

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

КАШЕЕВ Р.А.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО
ПОТЕНЦИАЛА РАЗЛОЖЕНИЕМ В РЯД ПО
СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ**

учебное пособие

Казань 1998

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
физического факультета

УДК 521.1

Кашеев Р.А. Моделирование гравитационного потенциала разложением в ряд по сферическим функциям. Учебное пособие для студентов третьего курса физического факультета. Казань 1998, 36 с.

Учебное пособие представляет собой краткий конспект лекций по одному из разделов курса "Теория потенциала", читаемого для студентов третьего курса специальности "Астрономогеодезия" физического факультета.

Рецензент:

Нефедьев Ю.А. - канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической физики Казанского педагогического университета

Оглавление

1	Гравитационный потенциал и его свойства	3
2	Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат	4
3	Полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра	6
4	Ортогональность полиномов и присоединенных функций Лежандра	9
5	Разложение функции $\frac{1}{r}$ в ряд полиномов Лежандра	13
6	Шаровые и сферические функции	15
7	Разложение по системе сферических функций.	17
8	Нормирование сферических функций.	20
9	Классификация сферических функций.	21
10	Связь разложения по сферическим функциям с методом наименьших квадратов.	24
11	Разложение гравитационного потенциала в ряд объемных сферических функций.	26
12	Интерпретация некоторых стоксовых постоянных.	28
13	О сходимости рядов по сферическим функциям.	32
14	Сравнительные свойства способов моделирования потенциала.	34

1 Гравитационный потенциал и его свойства

Задача описания гравитационного поля небесного тела сводится к моделированию потенциала его силы притяжения в точках внешнего не занятого массами пространства. Напомним, что потенциалом силы притяжения гравитирующего тела называется скалярная функция координат, частная производная которой по произвольному направлению равна проекции силы притяжения на это направление. Иными словами, вектор $\vec{F}(P)$ силы притяжения есть градиент скалярной потенциальной функции $V(P)$, где P - точка пространства, в которой мы намереваемся определить гравитационное поле тела τ , т.е.

$$\vec{F}(P) = \text{grad } V(P) \quad (1)$$

Потенциал объемных масс записывается в следующем виде:

$$V(P) = \int_{\tau} \frac{\delta(M)}{r} d\tau(M), \quad M \in \tau, \quad (2)$$

где $\delta(M)$ есть функция объемной плотности координат текущей точки интегрирования M , r - расстояние от точки M до точки P . Перечислим ранее доказанные свойства потенциала $V(P)$ объемных масс:

- потенциал есть функция конечная и непрерывная во всем пространстве;
- первая производная потенциала есть функция конечная и непрерывная во всем пространстве;
- потенциал есть функция гармоническая во внешнем

пространстве, не занятом массами, т.е.

$$\Delta V(P) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0; \quad (3)$$

- во внутренней области потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta V(M) = -4\pi\delta(M), \quad M \in \tau; \quad (4)$$

- на бесконечности потенциал есть функция регулярная.

Гармоничность потенциальной функции во внешнем пространстве, выражаемая формулой (3), служит основой для выбора той или иной формы его модельного описания, позволяющего вычислять значения функции $V(P)$, $P \notin \tau$, не зная распределения плотностной функции $\delta(M)$, $M \in \tau$, т.е. не располагая сведениями о внутреннем распределении вещества в недрах исследуемого небесного тела.

2 Решение уравнения Лапласа в сферической системе координат

Запишем уравнение Лапласа (3) в сферических координатах:

$$\Delta V = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right] = 0.$$

Выход его можно найти в учебнике [2] (с.165). Решение уравнения будем искать в виде

$$V(\rho, \theta, \lambda) = R(\rho) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Lambda(\lambda) \quad (5)$$

Подставляя (5) и деля на произведение трех функций левую и правую части уравнения Лапласа, получаем:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Lambda \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0. \quad (6)$$

Поскольку только первое слагаемое (6) зависит от ρ , необходимо выполнение:

$$\frac{1}{R(\rho)} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR}{d\rho} \right) = k = const, \quad \text{т.е.}$$

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + 2\rho \frac{dR}{d\rho} - kR = 0. \quad (7)$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка (7) имеет вид:

$$R(\rho) = A\rho^{-\frac{1}{2}+\sqrt{k+1}} + B\rho^{-\frac{1}{2}-\sqrt{k+1}}$$

где A и B - произвольные постоянные. Положим $k = n(n+1)$, где n - целое положительное число, тогда

$$R(\rho) = A\rho^n + B\rho^{-(n+1)}, \quad (8)$$

и переписывая (6), приходим к

$$n(n+1) \sin^2 \theta + \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0. \quad (9)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = const$$

Обозначив эту постоянную - m^2 , где m - целое число, получаем

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} + m^2 \Lambda(\lambda) = 0 \quad (10)$$

Общее решение дифференциального уравнения (10) имеет вид:

$$\Lambda(\lambda) = C \cos m\lambda + D \sin m\lambda, \quad (11)$$

где C, D - произвольные постоянные интегрирования. Обозначим $x = \cos \theta$ и перепишем (9) с учетом (10):

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0. \quad (12)$$

Решением этого дифференциального уравнения являются полиномы и присоединенные функции Лежандра.

3 Полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра

Решение уравнения (12) начнем со случая $m = 0$, при этом (12) превращается в дифференциальное уравнение Лежандра:

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + n(n+1)\Theta = 0. \quad (13)$$

Решением уравнения (13) являются полиномы Лежандра степени n , задаваемые формулой Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \quad (14)$$

Проверка решения выполняется с помощью вспомогательной функции

$$Y = (x^2 - 1)^n, \quad (15)$$

дифференцирование которой

$$\frac{dY}{dx} = 2xn(x^2 - 1)^{n-1} = \frac{2xn(x^2 - 1)^n}{x^2 - 1} = \frac{2xny}{x^2 - 1}$$

приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dY}{dx} - x^2 \frac{dY}{dx} + 2nx^2y = 0 \quad (16)$$

с решением (15). Продифференцируем (16) $n+1$ раз, используя правило Лейбница, и получим

$$(1-x^2) \frac{d^{n+2}Y}{dx^{n+2}} - 2x \frac{d^{n+1}Y}{dx^{n+1}} + n(n+1) \frac{d^nY}{dx^n} = 0. \quad (17)$$

Функция $\frac{d^nY}{dx^n}$ с точностью до несущественного постоянного множителя совпадает с полиномом (14), а (17) при этом совпадает с (13). Это означает, что полиномы (14) действительно решают уравнение (13). В частности,

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \quad \text{и т.д.}$$

Перейдем к рассмотрению случая $m \neq 0$.

Продифференцируем (17) еще m раз:

$$(1-x^2) \frac{d^{n+m+2}Y}{dx^{n+m+2}} - 2(m+1)x \frac{d^{n+m+1}Y}{dx^{n+m+1}} + \\ + [n(n+1) - m(m+1)] \frac{d^{n+m}Y}{dx^{n+m}} = 0. \quad (18)$$

Это уравнение с точностью до постоянной заведомо имеет решение

$$\frac{d^{n+m}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}} = \frac{d^{n+m}Y}{dx^{n+m}}.$$

Решение же (12) будем искать в виде

$$\Theta(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \zeta(x).$$

Тогда

$$\frac{d\Theta}{dx} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d\zeta}{dx} - xm(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \zeta,$$

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^2\zeta}{dx^2} - 2xm(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \frac{d\zeta}{dx} - \\ - m(1-x^2)^{\frac{m}{2}-1} \zeta + x^2m(m-2)(1-x^2)^{\frac{m}{2}-2} \zeta.$$

Подставим производные в (12), получим, разделив на

$$(1-x^2)^{\frac{m}{2}} :$$

$$(1-x^2) \frac{d^2\zeta}{dx^2} - 2x(m+1) \frac{d\zeta}{dx} + \\ - [n(n+1) - m(m+1)] \zeta = 0. \quad (19)$$

Сопоставляя уравнения (19) и (18), имеем

$$\zeta(x) = C \frac{d^{n+m}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}},$$

где C - произвольная постоянная. Тогда

$$\Theta(x) = C(1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}}.$$

Выбирая постоянную аналогично (14), окончательно получаем решение (12) при $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} P_{nm}(x) &= \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} = \\ &= (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^n P_n(x)}{dx^m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Функция $P_{nm}(x)$ называется присоединенной функцией Лежандра степени n , порядка m . Так как $P_{n0}(x) \equiv P_n(x)$ и $P_{nn}(x) = 0$ при $m > n$, каждому полиному Лежандра степени n соответствуют еще n присоединенных функций порядков $m = 1, 2, \dots, n$. В частности,

$$P_{11}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_{21}(x) = 3x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$P_{22}(x) = 3(1-x^2)$$

$$P_{31}(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(5x^2-1)$$

$$P_{32}(x) = 15x(1-x^2)$$

$$P_{33}(x) = 15(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{и т.д.}$$

4 Ортогональность полиномов и присоединенных функций Лежандра

Рассмотрим бесконечномерное множество функций $\{\psi_i(x)\}$, определенных на $[a, b]$, и введем на этом множестве ска-

лярное произведение его элементов:

$$(\psi_i(x)\psi_j(x)) = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x) dx \quad (21)$$

При условии конечности интегралов (21) множество функций $\{\psi_i(x)\}$ представляет собой бесконечномерное пространство интегрируемых с квадратом функций L_2 . По определению две различные функции $\psi_i, \psi_j \in L_2$, ($i \neq j$) называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т.е. для ортогональных функций

$$(\psi_i(x)\psi_j(x)) = \int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x) dx = 0, \quad i \neq j \quad (22)$$

Введя понятие ортогональности функций и возвращаясь к полиномам и присоединенным функциям Лежандра, докажем две теоремы:

Теорема 1 Полиномы Лежандра различных степеней ортогональны на отрезке $[-1, +1]$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x) dx &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \frac{dP_m}{dx} dx = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \left\{ \left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} P_m(x) \right]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \cdot \frac{dP_m}{dx} dx \right\}, \\ &n \neq m \end{aligned}$$

При интегрировании по частям подстановка пределов обращает неинтегральный член в нуль. Интегральный член снова берем по частям, снова неинтегральный член обращается в нуль, а под интегралом всплывает производная $\frac{d^2 P_m}{dx^2}$. Продолжим процесс интегрирования по частям до тех пор, пока под знаком интеграла не появится производная

$\frac{d^{m+1}P_n}{dx^{m+1}}$. В силу того, что $P_m(x)$ есть полином степени m , его $(m+1)$ производная равна нулю. Теорема доказана. При $n = m$ скалярное произведение полиномов дает так называемый квадрат нормы

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \quad (23)$$

Справедливость (23) доказывается непосредственным интегрированием формулы Родрига (см. [2], с.177-180).

Для присоединенных функций Лежандра справедлива

Теорема 2 Присоединенные функции Лежандра различных степеней, но одного порядка ортогональны на отрезке $[-1, +1]$.

Рассмотрим интеграл $\Phi(m) = \int_{-1}^{+1} P_{nm}(x) P_{km}(x) dx$.

$$\text{С учетом (20)} \quad \Phi(m) = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^m P_k}{dx^m} dx$$

Интегрируем по частям

$$\begin{aligned} \Phi(m) &= \left[(-1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \cdot \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \right]_{-1}^{+1} - \\ &- \int_{-1}^{+1} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} \cdot \frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \right] dx \end{aligned} \quad (24)$$

Заметим, что неинтегральный член при подстановке пределов обращается в нуль. Запишем уравнение Лежандра (13) для полинома $P_n(x)$:

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{d P_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$$

и продифференцируем его $(m-1)$ раз. Это даст

$$(1-x^2) \frac{d^{m+1} P_n}{dx^{m+1}} - 2mx \frac{d^m P_n}{dx^m} +$$

$$+ (n-m+1)(n+m) \frac{d^{m+1} P_n}{dx^{m+1}} = 0$$

Умножим это равенство слева и справа на $(1-x^2)^{m-1}$ и перегруппируем члены

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \right] =$$

$$= -(n-m+1)(n+m)(1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m+1} P_n}{dx^{m+1}}$$

Подставим в (24):

$$\Phi(m) = (n-m+1)(n+m) \times$$

$$\times \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n}{dx^{m-1}} \frac{d^{m-1} P_k}{dx^{m-1}} dx$$

$$\Phi(m) = (n-m+1)(n+m) \Phi(m-1) \quad (25)$$

Заменяя здесь m на $m-1, m-2, \dots, 1$, получим:

$$\Phi(m-1) = (n-m+2)(n+m-1) \Phi(m-2)$$

$$\Phi(m-2) = (n-m+3)(n+m-2) \Phi(m-3)$$

...

$$\Phi(1) = n(n+1) \Phi(0)$$

Перемножим все последние равенства и подставим в (25)

$$\Phi(m) = [(n-m+1)(n-m+2) \dots (n-1)n] \cdot$$

$$\cdot [(n+m)(n+m-1) \dots (n+1)] \Phi(0) \quad \text{или}$$

$$\Phi(m) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \Phi(0),$$

где

$$\Phi(0) = \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_k(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & k = n. \end{cases}$$

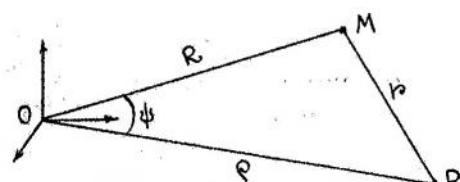
Поэтому

$$\Phi(m) = \int_{-1}^{+1} P_{nm}(x) P_{km}(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, & k = n, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

5 Разложение функции $\frac{1}{r}$ в ряд полиномов Лежандра.

Пусть в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ расположена единичная гравитирующая масса, а в точке $P(x, y, z)$ - единичная же пробная масса (см. рис.). Тогда потенциал притяжения массы, помещенной в точку M , в точке P будет равен $f(r) = \frac{1}{r}$. Разложим эту функцию в ряд полиномов Лежандра, рассматривая два случая: а) $\rho < R$ и б) $\rho \geq R$.



а) Обозначим $h = \frac{\rho}{R}$, по условию $h < 1$. Разложим функцию

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \psi}} = \\ &= \frac{1}{R\sqrt{1 + h^2 - 2h \cos \psi}} \end{aligned} \quad (26)$$

в ряд Маклорена:

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'_h(0) + \frac{h^2}{2!} f''_{hh}(0) + \dots \quad (27)$$

Дифференцируя (26) по h , а затем приравнивая в производных h нулю, найдем производные:

$$f(0) = \frac{1}{R},$$

$$f'_h(0) = -\frac{1}{R} \left[\frac{h - \cos \psi}{(1 + h^2 - 2h \cos \psi)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{\cos \psi}{R},$$

$$f''_{hh}(0) = \frac{1}{R} \left[\frac{3(h - \cos \psi)^2}{r^5} - \frac{1}{r} \right] = \frac{1}{R} (3 \cos^2 \psi - 1),$$

$$f'''_{hh}(0) = \frac{1}{R} \left[\frac{15(h - \cos \psi)^3}{r^7} + \frac{9(h - \cos \psi)}{r^5} \right] = \frac{3}{R} (5 \cos^2 \psi - 3 \cos \psi),$$

и т.д..

Подставляя значения производных в ряд (27), убедимся, что

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left[1 + h \cos \psi + \frac{h^2}{2} (3 \cos^2 \psi - 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^3}{2} (5 \cos^3 \psi - 3 \cos \psi) + \dots \right] = \end{aligned} \quad (28)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{R} P_n(\cos \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{R^{n+1}} P_n(\cos \psi).$$

Если $\rho \geq R$, в ряд (27) разложим функцию $(\rho \cdot \frac{1}{r})$

$$\left(\rho \cdot \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+h^2 - 2h \cos \psi}}, \quad \text{где } h = \frac{R}{\rho} \leq 1.$$

Ряд Маклорена для этого случая

$$\left(\rho \cdot \frac{1}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos \psi),$$

что означает для

$$f(r) = \frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \left(\rho \cdot \frac{1}{r}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (29)$$

6 Шаровые и сферические функции

Решающие уравнение Лапласа и одновременно однородные многочлены, выраженные в сферических координатах, называются шаровыми или объемными сферическими функциями.

Многочлен называется однородным, если для произвольного a имеет место

$$V_n(ax, ay, az) = a^n V_n(x, y, z)$$

В сферических координатах это запишется так:

$$V_n(\rho, \theta, \lambda) = \rho^n Y_n(\theta, \lambda)$$

Для того, чтобы полином $V_n(\rho, \theta, \lambda)$ являлся объемной сферической функцией, он должен удовлетворять уравнению Лапласа в сферических координатах. В параграфе 2 мы нашли эти решения в виде (5) произведения функций $R(\rho)$, $\Lambda(\lambda)$, $\Theta(\theta)$. Понятно, что в этом случае функция $Y_n(\theta, \lambda)$ должно представлять собой линейную комбинацию

частных решений $(A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda)$ и $P_{nm}(\cos \theta)$, удовлетворяя тем самым дифференциальному уравнению (9). Таким образом, присоединенные функции Лежандра являются составными сомножителями элементарных сферических функций

$$P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda \quad \text{и} \quad P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda,$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, n$, а сферическая функция $Y_n(\theta, \lambda)$ степени n имеет общий вид

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta), \quad (30)$$

где A_{nm} и B_{nm} - произвольные постоянные. Объемные (шаровые) сферические функции степени n имеют вид:

$\rho^n Y_n(\theta, \lambda)$ - применяются при решении внутренних краевых задач;

$\frac{1}{\rho^{n+1}} Y_n(\theta, \lambda)$ - применяются при решении внешних задач.

Установим основное свойство сферических функций. Пусть $U = \rho^n Y_n(\theta, \lambda)$, $V = \rho^m Y_m(\theta, \lambda)$ - объемные сферические функции степеней n и m соответственно. Поскольку эти функции по определению гармонические, для них справедлива II-ая формула Грина в виде:

$$\int_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) dS = 0,$$

где S - граница области гармоничности. Выберем S как сферу единичного радиуса. Тогда, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \rho}$,

имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [p^n Y_n(\theta, \lambda) m \rho^{m-1} Y_m(\theta, \lambda) - \\ & - \rho^m Y_m(\theta, \lambda) n \rho^{n-1} Y_n(\theta, \lambda)] \sin \theta d\theta d\lambda = 0, \\ & \rho^{n+m-1} (m-n) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\theta, \lambda) Y_m(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = 0, \quad \text{и} \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\theta, \lambda) Y_m(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = 0, \quad m \neq n \end{aligned} \quad (31)$$

Это означает, что сферические функции различных степеней ортогональны на единичной сфере. Можно также доказать полноту системы сферических функций [5, с.689]. Ортогональность и полнота системы позволяет выбрать бесконечномерную систему сферических функций в качестве бесконечномерного функционального базиса для представления некоторой заданной на сфере функции $f(\theta, \lambda)$, подобно тому, как в трехмерном пространстве мы используем для некоторого произвольного вектора разложение по системе ортогональных базисных векторов, или в одномерном пространстве применяем ортогональную и полную систему тригонометрических функций для представления сложных эмпирических кривых рядом Фурье.

7 Разложение по системе сферических функций.

Ортогональность и полнота системы сферических функций позволяют утверждать, что любую заданную на сфере дважды дифференцируемую функцию $f(\theta, \lambda)$ можно

разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям вида

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (32)$$

Коэффициенты ряда (32) определяются по заданным на сфере значениям функции $f(\theta, \lambda)$.

Умножим ряд (32) слева и справа на $\cos k\lambda d\lambda$ и проинтегрируем по λ от 0 до 2π :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos k\lambda d\lambda &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_{n0} P_n(\cos \theta) \int_0^{2\pi} \cos k\lambda d\lambda + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^n A_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \int_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos k\lambda d\lambda + \\ &\left. + B_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \int_0^{2\pi} \sin m\lambda \cos k\lambda d\lambda \right] \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^{2\pi} \cos k\lambda d\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} \sin m\lambda \cos k\lambda d\lambda = 0$$

при любых целых k и m , а

$$\int_0^{2\pi} \cos m\lambda \cos k\lambda d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m \\ \pi & \text{при } k = m \end{cases}$$

Приходим к

$$\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda d\lambda = \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \quad (33)$$

Ряд (33) умножим слева и справа на $P_{nm}(\cos \theta) d\cos \theta$ и проинтегрируем по переменной $\cos \theta$ в пределах от -1 до +1:

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda P_{nm}(\cos \theta) d\lambda d\cos \theta =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \int_{-1}^{+1} P_{nm}(\cos \theta) P_{km}(\cos \theta) d\cos \theta$$

В силу ортогональности присоединенных функций Лежандра различных степеней на интервале $[-1, +1]$ получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda P_{nm}(\cos \theta) d\lambda d\cos \theta = \\ & = \pi A_{nm} \int_{-1}^{+1} [P_{nm}(\cos \theta)]^2 d\cos \theta = \\ & = A_{nm} \frac{2\pi}{(2n+1)(n-m)!} (n+m)! \end{aligned} \quad (34)$$

Окончательно имеем:

$$A_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\lambda d\theta$$

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \cos m\lambda P_{nm}(\cos \theta) \sin \theta d\lambda d\theta \quad (35)$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) \sin m\lambda P_n(\cos \theta) \sin \theta d\lambda d\theta$$

Для получения первой из формул (35) необходимо было ряд (32) умножить слева и справа на $d\lambda$, а для получения третьей формулы из (35) - на $\sin k\lambda d\lambda$ с последующим интегрированием по λ в тех же пределах. Формулы (35) служат, таким образом, для вычисления коэффициентов ряда (32) по заданным на сфере значениям функции $f(\theta, \lambda)$. В случае дискретного задания функции $f(\theta, \lambda)$ в отдельных точках сферы, интегралы в (35) должны быть заменены конечными суммами.

3. Нормирование сферических функций.

Выпишем первые значения полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ &\dots \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ &\dots \\ P_9(x) &= \frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x), \\ &\dots \end{aligned}$$

Нетрудно сделать вывод, что с ростом индекса степени n коэффициенты при различных степенях аргумента полиномов Лежандра быстро растут. Еще быстрее растут коэффициенты в присоединенных функциях Лежандра. Отмеченное обстоятельство приводит к неудобствам при вычислении полиномов высоких степеней. Для преодоления неудобств рекомендуется прибегать к нормированию сферических функций. Перепишем ряд (32) в следующем виде:

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{A}_{nm} \cos m\lambda + \bar{B}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (36)$$

где нормированные коэффициенты \bar{A}_{nm} и \bar{B}_{nm} связаны с ненормированными коэффициентами разложения (32) A_{nm} и B_{nm} соотношением:

$$\bar{A}_{nm} = \frac{1}{N_{nm}}, \quad \bar{B}_{nm} = \frac{1}{N_{nm}} B_{nm}, \quad (37)$$

а нормированные присоединенные функции Лежандра $\bar{P}_{nm}(\cos \theta)$ с ненормированными присоединенными функциями $P_{nm}(\cos \theta)$:

$$\bar{P}_{nm}(\cos \theta) = N_{nm} P_{nm}(\cos \theta). \quad (38)$$

Нормирующий множитель N_{nm} может выбираться по-разному, чаще всего его выбирают в виде

$$N_{nm} = \sqrt{\frac{(2 - \sigma_{m_0})(2n + 1)(n - m)!}{(n + m)!}}, \quad (39)$$

где

$$\sigma_{m_0} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0 \\ 1 & \text{при } m = 0. \end{cases}$$

При таком выборе N_{nm} говорят о полной нормировке коэффициентов и присоединенных функций.

9 Классификация сферических функций.

Распишем ряд (32) разложения функции $f(\theta, \lambda)$:

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) = & A_{00} P_{00}(\cos \theta) + \\ & + A_{10} P_{10}(\cos \theta) + \\ & + (A_{11} \cos \lambda + B_{11} \sin \lambda) P_{11}(\cos \theta) + \\ & + A_{20} P_{20}(\cos \theta) + \\ & + (A_{21} \cos \lambda + B_{21} \sin \lambda) P_{21}(\cos \theta) + \\ & + (A_{22} \cos 2\lambda + B_{22} \sin 2\lambda) P_{22}(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Члены этого разложения могут быть разбиты на три класса.

а) Члены со вторым индексом $m = 0$. Эти слагаемые не зависят от долготы, поведение их определяется только значением полярного расстояния θ . Поскольку полином Лежандра $P_{nm}(\cos \theta)$ имеет n -корней, симметричных относительно нулевого значения аргумента $\cos \theta$ ($\cos \theta = 0$ при $\theta = 90^\circ$, т.е. на экваторе единичной сферы), геометрическим местом точек переменны знака полинома $P_{n0}(\cos \theta)$ являются n параллелей, расположенных симметрично по отношению к экватору. При нечетных n экватор также будет линией переменны знака полинома, при четных n — не будет. Параллелями — нулями полинома единичная сфера делится на $(n + 1)$ широтные зоны, поэтому члены ряда (40), не зависящие от долготы, называются зональными членами (гармониками).

б) Члены с равными значениями индексов, т.е. $m = n$. Общий вид незональных членов разложения (40):

$$(A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) \sin^m \theta \frac{d^n P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m} \quad (41)$$

при $m = n$ в силу $\frac{d^n P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^n} = \text{const}$ несколько упрощается.

Нулями функции (41) при $m = n$ будут нули множителя $\sin^n \theta$ — полюса единичной сферы и нули функции $\cos m\lambda$ (или $\sin m\lambda$) — меридианы, отстоящие друг от друга на величину $\frac{\pi}{n}$. В секторах, ограниченных этими меридианами, слагаемое ряда (40) имеет постоянный знак, меняющийся на противоположный при переходе в соседний сектор. Гармоники этого типа (при $m = n$) называются секторальными членами (гармониками) ряда (40).

в) Члены с индексами $n \neq m \neq 0$. К нулям предыдущего случая добавляются нули многочлена $\frac{d^m P_n \cos \theta}{d(\cos \theta)^m}$, имеющего $(n-m)$ вещественных корней, которым на единичной сфере соответствуют $(n-m)$ параллелей, симметрично расположенных относительно экватора. Нулевыми параллелями и меридианами вся единичная сфера делится на трапеции, в которых рассматриваемые члены ряда (40) сохраняют постоянный знак. Такие члены разложения называются тессеральными членами (гармониками).

Приведенная нами классификация показывает, что в системе $(2n+1)$ сферических функций степени n имеется одна зональная гармоника, секториальные и $(2n-2)$ тессеральные гармоники. Все они являются функциями, осциллирующими на единичной сфере, причем амплитуда осцилляций зависит от численного значения соответствующего коэффициента A_{nm} или B_{nm} , а частота осцилляций - от значений индексов n и m . Повысяв степень n разложения (40), мы облекаем сферу правильной системой постепенно (с ростом n) уменьшающихся участков, в которых происходит перемена знаков сферических функций, т.е. увеличиваем частоту осцилляции последних. В силу этого задача представления заданной на сфере функции $f(\theta, \lambda)$ рядом по сферическим функциям приобретает смысл достижения наилучшего приближения (аппроксимации) к заданной совокупности ее значений путем сложения ряда осциллирующих на сфере функций. Однако, в каком смысле достигнутое приближение можно считать наилучшим? Исследованию этого вопроса посвящен следующий параграф.

10 Связь разложения по сферическим функциям с методом наименьших квадратов.

Рассмотрим задачу аппроксимации заданной на сфере функции $f(\theta, \lambda)$ суммой заранее оговоренного конечного числа сферических функций различных степеней n до N включительно.

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^N Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta). \quad (42)$$

Будем искать пока неизвестный нам аналитический вид коэффициентов $\{A_{nm}, B_{nm}\}$ ряда (42), исходя из условия интегрального МНК, сводящегося к требованию минимизации величины σ_N^2 - интегрального по единичной сфере ω квадрата невязок, т.е.

$$\sigma_N^2 = \iint_{\omega} \left[f(\theta, \lambda) - \sum_{n=0}^N Y_n(\theta, \lambda) \right]^2 d\omega = \min. \quad (43)$$

Минимизация σ_N^2 осуществляется на множестве всех возможных вариантов выбора вида аппроксимационных коэффициентов ряда (42).

Решение задачи проведем, раскрывая в (43) квадратные скобки и проводя почлененное интегрирование:

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \int_{\omega} f^2(\theta, \lambda) d\omega - 2 \sum_{n=0}^N \int_{\omega} f(\theta, \lambda) Y_n(\theta, \lambda) d\omega + \\ &+ \sum_{n=0}^N \int_{\omega} Y_n^2(\theta, \lambda) d\omega. \end{aligned} \quad (44)$$

Получаемые в ходе выкладок члены вида

$$2 \sum_{n=0}^N \int_{\omega} Y_n(\theta, \lambda) Y_m(\theta, \lambda) d\omega = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m$$

в силу ортогональности сферических функций различных степеней.

Для отыскания минимума σ_N^2 продифференцируем (44) по каждому из коэффициентов набора $\{A_{nm}, B_{nm}\}$ и приравняем полученные производные нулю. Первое слагаемое в (44) от коэффициентов не зависит, поэтому

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} \int_{\omega} \left[P_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \right]^2 d\omega = - \int f(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\omega = 0 \quad (45)$$

Равенство (42) представляет собой набор $(N+1)^2$ уравнений для определения коэффициентов $\{A_{nm}, B_{nm}\}$, ($n = 0, 1, \dots, N$, $m = 0, 1, \dots, n$). Тогда

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{\int f(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\omega}{\int \left[P_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \right]^2 d\omega} \quad (46)$$

Поскольку

$$\int \left[P_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} \right]^2 d\omega = \frac{2\pi(1+\sigma_{m_0})}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!},$$

коэффициенты $\{A_{nm}, B_{nm}\}$, получаемые из условия минимума (43), определяются формулами:

$$\begin{Bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{Bmatrix} = \frac{2n+1}{2\pi(1+\sigma_{m_0})(n+m)!} \int f(\theta, \lambda) P_{nm}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{Bmatrix} d\omega \quad (47)$$

Совпадение с (35) показывает, что аппроксимация, осуществляемая интегральным МНК под условием (43), дает для

заданной на единичной сфере функции $f(\theta, \lambda)$ сумму первых (до N включительно) членов разложения по сферическим функциям.

Доказанное свойство разложения в ряд по сферическим функциям приводит к важному следствию. Пусть нам выполнена аппроксимация некоторой функции $f(\theta, \lambda)$ с помощью ряда (42) до степени N включительно, т.е. вычислены необходимые для аппроксимации $(N+1)^2$ коэффициентов. Если теперь по каким-либо соображениям, скажем, по причине неудовлетворительной точности аппроксимации, возникает необходимость дополнительно привлечь сферические функции степени более высокой, чем N , то ранее вычисленные коэффициенты $\{A_{nm}, B_{nm}\}$ остаются без изменений. Дополнительная работа сводится лишь к вычислению коэффициентов степени старше N при новых сферических функциях. Это свойство аппроксимации позволяет, последовательно наращивая степень сферических полиномов, достичь любой необходимой точности аппроксимации функции $f(\theta, \lambda)$ без потери вычислительного труда.

11. Разложение гравитационного потенциала в ряд объемных сферических функций.

Допустим, что имеется некоторое материальное (небесное) тело объема τ , точка M - текущая точка внутри его, т.е. $M \in \tau$, $\delta(M)$ - функция объемной плотности недр. Требуется описать потенциал внешнего гравитационного поля тела с помощью ряда по объемным сферическим функциям.

Гравитационный потенциал тела согласно (2) выражает-

ся формулой

$$V(P) = \int_r \frac{\delta(M)}{r} d\tau, \quad (48)$$

где r - расстояние от точки M до единичной пробной массы, расположенной в точке P . Для внешнего положения последней в соответствии с (29) имеем:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho')^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \psi).$$

Тогда (48) можно переписать как

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(\theta, \lambda)}{\rho^{n+1}},$$

$$\text{где } Z_n(\theta, \lambda) = \int (\rho')^n \delta(M) P_n(\cos \psi) d\tau$$

Воспользуемся теоремой сложения сферических функций, в согласии с которой

$$\begin{aligned} P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\cos \theta) P_{nm}(\cos \theta') \cos m(\lambda - \lambda'). \end{aligned} \quad (49)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z_n(\theta, \lambda) &= P_n(\cos \theta) \int \delta(M) (\rho')^n P_n(\cos \theta') d\tau + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} [\cos m\lambda \int (\rho')^n \delta(M) \cos m\lambda' P_{nm}(\cos \theta') d\tau + \\ &+ \sin m\lambda \int (\rho')^n \delta(M) \sin m\lambda' P_{nm}(\cos \theta') d\tau] P_{nm}(\cos \theta), \end{aligned}$$

поскольку

$$\cos m(\lambda - \lambda') = \cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda'.$$

Обозначим размерные множители-коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_{nm} \\ S'_{nm} \end{array} \right\} = (2 - \sigma_{m_0}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\rho')^n \delta(M) \left\{ \begin{array}{l} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{array} \right\}. \quad (50)$$

$$P_{nm}(\cos \theta') d\tau, (m = 0, 1, 2, \dots, n, n = 0, 1, 2, \dots)$$

С учетом обозначений (50) гравитационный потенциал представляется рядом:

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{\rho^{n+1}} (C'_{nm} \cos m\lambda + S'_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta). \quad (51)$$

Коэффициенты ряда (51) $\{C'_{nm}, S'_{nm}\}$ иногда называют стоксовыми постоянными. Покажем, что совокупность стоксовых постоянных содержит информацию о распределении масс в теле планеты и тем самым о форме уровенных поверхностей гравитационного потенциала и структуре ее внешнего гравитационного поля.

12 Интерпретация некоторых стоксовых постоянных.

Вновь обратимся к формуле предыдущего параграфа

$$V(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(\theta, \lambda)}{\rho^{n+1}}$$

и рассмотрим подробнее сферические функции $Z_n(\theta, \lambda)$, входящие в первые члены этого ряда.

а) Сферические функции $Z_n(\theta, \lambda)$ нулевой степени содержат лишь одну стоксовую постоянную:

$$C'_{00} = \int \delta(M) d\tau = M,$$

где M полная масса исследуемого гравитирующего тела.

б) Сферическая функция $Z_1(\theta, \lambda)$ первой степени содержит стоксовые постоянные:

$$\begin{aligned} C'_{10} &= \int \rho' \delta(M) \cos \theta' d\tau = \int \delta(M) \zeta d\tau = M \zeta_0 \\ C'_{11} &= \int \rho' \delta(M) \cos \lambda' \sin \theta' d\tau = \int \delta(M) \xi d\tau = M \xi_0 \\ S'_{11} &= \int \rho' \delta(M) \sin \lambda' \sin \theta' d\tau = \int \delta(M) \eta d\tau = M \eta_0 \end{aligned} \quad (52)$$

Формулы (52) требуют следующего комментария.

Во-первых, в процессе выкладок для большей наглядности мы перенесли от сферических координат текущей точки интегрирования

$M(\rho', \theta', \lambda')$ к ее прямоугольным координатам: $M(\xi, \eta, \zeta)$. Во-вторых, символами ξ_0, η_0, ζ_0 обозначены координаты центра масс исследуемого тела в прямоугольной системе координат ξ, η, ζ . Формулы (52) показывают, что стоксовые постоянные первой степени представляют собой произведения полной массы тела на координаты центра его масс. Если центр прямоугольной системы координат заранее выбирается совпадающим с центром масс, стоксовые постоянные $C'_{10}, C'_{11}, S'_{11}$ будут равны нулю. Наоборот, ненулевые значения экспериментально определяемых постоянных первой степени свидетельствуют о несовпадении центра системы координат и центра масс.

в) Сферическая функция $Z_2(\theta, \lambda)$ второй степени содержит пять стоксовых постоянных. Рассмотрим вначале следующие три из них, так же как и выше, переходя в прямоугольную систему координат:

$$\begin{aligned} C'_{21} &= \int \delta(M) \rho'^2 \cos \theta' \sin \theta' \cos \lambda' = \int \delta(M) \xi \zeta d\tau = E \\ S'_{21} &= \int \delta(M) \rho'^2 \cos \theta' \sin \theta' \sin \lambda' d\tau = \int \delta(M) \eta \zeta d\tau = D \\ S'_{22} &= \frac{1}{4} \int \delta(M) \rho'^2 \sin^2 \theta' \sin 2\lambda' d\tau = \int \delta(M) \xi \eta d\tau = \frac{1}{2} F \end{aligned} \quad (53)$$

Символами D, E, F в (53) обозначены смешанные (или центробежные) моменты инерции второго порядка. Если предположить, что одна из осей координат, скажем ось ζ совпадает с главной осью инерции тела, то моменты D и E (а вместе с ними коэффициенты C'_{21} и S'_{21}) будут равны нулю. Если все три координатные оси совпадают с главными осями инерции, то будет равен нулю также и коэффициент S'_{22} .

Обратимся к стоксовой постоянной C'_{20} .

$$\begin{aligned} C'_{20} &= \int \delta(M) \rho'^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int \delta(M) \rho'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int \delta(M) \rho'^2 (2 \cos^2 \theta' + \cos^2 \theta' - \cos^2 \theta' - \sin^2 \theta') d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int \delta(M) (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int \delta(M) (\eta^2 + \zeta^2) d\tau + \frac{1}{2} \int \delta(M) (\xi^2 + \zeta^2) d\tau - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \delta(M) (\xi^2 + \eta^2) d\tau = \frac{A + B}{2} - C. \end{aligned}$$

Коротко,

$$C'_{20} = \frac{A + B}{2} - C \quad (54)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int \delta(M) (\eta^2 + \zeta^2) d\tau \\ B &= \int \delta(M) (\xi^2 + \zeta^2) d\tau \\ C &= \int \delta(M) (\eta^2 + \xi^2) d\tau \end{aligned}$$

Главные моменты инерции второго порядка, вычисленные относительно осей ξ, η, ζ соответственно.

Нетрудно видеть, что функция $C'_{20}P_{20}(\cos \theta)$ не зависит от долготы, а величина коэффициента C'_{20} характеризует степень сжатия (вытянутости при $C'_{20} > 0$) ее меридионального сечения вдоль оси вращения ζ .

Аналогично, коэффициент при секториальной гармонике второй степени

$$\begin{aligned} C'_{22} &= \frac{1}{4} \int \delta(M) \rho'^2 \sin^2 \theta \cos 2\lambda' d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \int \delta(M) (\xi^2 - \eta^2) d\tau = \frac{1}{4}(B - A), \end{aligned} \quad (55)$$

т.е. пропорционален разности главных моментов инерции второго порядка относительно осей, лежащих в плоскости экваториального сечения тела. Для тела вращения $B = A$ и $C'_{22} = 0$. В противном случае коэффициент C'_{22} характеризует степень сжатия экваториального сечения.

Если начало координат совместить с центром масс исследуемого тела, а направления координатных осей - с направлениями главных осей инерции тела, гравитационный потенциал запишется так

$$\begin{aligned} V(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\rho} + \frac{G}{\rho^3} \left[\left(\frac{A+B}{2} - C \right) P_{20}(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B-A}{4} P_{22}(\cos \theta) \cos 2\lambda \right] + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{Z_n(\theta, \lambda)}{\rho^{n+1}}, \end{aligned}$$

Первый член этого разложения $\frac{GM}{\rho}$ - потенциал однородной сферической планеты обычно выносят за общие скобки, что превращает размерные стоковые постоянные $\{C'_{nm}, S'_{nm}\}$: в безразмерные гармонические коэффициен-

ты $\{C_{nm}, S_{nm}\}$:

$$\begin{aligned} V(\rho, \theta, \lambda) &= \frac{GM}{\rho} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + \right. \\ &\quad \left. + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

где a - масштабный коэффициент, который обычно выбирают равным среднему радиусу исследуемой планеты.

13 О сходимости рядов по сферическим функциям.

Проблема сходимости рядов типа (56) - проблема повышенной сложности, с максимальной простотой обсуждаемая в монографии Морица [3].

Пусть R^{max} есть планетоцентрический радиус-вектор точки исследуемого гравитирующего тела, наиболее удаленной от начала координат. Тогда для всех точек внешнего по отношению к сфере радиуса R^{max} пространства ряд (56) сходится и притом равномерно. Отсюда следует, что начало координат надлежит выбирать возможно ближе к геометрическому центру исследуемой планеты (тела), а область сходимости ряда (56) установить тем пропле, чем ближе тело по форме приближается к шару.

Однако, по поводу сходимости ряда (56) внутри сферы радиуса R^{max} и на поверхности S исследуемого тела что-либо определенное утверждать невозможно. Дело в том, что в указанной области пространства проблема сходимости рядов по сферическим функциям не имеет физическо-

го смысла. Это стало ясным после установления теоремы Рунге-Краупа:

Теорема Рунге-Краупа *Множество функций ψ регулярных и гармонических вне и на сфере, целиком находящейся в теле планеты (сфера Бъерхамара), плотно во множестве функций ϕ , регулярных и гармонических вне поверхности тела S_0 .*

Это означает, что каждую гармоническую функцию ϕ , выступающую в роли потенциальной функции, можно сколь угодно точно аппроксимировать заведомо сходящейся гармонической функцией ψ :

$$\|\phi - \psi\| \leq \varepsilon > 0.$$

Для ψ разложение (56) по шаровым функциям будет сходиться всюду вне и на самой поверхности S , даже если разложение функции ϕ в ряд вида (56) не сходится на этой поверхности.

Нынешними словами, произвольно малым изменениям внешнего потенциала возможно сходимость изменить на расходимость и наоборот. Это означает, что в рассматриваемой области пространства сходимость ряда (56) есть свойство неустойчивое, меняющееся от бесконечно малого внешнего воздействия. Именно поэтому говорить о нем не имеет смысла. С практической точки зрения можно, таким образом, рассматривать внешний гравитационный потенциал небесного тела, представленный в виде ряда (56), как всегда сходящийся на поверхности тела S и всюду вне ее.

14 Сравнительные свойства способов моделирования потенциала.

В эпоху Галилея гравитационное поле Земли описывалось лишь одним параметром - ускорением свободного падения тел. В настоящее время детальные модели гравитационного поля Земли включают в себя сотни тысяч параметров. В данном параграфе, завершающем пособие, рассмотрим различные способы математического описания потенциальной функции с самых общих позиций, сравнивая их точность, универсальность, наблюдаемость параметров, удобство использования в гравиметрии и небесной механике.

А) Представление потенциала интегралом по объему τ гравитирующего тела.

$$V(P) = G \iiint_{\tau} \frac{\delta(M)}{r} d\tau(M), \quad M \in \tau. \quad (57)$$

- Представление (57) точно, если известно точное распределение плотности $\delta(M)$ и форма тела;
- Представление (57) универсально, поскольку оно пригодно для тела любой формы и описывает потенциал в любой точке пространства;
- Представление (57) простое, но процедура тройного интегрирования по объему τ и вычисление функции обратного расстояния $\frac{1}{r}$ требуют больших затрат времени на вычисления.

Однако, представление (57) обладает недостатком, пре-восходящим все его перечисленные выше достоинства -

слабой наблюдаемостью, которая обусловлена отсутствием точных данных о поведении функции $\delta(M)$, т.е. о внутреннем строении Земли. Таким образом, использование представления (57) эффективно лишь для небесных тел - обломков (Фобос, Деймос, Амальтея, астероиды и т.п.), плотность которых, возможно в каждой внутренней точке считать величиной постоянной.

Б) Представление потенциала рядом по объемным сферическим (шаровым) функциям.

$$V(P) = \frac{GM}{\rho} [1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \theta)] \quad (58)$$

P - точка внешнего пространства.

- Представление (58) точно, если есть возможность суммирования сколь угодно большого числа членов ряда;
- Представление (58) не универсально: эффективно для тел, форма которых близка к сферической, границей области сходимости ряда служит сфера, точностью объемлющая гравитирующую массы;
- Представление (58) простое, поскольку необходимый математический аппарат для вычислений разработан во всех деталях;
- Представление (58), по-видимому, является наилучшим с точки зрения построения аналитической теории движения искусственных спутников. Оно также удобно и для построения численных теорий движения:

- Представление (58) характеризуется высокой наблюдаемостью - разработаны многочисленные методы определения параметров модели - значений гармонических коэффициентов $\{C_{nm}, S_{nm}\}$ по спутниковым наблюдениям.

Недостатком представления (58) являются лавинообразный рост объема и продолжительности вычислений с ростом n и сглаживающий характер модели.

В) Представление потенциала потенциалом совокупности точечных масс.

$$V(P) = \sum_{k=1}^K \frac{Gm_k}{r_k}. \quad (59)$$

- Представление (59) точно, если есть возможность суммирования сколь угодно большого числа членов ряда (гравитирующих точечных масс);
- Представление универсально;
- Представление необыкновенно просто и наглядно - это его основное достоинство, хотя алгоритмы одновременного вычисления масс m_k и координат гравитирующих масс достаточно сложны;
- Наглядность расположения масс обеспечивает хорошую наблюдаемость модели.

Основной недостаток представления (59) состоит в неудобстве построения на его основе аналитической теории движения искусственных спутников.

В литературе обсуждаются и другие способы описания потенциальной функции. Возможны также комбинации различных методов, например, разложения по сферическим функциям и представления полем точечных масс.

Литература

- [1] Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М., Наука, 1986.
- [2] Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. М., Наука, 1976.
- [3] Мориц Г. Современная физическая геодезия. М., Недра, 1983.
- [4] Серкеров С.А. Теория гравитационного и магнитного потенциалов. М., Недра, 1990.
- [5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1977.