangle u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F^\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F^z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial F^z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F^\varphi}{\partial z} \right\} \boldsymbol{e}_\rho + \left\{ \frac{\partial F^\rho}{\partial z} - \frac{\partial F^z}{\partial \rho} \right\} \boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial(\rho F^\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F^\rho}{\partial \varphi} \right\} \boldsymbol{e}_z.$$

III Сферические координаты $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, \varphi)$. Координата r имеет смысл расстояния от точки до начала координат. Область изменения координат: $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Связь с декартовыми координатами

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$$

Коэффициенты Ламэ $H_r = H_1 = 1, H_\theta = H_2 = r, H_\varphi = H_3 = r\sin\theta$. Квадрат длины между бесконечно близкими точками

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Дифференциальные операции:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F^r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta F^\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F^\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left\{\frac{\partial(\sin\theta F^\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial F^\theta}{\partial\varphi}\right\}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F^r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF^\varphi)}{\partial r}\right\}\boldsymbol{e}_\theta + \\ + \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial(rF^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F^r}{\partial\theta}\right\}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{6}$$

7.1 Задачи

Вычислить градиент и лапласиан скалярного поля u; дивергенцию и ротор векторного поля $\boldsymbol{F}$ в соответствующей системе координат.

7.1 $u = xyz$, $\boldsymbol{F} = r^2\boldsymbol{e}_r + r^2\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

7.2 $u = e^x + e^y + e^z$, $\boldsymbol{F} = \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{e}_\varphi + a\boldsymbol{e}_z$, цилиндрические координаты, a – постоянная

7.3 $u = x + y + z$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{r}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\varphi}{r}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

7.4 $u = x^2 + y^2 - z^2$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z$, цилиндрические координаты

7.5 $u = e^x + e^{y+z}$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

7.6 $u = x + y - 2z$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{\rho^2}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты

7.7 $u = x^2 - y^2 - z^2$, $\boldsymbol{F} = r\sin\varphi\boldsymbol{e}_r + r\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

7.8 $u = \ln(x^2 + z^2)$, $\boldsymbol{F} = \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{e}_z + \rho\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты

7.9 $u = x^2y + z^2x$, $\boldsymbol{F} = r\cos\theta\boldsymbol{e}_r + r\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\theta + a\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты, a – постоянная

7.10 $u = \operatorname{arctg}\frac{x}{z}$, $\boldsymbol{F} = \rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_r + \rho\sin 2\varphi\boldsymbol{e}_z + a\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты, a – постоянная

7.11 $u = \ln(y^2 + z^2)$, $\boldsymbol{F} = a^2\sin 2\varphi\boldsymbol{e}_r + r^2\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\theta + r^2\operatorname{tg}\theta\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты, a – постоянная

7.12 $u = z^2y + y^2x$, $\boldsymbol{F} = a^2\sin 2\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho^2\sin 2\varphi\boldsymbol{e}_z + \rho^2\operatorname{tg}\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты, a – постоянная

7.13 $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{z}$, $\boldsymbol{F} = r\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_r + a\sin 2\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты, a – постоянная

7.14 $u = -x^2 + y^2 - z^2$, $\boldsymbol{F} = \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + a\sin 2\varphi\boldsymbol{e}_z + \rho\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты, a – постоянная

7.15 $u = \ln(x^2 + y^2)$, $\boldsymbol{F} = ar\boldsymbol{e}_r + r^2\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta + r^2\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты, a – постоянная

7.16 $u = x^3 + z^2x$, $\boldsymbol{F} = a\rho\boldsymbol{e}_\rho + \rho^2\sin\varphi\boldsymbol{e}_z + \rho^2\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты, a – постоянная

7.17 $u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $\boldsymbol{F} = r\sin\varphi\cos\theta\boldsymbol{e}_r + r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta + r\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

7.18 $u = \ln(y^2 + z^2 + 1)$, $\boldsymbol{F} = \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_z + \rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты

7.19 $u = z^3 + y^2x$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{r}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\varphi}{r}\boldsymbol{e}_\theta$, сферические координаты

7.20 $u = \operatorname{arctg}\frac{2y}{z}$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi$, цилиндрические координаты

7.21 $u = xyz^2$, $\boldsymbol{F} = 3r^2\boldsymbol{e}_r + r^2\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$, сферические координаты

7.22 $u = e^x + 2e^y + 3e^z$, $\boldsymbol{F} = -3\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho\boldsymbol{e}_\varphi + a\boldsymbol{e}_z$, цилиндрические координаты, a – постоянная

7.23 $u = 2x + 3y + z$, $\boldsymbol{F} = -2\frac{\cos\varphi}{r}\boldsymbol{e}_r + 2\frac{\sin\varphi}{r}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

7.24 $u = 2x^2 + 3y^2 - z^2$, $\boldsymbol{F} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\rho - 4\frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_z$, цилиндрические координаты

7.25 $u = 3e^x - e^{y+z}$, $\boldsymbol{F} = -4\frac{\cos\varphi}{r^2}\boldsymbol{e}_r + \frac{5}{r^2}\boldsymbol{e}_\varphi$, сферические координаты

8 Потенциальные поля

Определение 8.1 *Векторное поле* $\boldsymbol{F}$ *называется потенциальным, если оно представимо в виде градиента скалярного поля* u*:* $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$.

Скалярное поле в этом случае называется потенциалом поля. Потенциал поля определен с точностью до константы. Для физики такие поля представляют большой интерес. Если поле сил является потенциальным, то можно легко определить потенциальную энергию тела в поле таких сил. Например, гравитационное поле является потенциальным. Хорошо известно, что сила тяготения $\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} U$. Здесь $U = -GMm/r$ является потенциалом поля сил тяготения. Для выяснения потенциальности поля используется следующая теорема.

Теорема 8.1 *Для того, чтобы дифференцируемое векторное поле $\boldsymbol{F}$ было потенциальным в односвязной области необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым, т.е.* $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = 0$.

Потенциальные поля обладают следующим свойством:

Теорема 8.2 *Циркуляция потенциального поля вдоль пути от точки M_1 до точки M_2 не зависит от пути и представляет собой разность потенциала в точках M_2 и M_1:*

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = u(M_2) - u(M_1).$$

Другая формулировка этой теоремы:

Теорема 8.3 *Циркуляция потенциального поля вдоль замкнутого пути равна нулю.*

Потенциал поля легко вычислить, используя следующей теоремы

Теорема 8.4 *Потенциал u векторного поля $\boldsymbol{F}$ вычисляется по формуле*

$$u(M) = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}, \tag{7}$$

где контур, соединяющий точки M_0 и M, выбирается произвольным образом.

Если контур выбрать в виде ломаной вдоль координатных осей, то получаем следующее выражение для вычисления потенциала в декартовой системе координат:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} F^x(x, y_0, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} F^y(x, y, z_0)dy + \int_{z_0}^{z} F^z(x, y, z)dz. \tag{8}$$

Задача 8.1 *Доказать, что поле $\boldsymbol{F} = 2xyz\boldsymbol{i} + x^2z\boldsymbol{j} + x^2y\boldsymbol{k}$ является потенциальным и найти его потенциал*

Решение. Непосредственным вычислением получаем, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$, и поэтому поле является потенциальным. В формуле (8) начальная точка выбирается произвольным образом. Пусть начальная точка M_0 имеет координаты (x_0, y_0, z_0). Интегрируя, получаем

$$u = x^2yz - x_0^2y_0z_0.$$

Опуская константу, получаем потенциал поля $u = x^2yz$.

Решим задачу по другому. Выпишем в явном виде систему уравнений $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyz, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2z, \ \frac{\partial u}{\partial z} = x^2y.$$

Интеграл первого уравнения имеет вид $u = x^2yz + v(y,z)$, где v – произвольная функция своих аргументов. Подставляя это решение во второе уравнение, получаем, что $v'_y = 0$, откуда следует, что $v(y,z) = w(z)$. Подставляя решение $u = x^2yz + w(z)$ в последнее уравнение, получаем, что $w' = 0$, откуда следует, что $w = const$. Таким образом, получаем тот же результат $u = x^2yz$.

Рассмотрим другой пример, где использование криволинейных координат позволяет сильно упростить вычисления.

Задача 8.2 *Доказать, что поле $\boldsymbol{F} = f(r)\boldsymbol{r}$ является потенциальным и найти его потенциал.*

Решение. В сферической системе координат $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/r$ и $\boldsymbol{F} = f(r)r\boldsymbol{e}_r$. Таким образом, $\boldsymbol{F} = (F^r(r), 0, 0)$, и с помощью (6) сразу получаем, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$, что означает потенциальность нашего поля. Расположим для простоты начальную точку в начале координат, тогда из формулы (7) получаем потенциал

$$u = \int_0^r f(r)r dr.$$

8.1 Задачи

Доказать, что поле $\boldsymbol{F}$ является потенциальным и найти его потенциал.

8.1 $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$

8.2 $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$

8.3 $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$

8.4 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$

8.5 $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$

8.6 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$

8.7 $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

8.8 $\boldsymbol{F} = \sin z\boldsymbol{i} + z\cos y\boldsymbol{j} + (x\cos z + \sin y)\boldsymbol{k}$
8.9 $\boldsymbol{F} = \frac{1}{x}\boldsymbol{i} + \frac{1}{y}\boldsymbol{j} + \frac{1}{z}\boldsymbol{k}$
8.10 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + e^z\boldsymbol{j} + ye^z\boldsymbol{k}$
8.11 $\boldsymbol{F} = ye^z\boldsymbol{i} + xe^z\boldsymbol{j} + xye^z\boldsymbol{k}$
8.12 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} + e^{yz}z\boldsymbol{j} + e^{yz}y\boldsymbol{k}$
8.13 $\boldsymbol{F} = e^x\boldsymbol{i} + e^y\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$
8.14 $\boldsymbol{F} = e^z\boldsymbol{i} + e^y\boldsymbol{j} + e^zx\boldsymbol{k}$
8.15 $\boldsymbol{F} = \sin z\boldsymbol{i} + x\cos z\boldsymbol{k}$
8.16 $\boldsymbol{F} = y\cos x\boldsymbol{i} + \sin x\boldsymbol{j}$
8.17 $\boldsymbol{F} = z\cos x\boldsymbol{i} + \sin x\boldsymbol{k}$
8.18 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$
8.19 $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x + 2y)\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$
8.20 $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + (x + 2z)\boldsymbol{k}$
8.21 $\boldsymbol{F} = -2e^{-x^2}xyz\boldsymbol{i} + e^{-x^2}z\boldsymbol{j} + e^{-x^2}y\boldsymbol{k}$
8.22 $\boldsymbol{F} = ze^{-y}\boldsymbol{i} - xze^{-y}\boldsymbol{j} + xe^{-y}\boldsymbol{k}$
8.23 $\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{1+(x+y+z)^2}$
8.24 $\boldsymbol{F} = \frac{z(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})}{1+(x+y)^2} + \operatorname{arctg}(x + y)\boldsymbol{k}$
8.25 $\boldsymbol{F} = \frac{z(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x + y)\boldsymbol{k}$

9 Соленоидальные поля

Определение 9.1 *Векторное поле $\boldsymbol{F}$ называется соленоидальным, если оно представимо в виде ротора другого поля $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$.*

Поле $\boldsymbol{A}$ называется векторным потенциалом поля $\boldsymbol{F}$. Поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{grad} W = 0$, то векторный потенциал определен неоднозначно, с точностью до градиента скалярного поля. Если поле $\boldsymbol{A}$ является потенциалом поля $\boldsymbol{F}$, то поле $\boldsymbol{A} + \operatorname{grad} W$ тоже является потенциалом этого поля.

Справедлива следующая теорема, позволяющая определить соленоидальность поля.

Теорема 9.1 *Для того, чтобы векторное поле $\boldsymbol{F}$ было соленоидальным необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = 0$.*

Для нахождения векторного потенциала поля необходимо решить систему трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}$$

относительно трех компонент вектора $\boldsymbol{A}$. Задача существенно упрощается, если учесть неоднозначность векторного потенциала. Поскольку он определен с точностью до градиента скалярного поля, то любую из компонент векторного потенциала $\boldsymbol{A}$ можно положить равной нулю. Действительно, пусть в декартовой системе координат потенциал имеет вид (A^x, A^y, A^z). Добавим к этому векторному потенциалу $\operatorname{grad} W$, где

$$W = -\int^x A^x dx.$$

Получившийся потенциал $\boldsymbol{A} + \operatorname{grad} W$ имеет первую компоненту, равную нулю.

Задача 9.1 *Доказать, что поле* $\boldsymbol{F} = 6y^2\boldsymbol{i} + 6z\boldsymbol{j} + 6x\boldsymbol{k}$ *является соленоидальным и найти его векторный потенциал.*

Решение. Дивергенция этого поля равна нулю, значит это поле соленоидальное. Рассмотрим систему уравнений для нахождения векторного потенциала

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A^z}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial z} &= 6y^2, \\
\frac{\partial A^x}{\partial z} - \frac{\partial A^z}{\partial x} &= 6z, \\
\frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y} &= 6x.
\end{aligned}$$

Положим, например, $A^x = 0$. Тогда из третьего уравнения получаем, что $A^y = 3x^2 + u(y,z)$, а из второго уравнения получаем $A^z = -6xz + v(y,z)$. Из первого уравнения имеем соотношение $v'_y - u'_z = 6y^2$. Поскольку достаточно найти частный вид векторного потенциала, то можно положить, например, $u = 0$. Тогда получаем $v(y,z) = 2y^3 + w(z)$. Положим $w = 0$. Таким образом, получаем векторный потенциал

$$\boldsymbol{A} = 3x^2\boldsymbol{j} + (2y^3 - 6xz)\boldsymbol{k}.$$

Поучим решение по другому. Назовем потенциал $\boldsymbol{B}$. Положим $B^y = 0$. Тогда из первого уравнения получаем $B^z = 2y^3 + \alpha(x,z)$, а из третьего $B^x = -6xy + \beta(x,z)$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\beta'_z - \alpha'_x = 6z$. Положим, например, $\alpha = 0$. Тогда $\beta(x,z) = 3z^2 + \gamma(x)$. Положим $\gamma(x) = 0$, тогда получаем потенциал

$$\boldsymbol{B} = (3z^2 - 6xy)\boldsymbol{i} + 2y^3\boldsymbol{k}.$$

Легко видеть, что разность двух решений

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = (6xy - 3z^2)\boldsymbol{i} + 3x^2\boldsymbol{j} - 6xz\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} W, \tag{9}$$

где $W = -3xz^2 + 3yx^2$. Таким образом, как и утверждалось выше, векторный потенциал определен с точностью до градиента скалярного поля.

9.1 Задачи

Доказать, что поле $\boldsymbol{F}$ является соленоидальным и найти его векторный потенциал.

9.1 $\boldsymbol{F} = -xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{k}$

9.2 $\boldsymbol{F} = -xy\boldsymbol{i} + 2(z-x)\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$

9.3 $\boldsymbol{F} = 2(z-x)\boldsymbol{j} + 2xy\boldsymbol{k}$

9.4 $\boldsymbol{F} = 2z\boldsymbol{j} + 2xy\boldsymbol{k}$

9.5 $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{j} + 2xy\boldsymbol{k}$

9.6 $\boldsymbol{F} = (\cos z - \cos x)\boldsymbol{j}$

9.7 $\boldsymbol{F} = \cos y\boldsymbol{i} + \cos z\boldsymbol{j} + \cos x\boldsymbol{k}$

9.8 $\boldsymbol{F} = xy\cos z\boldsymbol{j} - x\cos z\boldsymbol{k}$

9.9 $\boldsymbol{F} = -xy\cos z\boldsymbol{i} + y\sin z\boldsymbol{k}$

9.10 $\boldsymbol{F} = x\sin z\boldsymbol{i} - y\sin z\boldsymbol{j}$

9.11 $\boldsymbol{F} = (e^z - e^x)\boldsymbol{j}$

9.12 $\boldsymbol{F} = e^{-z}\boldsymbol{i} + e^{-x}\boldsymbol{j} + e^{-y}\boldsymbol{k}$

9.13 $\boldsymbol{F} = e^{-x}\boldsymbol{j} + e^{-y}\boldsymbol{k}$

9.14 $\boldsymbol{F} = e^{-y}\boldsymbol{j} + e^{-y}z\boldsymbol{k}$

9.15 $\boldsymbol{F} = -e^{-y}\boldsymbol{i}$

9.16 $\boldsymbol{F} = -e^{-y}z\boldsymbol{i}$

9.17 $\boldsymbol{F} = \left(e^{-z}x - e^{-y}z\right)\boldsymbol{i} + e^{-z}\boldsymbol{k}$

9.18 $\boldsymbol{F} = \left(e^{-z}x - e^{-y}z\right)\boldsymbol{i} + \left(e^{-z} - e^{-x}\right)\boldsymbol{k}$

9.19 $\boldsymbol{F} = (z-x)(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})$

9.20 $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$

9.21 $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

9.22 $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$

9.23 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

9.24 $\boldsymbol{F} = -3y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

9.25 $\boldsymbol{F} = -3y\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4x\boldsymbol{k}$

10 Тензоры

Пусть в аффинном пространстве A_n задан базис $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, состоящий из точки O и совокупности n линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$. Будем называть его "старым" базисом. Допустим, что имеется другой базис $(O, \boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'})$, который мы назовем "новым", в котором базисные векторы выражаются линейно через старые базисные векторы с помощью невырожденной матрицы L: $\boldsymbol{e}_{k'} = L^i_{\cdot k'}\boldsymbol{e}_i$[2]. У нового

[2] По повторяющимся индексам производится суммирование (правило Эйнштейна), в данном случае в развернутом виде имеем $\boldsymbol{e}_{k'} = L^1_{\cdot k'}\boldsymbol{e}_1 + L^2_{\cdot k'}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + L^n_{\cdot k'}\boldsymbol{e}_n$.

базиса индекс будем помечать штрихом; в этом случае сам индекс несёт сведения о том, в каком базисе задан объект. В целях удобства будем различать положение индексов – верхнее и нижнее.

Вектор $\boldsymbol{x}$ в базисе $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ описывается набором n чисел, $x^k (k = 1, 2, \ldots, n)$, называемых его координатами $\boldsymbol{x} = x^k \boldsymbol{e}_k$. При преобразовании базиса этот набор чисел преобразуется с помощью обратной матрицы: $x^{k'} = L_i^{\cdot k'} x^i$. Здесь матрица $L_i^{\cdot k'}$ является обратной к $L^i_{\cdot k'}$, т.е. выполняется соотношение $L^i_{\cdot k'} L_j^{\cdot k'} = \delta^i_j$.

Тензор валентности m в базисе $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ описывается набором n^m чисел, называемых его компонентами. Определим тензор через форму преобразования его компонент при смене базиса. Есть две возможности преобразования объекта – с помощью матрицы $L^i_{\cdot k'}$ или с помощью обратной матрицы $L_k^{\cdot i'}$. Поэтому различают два вида тензоров – контравариантные (индекс вверху) и ковариантные (индекс внизу). Положение индексов определяется только удобством записи формул. Чтобы не выписывать громоздкие формулы для тензоров произвольной валентности выпишем определения только для тензоров второй валентности.

Определение 10.1 *Контравариантным (ковариантным) тензором второй валентности называется набор n^2 чисел $t^{ij} (t_{ij})$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, которые при преобразовании базиса $\boldsymbol{e}_{k'} = L^i_{\cdot k'} \boldsymbol{e}_i$ преобразуются следующим образом:*

$$t^{i'j'} = L_i^{\cdot i'} L_j^{\cdot j'} t^{ij} \ \ (t_{i'j'} = L^i_{\cdot i'} L^j_{\cdot j'} t_{ij}).$$

Аналогично определяется смешанный тензор (один раз контравариантный и один раз ковариантный).

Определение 10.2 *Смешанным тензором второй валентности называется набор n^2 чисел $t^i_{\cdot j}$, где $i, j = 1, 2, \ldots, n$, которые при преобразовании базиса $\boldsymbol{e}_{k'} = L^i_{\cdot k'} \boldsymbol{e}_i$ преобразуются следующим образом:*

$$t^{i'}_{\cdot j'} = L_i^{\cdot i'} L^j_{\cdot j'} t^i_{\cdot j}.$$

Определение 10.3 *Тензор называется симметричным (антисимметричным), если $t_{ij} = t_{ji} (t_{ij} = -t_{ji})$.*

Любой тензор можно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной частей $t_{ij} = t^{(s)}_{ij} + t^{(a)}_{ij}$, где

$$t^{(s)}_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}), \ t^{(a)}_{ij} = \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}). \tag{10}$$

Типичным примером контравариантного тензора первой валентности являются дифференциалы координат dx^i, а ковариантного тензора первой валентности – вектор градиента поля $\frac{\partial u}{\partial x^i}$. Приведем также примеры тензоров второй валентности.

В электродинамике используются несколько тензоров второй валентности – тензоры диэлектрической (магнитной) проницаемости и тензор проводимости. Обозначим электрическое (магнитное) поле в вакууме через $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{H})$, а соответствующие поля в среде через $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B})$. Связь между ними выражается линейными соотношениями

$$D^i = \varepsilon^i_{\cdot k} E^k, \;\; B^i = \mu^i_{\cdot k} H^k,$$

называемыми обычно материальными уравнениями. Коэффициенты пропорциональности являются тензорами второй валентности – тензор диэлектрической и магнитной проницаемости. Введение этих тензоров связано с потребностью описания анизотропных свойств вещества. Если поместить такой материал в электрическое поле, направленное, например, вдоль оси x, $\boldsymbol{E} = (E^x, 0, 0)$, то поле $\boldsymbol{D}$ внутри вещества имеет компоненты вдоль всех других осей

$$D^x = \varepsilon^x_{\cdot x} E^x, \;\; D^y = \varepsilon^y_{\cdot x} E^x, \;\; D^z = \varepsilon^z_{\cdot x} E^x.$$

Если тело является изотропным, то тензор диэлектрической проницаемости имеет вид символа Кронекера, $\varepsilon^i_{\cdot j} = \varepsilon \delta^i_j$. Аналогично определяется тензор проводимости

$$J^i = \sigma^i_{\cdot k} E^k,$$

где вектор $\boldsymbol{J}$ является плотностью электрического тока.

По отношению к поворотам и сдвигам пространства вектора электрического и магнитного полей являются контравариантными векторами. По отношению к преобразованиям Лоренца они таковыми не являются, а образуют антисимметричный тензор второй валентности в четырехмерном пространстве-времени Минковского, который называется тензором Максвелла. Выпишем его компоненты в декартовой системе координат в явном виде

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & H^z & -H^y & -E^x \\ -H^z & 0 & H^x & -E^y \\ H^y & -H^x & 0 & -E^z \\ E^x & E^y & E^z & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь первый индекс $i = 1, 2, 3, 4$ нумерует строки, а второй столбцы. Четыре координаты пространства Минковского $(q^1, q^2, q^3, q^4) = (x, y, z, ct)$, где c – скорость света.

В классической теории сплошной среды основным объектом является ковариантный тензор второй валентности – тензор деформаций. Если до деформации тела расстояние между точками было dl, а после деформации стало dl', то изменение квадрата длины характеризуется тензором деформаций ϵ_{ij} по формуле

$$dl'^2 - dl^2 = 2\epsilon_{ij} dx^i dx^j,$$

где dx^i – величина деформации в направлении координаты x^i.

Другим примером является тензор напряжений сплошной среды. Определяется он следующим образом. Рассмотрим в декартовой системе координат бесконечно малый элемент объема сплошной среды в форме параллелепипеда с гранями в виде координатных плоскостей перпендикулярных координатным осям. На параллелепипед действуют силы, приводящие к деформации этого параллелепипеда. Определим контравариантный вектор $d\boldsymbol{S} = dS^i \boldsymbol{e}_i$, компоненты которого в направлении $\boldsymbol{e}_i$ равны элементу площади, перпендикулярной этому направлению. В частности, $dS^3 = dS^z = dxdy$. На элемент dS^i действует сила $d\boldsymbol{F}^i$. Индекс $i = 1, 2, 3$ нумерует грани параллелепипеда. Сила, действующая на i-ю грань, является вектором: $d\boldsymbol{F}^i = dF^{ij} \boldsymbol{e}_j$. Второй индекс j нумерует компоненты вектора. Тензор напряжений определяется следующим образом:

$$\tau^{ij} = \frac{dF^{ij}}{dS^i}.$$

Другими словами, компонента τ^{ij} тензора напряжений представляет собой j-ю компоненту поверхностной плотности силы, действующей на грань, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{e}_i$. Имеются три грани, на каждую из которых действует сила, имеющая три компоненты. Получается 9 величин, составляющих тензор второго ранга.

Приведем пример тензора четвертой валентности. Обобщенный закон Гука представляет собой линейную связь тензора напряжений с тензором деформаций

$$\tau^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl}.$$

Коэффициенты пропорциональности C^{ijkl} составляют тензор четвертой валентности, имеющий в общем случае $3^4 = 81$ компоненту. Число независимых компонент этого тензора равно 21. Они связаны с такими величинами как модуль Юнга, коэффициент Пуассона и модули упругости. Для изотропного материала имеется всего две независимые компоненты.

Умножать тензоры можно двумя способами – внешним и внутренним. Пусть заданы два тензора первой валентности, контравариантный t^i и ковариантный p_k. Внешним произведением называется покомпонентное произведение $q^i_{\cdot k} = t^i p_k$. Получившийся объект является смешанным тензором второго ранга. Если в получившемся тензоре произвести суммирование по контравариантному и ковариантному индексам $t^i p_i = t^1 p_1 + t^2 p_2 + \ldots + t^n p_n$, то получившийся объект называется внутренним произведением тензоров. Если в тензоре произвести суммирование по контравариантному и ковариантному индексам, то такая процедура называется упрощением или сверткой. Валентность тензора уменьшается при этом на две единицы.

Задача 10.1 *Пусть заданы три тензора, компоненты которых в некотором базисе имеют следующий вид:*

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \ x^i = (2, 1, 4), \ \ y^i = (3, 7, -1).$$

Вычислить 1) $x^i y^j$, 2) $t_{ij} x^j$, 3) $t_{ij} x^i y^j$, 4) $t_{ij} x^j y^i$, 5) $t^{(s)}_{ij}$ и 5) $t^{(a)}_{ij}$. Здесь i – номер строки, j – номер столбца.

Решение. Мы имеем ковариантный тензор второй валентности t и два контравариантных тензора первой валентности (вектора) x и y.

1) Произведение $x^i y^j$ представляет собой внешнее произведение тензоров x и y и является контравариантным тензором второй валентности. Непосредственно перемножая компоненты получаем тензор

$$x^i y^j = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 3 & 7 & -1 \\ 12 & 28 & -4 \end{pmatrix}.$$

2) Внутреннее произведение (свертка) $t_{ij} x^j$ представляет собой ковариантный тензор первой валентности. Придавая последовательно первому индексу значения $i = 1, 2, 3$ и вычисляя суммы, получаем $t_{ij} x^j = (16, 19, 37)$.

3) В выражении $t_{ij} x^i y^j$ имеется двойная свертка. Получившийся объект является тензором нулевой валентности, т.е., скаляром. При свертке необходимо следить за порядком индексов – первый индекс сворачивается с вектором x, а второй с вектором y. Вычисление приводит к следующему выражению $t_{ij} x^i y^j = 162$. Полученное выражение будет иметь одинаковое значение в любом базисе.

4) Выражение $t_{ij} x^j y^i$ отличается от предыдущего только порядком свертки – первый индекс сворачивается с вектором y, а второй с вектором x. Вычисление приводит к следующему выражению $t_{ij} x^j y^i = 144$.

5) Для выделения симметричной части тензора используем формулу (10). Вычисление приводит к следующему выражению:

$$t_{ij}^{(s)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся матрица является симметричной.

6) Аналогичное вычисление приводит к следующему выражению:

$$t_{ij}^{(a)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получившаяся матрица является антисимметричной.

10.1 Задачи

Для данных тензоров провести соответствующие вычисления.

10.1

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ 9 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -5 \\ 7 & -4 & -7 \\ -5 & -8 & 0 \end{pmatrix}, x^i = (-2, -5, 2), y_i = (-7, 8, 8).$$

Вычислить: $t_{ij}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, t_{ij}^{(s)}, t_{ij}^{(a)}$.

10.2

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 1 \\ -3 & -9 & -4 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 9 \\ -5 & 6 & 2 \\ -8 & -3 & 1 \end{pmatrix}, x^i = (-1, 2, 7), y_i = (1, 7, -3).$$

Вычислить: $t_{ij}\tau^{ki}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, t_{ij}^{(s)}, t_{ij}^{(a)}$.

10.3

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 6 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 2 \\ 6 & -2 & -8 \\ -6 & -7 & 4 \end{pmatrix}, x^i = (-9, -3, 4), y_i = (-4, 9, -8).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.4

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -7 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -8 \\ 0 & 6 & 3 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}, x^i = (2, 9, -4), y_i = (-6, 5, -7).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{ki}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.5

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & -9 & 9 \\ -5 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -9 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}, x^i = (0, -1, -9), y_i = (-5, 7, 4).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{jk}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_i, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.6

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 7 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -9 \\ 2 & -3 & -6 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}, x^i = (-1, 2, -7), y_i = (-3, -2, -6).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{nk}, t_{ij}x^i, \tau^{ji}y_j, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, t^{(a)}_{ij}$.

10.7

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 8 \\ -6 & -6 & -7 \end{pmatrix}, x^i = (4, 9, -3), y_i = (9, 9, 4).$$

Вычислить: $t_{jk}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.8

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 9 & -7 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -9 \\ -7 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, x^i = (-8, 0, 0), y_i = (8, -1, -5).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{ik}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.9

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ -5 & 5 & -4 \end{pmatrix}, x^i = (-3, -3, 2), y_i = (0, -3, 5).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{nk}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, t^{(a)}_{ij}$.

10.10

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -4 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 4 & 4 & -5 \\ -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, x^i = (0, 0, 4), y_i = (3, 2, 1).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.11

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}, x^i = (-4, -5, 4), y_i = (-5, -5, 4).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, \tau^{ij}_{(s)}, t^{(a)}_{ij}$.

10.12

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 4 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}, x^i = (-1, 3, -1), y_i = (0, 0, 3).$$

Вычислить: $t_{ij}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.13

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ -4 & -5 & -5 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}, x^i = (-5, -2, 1), y_i = (-2, 3, -5).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, t^{(s)}_{ij}, t^{(a)}_{ij}$.

10.14

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & -3 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, x^i = (-5, -4, -5), y_i = (4, 5, -3).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.15

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ -4 & -4 & 5 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, x^i = (4, 3, 3), y_i = (-4, -4, 0).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^i y_k, t^{(s)}_{ij}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.16

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, x^i = (4, 3, 5), y_i = (-2, -2, -3).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.17

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, x^i = (-2, 1, 1), y_i = (5, 2, -3).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.18

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & -3 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & -4 \end{pmatrix}, x^i = (1, 5, -1), y_i = (-2, 3, 3).$$

Вычислить: $t_{ki}\tau^{ik}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, t^{(a)}_{ij}$.

10.19

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, x^i = (-1, 4, 5), y_i = (-1, 3, 2).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{ki}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.20

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}, x^i = (-2, -1, 4), y_i = (5, -3, 3).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{jk}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_i, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.21

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, x^i = (-1, -2, -2), y_i = (0, -2, -4).$$

Вычислить: $t_{ij}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, t^{(a)}_{ij}$.

10.22

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, x^i = (3, -2, -1), y_i = (2, 4, -4).$$

Вычислить: $t_{ij}\tau^{ki}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, t^{(s)}_{ij}, t^{(a)}_{ij}$.

10.23

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}, x^i = (-1, 0, 2), y_i = (-2, 2, 3).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{kj}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_j, x^iy_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.24

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, x^i = (-3, 3, 2), y_i = (-4, -3, 2).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{ki}, t_{ij}x^j, \tau^{ij}y_j, x^i y_j, \tau^{ij}_{(s)}, \tau^{ij}_{(a)}$.

10.25

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, x^i = (0, 1, -3), y_i = (-1, -3, 4).$$

Вычислить: $t_{ik}\tau^{jk}, t_{ij}x^i, \tau^{ij}y_i, x^i y_j, t^{(s)}_{ij}, \tau^{ij}_{(a)}$.