**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

 – МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ВЫПУСКНАЯ БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Приближенный метод решения расчета обтекания пластинки вблизи экрана

**Работа завершена:**

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2015г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.В. Ибрагимов

**Работа допущена к защите:**

Научный руководитель

Кандидат физ.-мат. наук, доцент

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2015г. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Р.Ф. Марданов

**Заведующий кафедрой:**

Доктор физ.-мат. наук, профессор

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2015г \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.Г. Егоров

Казань – 2015

|  |
| --- |
|  |

**Содержание**

Введение…………………………………………………………………………......3

Постановка задачи…………………………………………………………………4

Решение задачи……………………………………………………….………...…..6

1. Общий случай…………………………………………………………………6
2. Частные случаи………………………………………………………………11

Расчеты……………………………………………………………………………..12

Заключение……………………………………………………………………..

Список литературы…………………………………………………………….

**Введение**

 ª

Когда то люди даже представить себе не могли, что человечество покорит небеса и будет двигаться в небе. Но теперь мы живем в веке, когда слетать куда-нибудь на самолете стало простым делом. Со времен появления первых самолетов возникал вопрос не только о безопасности и комфорте, но и об оптимальных характеристиках крыловых профилей, вопрос о подъемной силе, распределения скоростей и т.д. И до наших дней остаются открытыми многие вопросы. Открытыми в том смысле, что предлагаются новые методы решения этих проблем. Важным является совпадение практических результатов и теоретических данных, полученными разными методами.

Как известно, при решении задачи проектирования профиля крыла экраноплана даже в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости (ИНЖ) встречается ряд математических трудностей, вызванных некорректностью этих задач.

В настоящей работе рассматривается задача обтекания плоской пластинки вблизи экрана. Классический подход к решению таких задач заключается в применении аппарата эллиптических функций для решения краевой задачи в двусвязной области[1]. Другой подход был предложен Д.В. Маклаковым [2], заключающийся в введении фиктивного плоскопараллельного потока ИНЖ под экраном.

В данной работе для решения предлагается способ, по­зволяющий перейти от двусвязной области течения к односвязной, но двулистной. Данный подход был использован в работах Р.Ф. Марданова [3,4]. Такой способ позволил свести исходную краевую задачу к краевой задаче для аналитической функции в верхней полуплоскости. Выполнена серия число­вых расчетов. Проверка результатов с точным решением задачи показала высокую точность разработанного метода. Сделаны выводы о применимости предложенного метода.

**Постановка задачи**



**Рис. 1.** Постановка задачи в плоскости

В физической плоскости рассмотрим обтекание пластинки длины вблизи экрана (см. рис. 1) поступательным потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью на бесконечности. Пластинка располагается под углом к экрану. Задняя кромка пластинки отстоит от экрана на высоту

Требуется определить распределение скорости и коэффициента давления по пластинке, построить картину обтекания.

Область течения является двусвязной и однолистной. Решение исходной задачи построим на основе решения вспомогательной задачи. Введем в рассмотрение течение в области, граница которой представляет из себя многоугольник , изображенный на рис.2.

**Рис. 2.** Новая постановка задачи

Точка D и M являются точками на бесконечности в комплексной плоскости на разных листах. Систему координат выберем так, чтобы точка N, получаемая пересечением прямых вдоль пластинки и экрана, была в начале координат. это точки, имеющие те же координаты точек соответственно, но в другом листе римановой поверхности.

Набегающий поток со скоростью истекает из бесконечно удаленной точки на первом листе римановой поверхности и, натекая на полигональную границу , разветвляется в точке (рис.3). Нижняя часть потока обтекая отрезок границы втекает в сужающийся канал , расположенный на втором листе римановой поверхности, в конце которого расположен точечный сток в точке . Также на втором листе располагается расширяющийся канал , откуда поступает поток ИНЖ обтекающий стенку и соединяющейся с внешним течением на первом листе после схода с острой кромки . Расходы в каналах одинаковы, обозначим их за величину .

**Рис. 3.** Картина течения в новой постановке

**Решение задачи**

**Глава I**

**Обтекание пластинки вблизи экрана**

В физической плоскости границей области течения является многоугольник (рис.2). С помощью формулы Кристоффеля — Шварца с бесконечно удаленной точкой, отобразим верхнюю полуплоскость плоскости (рис.4) на область течения в плоскости .

 – интеграл Кристоффеля — Шварца. Здесь это образы вершин многоугольника, с углами при вершинах, на вещественной оси.

c

В нашем случае интеграл будет иметь вид:



 **Рис. 4.** Каноническая плоскость

Выбирая в , найдем константу т.е.

 .

Неизвестными здесь являются

Из постановки задачи следуют следующие условия:

Добавим к этим условие замкнутости: откуда найдем

Подставляя формулу в и получим .

Деля и вынося все члены направо, получим:

Во всех этих вычислениях следует учитывать ответвление множителей подынтегральной функции на отрезках интегрирования. Приведем таблицу выделения ветвей для подынтегральных функций.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Функции\Отрезок |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Формула представляет собой нелинейное уравнение , решив которое найдем неизвестную , а затем по формуле неизвестную .

Константу найдем из :

После того как мы нашли , аналогичным образом найдем и значения .

Однако, как выяснилось в ходе числовых расчетов при некоторых значениях входных параметров (для малых ) нахождение значений не удается провести численно, т.к. они оказываются очень близкими к точкам соответственно.

 Для решения этой проблемы мы выполнили отображения из плоскости (верхняя полуплоскость) в плоскости (полуполоса) и . В точка , а в плоскости точка уходят в бесконечно удаленную точку (см. рис.3). Подробно рассмотрим первый случай чуть позже.

 Рассмотрим течение в канонической плоскости , где течению в физической плоскости будет соответствовать обтекание точечного источника расхода , расположенного в точке и точечного стока расхода , расположенного в точке . Комплексный потенциал течения легко построить методом суперпозиции

Здесь - скорость на бесконечности в плоскости . Тогда комплексно сопряженная скорость в плоскости

Точки являются критическими точками, следовательно, из условия найдем . А из условия найдем .

Тогда комплексно сопряженная скорость в физической плоскости найдем по формуле

Подставив в формулу выражение для , получим

 Вернемся к нашей проблеме. , тогда , а . Зная функцию

найдем

Также зная

 запишем

Зная эти функции, можем найти по формуле значение .

Комплексно сопряженная скорость будет иметь вид

Аналогично найдем в плоскости .

 Нижней части пластинки соответствует два отрезка и , для которых расчеты делаются отдельно. Однако, как выяснилось в ходе числовых расчетов при некоторых значениях входных параметров (для малых ), получаемые два графика очень хорошо совпадают. Например, при и получим следующую картину (рис.5). Здесь красной сплошной линией (ая кривая) распределение скорости по пластинке на отрезке, а зеленым пунктирным (ая кривая) по . Видим, что они весомо отличаются только вблизи , а в остальном участке хорошо совпадают между собой.



**Рис.5.** График распределения скоростей на отрезках и при и

При и получим картину (рис.6). Здесь также можно заметить, что в среднем участке первая и вторые кривые хорошо совпадают. Но на концах отличие уже существенное.

**

**Рис.6.** График распределения скоростей на отрезках и при и

При и получим картину (рис.7). Видим что кривые не совпадают ни на каком промежутке.



**Рис.7.** График распределения скоростей на отрезках и при и

Необходимость перехода из одной кривой в другую очевидна. Поэтому на участке сделаем переход. Здесь , . Для этого представим в виде .

В формуле является приближающей функцией. Возьмем его в виде , где константы найдем из следующих условий:

После решения этой системы, получим

Здесь и константы, которые подбираются исходя из полученных картинок.

Итак, окончательно получим

Подставляя в получим окончательное распределение скорости по пластинке с учетом перехода на отрезке . Добавив к нему график на отрезке , в итоге получим один общий график для . Здесь представим как: . Также зная по формуле найдем коэффициенты давления .

**Частные случаи**

 Этот раздел посвящается двум частным случаям, так как эти случаи не решаются вышеописанным методом. Рассмотрим их подробнее.

**Обтекание пластинки в безграничном потоке**

Рассмотрим частный случай постановки задачи – обтекание пластинки в безграничном потоке, т.е. при . Эта задача является классической и имеет решение, записываемое в аналитическом виде. Тот метод решения задачи здесь не уместен.



**Рис.8.** Постановка задачи в плоскости



**Рис.9.** В канонической плоскости

 Представим пластинку в виде рис.8. Известно, что функция Жуковского

отображает единичную окружность (рис.9) в разрез .

Комплексно сопряженная скорость имеет вид

 , cледовательно .

отсюда найдем циркуляцию . Из условия найдем . Итак, комплексно сопряженная скорость имеет вид

Зная эти функции, мы можем найти интегральные характеристики и построить картину обтекания.

**Обтекание скользящей пластинки**

Другой частный случай – случай скользящей пластинки. Эта задача также является частным случаем общей постановки задачи. В данном случае , т.е. пластинка скользит по экрану. И поэтому наш метод решения общего случая (кроме случаев ) здесь не сработает.



**Рис.10.** Постановка задачи в плоскости



 **Рис.11.** Каноническая плоскость

# В отличии от общего случая в этом случае область течения является односвязной. В качестве вспомогательной плоскости выберем плоскость комплексного потенциала, в которой области течения в физической плоскости будет соответствовать верхняя полуплоскость.

 – интеграл Кристоффеля — Шварца. Здесь это образы вершин многоугольника, с углами при вершинах, на вещественной оси.

Применяя принцип соответствия границ при конформном отображении, выберем три неподвижных точек из плоскости таким образом, чтобы они перешли в точки соответственно, в плоскости (рис.11).

В нашем случае интеграл примет вид (14).

Как видно из рис.10, , . Так как , то . Проинтегрировав формулу (14), получим (15).

Неизвестным остается . Найдем ее из следующего условия

, используя формулу и учитывая ответвление подынтегральной функции, т.е. множитель заменяется на . Итак,

Комплексно сопряженная скорость имеет вид (16).

Зная эти функции, мы можем найти интегральные характеристики и построить картину обтекания.

**Расчеты**

Сравним наши результаты с точным решением, получаемым при использовании аппарата эллиптических функций[1].

При .

Красной сплошной линией здесь изображен график распределения скорости по пластинке точного решения, а зеленым пунктирным график, получаемый нашим методом (рис.12).



**Рис.12.** Сравнение с точным решением при

Видим, что кривые с очень большой точностью совпадают.

При .

На рис.13, также красной сплошной линией изображен график распределения скорости по пластинке точного решения, а зеленым пунктирным график, получаемый нашим методом



**Рис.13.** Сравнение с точным решением при

Из рис.13 видно, что кривые тоже хорошо совпадают. Но при заметно отличие. Это связано с плохим приближением на данном участке и числовыми погрешностями.

 Из этих двух рисунков можно сделать вывод: результаты, получаемые нашим методом, хорошо совпадают с результатами точного решения. Интервал хорошего совпадения в ходе расчетов получилось , . Следовательно, наш метод хорошо применим при параметрах из этих интервалов.

График распределения скорости по пластинке при . (Рис.14)

Красным (сплошная линия) при

Зеленым (прерывистая линия) при

Синим (Линия в виде: тире две точки тире) при



**Рис.14.** График распределения скорости по пластинке при

График распределения скорости по пластинке при . (Рис.15)

Красным (сплошная линия) при

Зеленым (прерывистая линия) при

Синим (Линия в виде: тире две точки тире) при



**Рис.15.** График распределения скорости по пластинке при

График распределения скорости по пластинке при . (Рис.16)

Красным при

Зеленым при

Синим при

Голубым при

Желтым при



**Рис.16.** График распределения скорости по пластинке при

Из графика видно, что с уменьшением кривая стремится к красной линии, и наоборот, с увеличением к желтой линии.(рис.16).

График распределения скорости по пластинке при . (Рис.17)

Красным при

Зеленым при

Синим при

Голубым при

Желтым при



**Рис.17.** График распределения скорости по пластинке при

Также видим, при изменении кривые стремятся к предельным случаям (рис.17).

График распределения коэффициента давления по пластинке при . (Рис.18)

Красным (сплошная линия) при

Зеленым (прерывистая линия) при

Синим (сплошная) при



**Рис.18.** График распределения коэффициента давления по пластинке при

График распределения коэффициента давления по пластинке при . (Рис.19)

Красным при

Зеленым при

Синим при



**Рис.19.** График распределения коэффициента давления по пластинке при

График распределения коэффициента давления по пластинке при . (Рис.20)

Красным при

Зеленым при

Синим при

Голубым при

Желтым при



**Рис.20.** График распределения коэффициента давления по пластинке при

С изменением кривые стремятся к предельным случаям.

График распределения коэффициента давления по пластинке при . (Рис.21)

Красным при

Зеленым при

Синим при

Голубым при

Желтым при



**Рис.21.** График распределения коэффициента давления по пластинке при

Здесь лучше видна картина стремления кривых к предельным случаям с изменением .

Линии тока при . Голубым цветом показана линия разделения потока (рис.21).



**Рис.21.** Линии тока при

Приближенный рисунок около передней кромки (рис.22).



**Рис.22.** Приближенный рисунок линий тока при

Линии тока при (рис.23).



**Рис.23.** Линии тока при

Линии тока при (рис.24).



**Рис.24.** Линии тока при

Линии тока при (рис.25).



**Рис.25.** Линии тока при

**Заключение**

Проведены расчеты для различных углов атаки для пластинки и различных отстояний его задней кромки от экрана, по методу, основанного на сведении исходной краевой задачи для двусвязной области к односвязной, но двулистной. Получены графики распределения скоростей, коэффициента давления по пластинке. И также получены картины обтекания.

 Из анализа результатов расчетов следует, что данный метод можно успешно применять, когда угол и отстояние . При таких параметрах наше решение очень хорошо совпадает с результатом точного решения.

Из графиков видим, что около передней кромки возникают бесконечные скорости и бесконечные отрицательные коэффициенты давления, из за которых затрудняются поиск аэродинамических сил. Заметили, что при уменьшении увеличиваются коэффициенты давления на нижней поверхности пластинки, что влечет за собой так называемый экранный эффект.

**Список литературы**

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов - М.: Наука, 1966. - 448 с.
2. Маклаков, Д.В. Об одной задаче взаимодействия потоков с разными константами Бернулли, Тр. сем. по краев. задачам / Д.В. Маклаков - 1983.-№20.-С.159-170.
3. Марданов, Р.Ф. Решение одной обратной краевой задачи аэрогидродинамики/ Р.Ф. Марданов //Известия высших учебных заведений.-2007.-№2.-С.27-34.
4. Марданов, Р.Ф. Приближенный метод проектирования трехэлементного крылового профиля/ Р.Ф. Марданов //Ученые записки Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Том 153, Кн. 4. С. 112–121..-2011.-Том 153, кн.4-С.1-10.
5. Лаврентьев, М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев , Б.В. Шабат. - М.: Наука, 1972.- 736 с.
6. Галяутдинов, М.И. Проектирование крыловых профилей, обтекаемых вблизи твердого экрана /М.И. Галяутдинов , Д.В. Маклаков // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1994. - №3. - С. 3-7.
7. Ильинский, А.Н. Метод аэродинамического проектирования крылового профиля экраноплана/ Н.Б. Ильинский, Д.В. Маклаков, А.В. Поташев // Изв. вузов. Авиационная техника. - 1995. -№2. - С. 54-62.
8. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости /М.И. Гуревич - М.: Наука, 1979. - 536 с.
9. Гахов Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов - М.: Наука, 1977. - 640 с.