

УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЗАМКНУТЫХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИИ

B.A. Kac

Аннотация

В статье определяется новая версия метрической размерности плоской кривой. В терминах этой размерности описываются условия разрешимости краевой задачи о скачке, улучшающие известные ранее.

Введение

В теории функций комплексной переменной хорошо известна так называемая задача о скачке. Она ставится следующим образом. Пусть Γ есть простая жорданова кривая на комплексной плоскости C , разбивающая плоскость на конечную область D^+ и содержащую точку ∞ область D^- . Пусть на этой кривой задана функция $f(t)$. Требуется найти голоморфную в $\overline{C} \setminus \Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую при приближении z из областей D^+ и D^- к любой точке $t \in \Gamma$ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ соответственно, связанные условием граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma; \quad (1)$$

кроме того, требуется, чтобы $\Phi(\infty) = 0$.

Предполагаем, что заданная на кривой Γ функция f удовлетворяет условию Гельдера

$$\sup \left\{ \frac{|f(t') - f(t'')|}{|t' - t''|^\nu} : t', t'' \in \Gamma, t' \neq t'' \right\} \equiv h_\nu(f, \Gamma) < \infty$$

с каким-либо показателем $\nu \in (0, 1]$. Ниже через $H_\nu(\Gamma)$ обозначаем пространство Гельдера, то есть множество всех заданных на Γ функций, удовлетворяющих этому условию.

В случае кусочно-гладкого контура решение задачи о скачке подробно описано в монографиях [1, 2]. Оно дается интегралом типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (2)$$

Автор статьи исследовал разрешимость задачи о скачке на неспрямляемой кривой (см., например, [3]), интегрирование по которой, вообще говоря, не определено. Было доказано, что для любой простой замкнутой кривой Γ и любой заданной на ней функции $f \in H_\nu(\Gamma)$ задача (1) разрешима при условии

$$\nu > \frac{1}{2} \operatorname{Dm} \Gamma, \quad (3)$$

где $Dm\Gamma$ – это хорошо известная в теории фракталов (см., например, [4]) верхняя метрическая размерность Γ , то есть

$$Dm\Gamma = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon; \Gamma)}{-\log \varepsilon}.$$

Здесь $N(\varepsilon; \Gamma)$ есть наименьшее число кругов диаметра ε , образующих покрытие Γ (по видимому, впервые определение этой размерности было дано в работе [5]).

Условие (3) неулучшаемо. Это означает, что для любой пары чисел d, ν , связанных неравенствами $0 < \nu \leq d/2 < 1$, можно построить кривую Γ верхней метрической размерности d и функцию $f \in H_\nu(\Gamma)$, для которых задача о скачке (1) неразрешима. Конструкция таких кривой и функции приведена, например, в [3]. Однако этот результат не исключает существования кривых Γ и заданных на них функций f , для которых условие (3) не выполнено, но задача (1) разрешима. Некоторые классы кривых и функций, иллюстрирующие такую возможность, описаны в работах [6–8].

В связи с этим возникает задача построения иных характеристик типа размерности, которые более точно описывают природу кривых, для которых задача о скачке разрешима. Этому и посвящена данная работа.

1. Определение размерности $dm^\diamond \Gamma$

Пусть Γ есть неспрямляемая замкнутая кривая, ограничивающая конечную область D^+ . Рассмотрим всевозможные представления этой области в виде объединения бесконечных семейств квадратов, не имеющих общих внутренних точек.

Определение 1. Пусть множество $e(\Gamma)$ состоит из всех чисел $p \geq 1$, обладающих следующим свойством:

Область D^+ допускает представление в виде объединения квадратов Q_1, Q_2, Q_3, \dots со сторонами a_1, a_2, a_3, \dots , не имеющих общих внутренних точек и таких, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^p$ сходится.

Тогда величину $\inf e(\Gamma)$ будем обозначать $dm^\diamond \Gamma$.

Очевидно, это также характеристика типа размерности. Приведем соотношения между размерностями $Dm\Gamma$ и $dm^\diamond \Gamma$.

Теорема 1. Для любой плоской замкнутой кривой Γ справедливы соотношения

$$1 \leq dm^\diamond \Gamma \leq Dm\Gamma \leq 2.$$

Доказательство. Первое и последнее неравенства очевидны, так что мы должны доказать неравенство $dm^\diamond \Gamma \leq Dm\Gamma$.

Обозначим для краткости $d = Dm\Gamma$ и разобьем плоскость на квадраты, стороны которых имеют длину $\varepsilon > 0$ и параллельны осям. Как известно (см., например, [3]), определение верхней метрической размерности эквивалентно равенству

$$Dm\Gamma = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log M(\varepsilon; \Gamma)}{-\log \varepsilon},$$

где $M(\varepsilon; \Gamma)$ означает число таких квадратов, пересекающих Γ . Поэтому для любого $d' > d$ неравенство $M(2^{-n}; \Gamma) \leq 2^{nd'}$ справедливо для всех достаточно больших натуральных n . Теперь рассмотрим разбиение Уитни (см., например, [9]) области D^+ . Оно состоит из попарно не пересекающихся диадических квадратов (то

есть квадратов со стороной 2^{-n} , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Поскольку область D^+ конечна, то в ее разбиении Уитни нет произвольно больших квадратов, и фигурирующая в определении сумма $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^p$ приобретает вид $\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-np} m_n$, где m_n есть число квадратов со стороной 2^{-n} , входящих в разбиение Уитни области D^+ , а n_0 – некоторое фиксированное целое число. Как показано в [3], имеет место оценка $m_n \leq CM(2^{-n}; \Gamma)$, где C – абсолютная постоянная. Поэтому слагаемые последнего ряда при достаточно больших n мажорируются величинами $2^{n(d'-p)}$, и при $p > d'$ этот ряд сходится. Следовательно, множество $e(\Gamma)$ содержит луч (d, ∞) , то есть $dm^\diamond \Gamma \leq d$. Тем самым теорема доказана. \square

Приведем пример оценки данной размерности. Зафиксируем числа $\beta \geq 1$ и $\mu \geq 1$. Разделим отрезок действительной оси $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ на $2^{[n\beta]}$ равных частей длины $\alpha_n = 2^{-n-[n\beta]}$ каждая¹. Обозначим через $x_{n,j}$ точки деления, то есть $x_{n,j} = 2^{-n} + j\alpha_n$, $j = 0, 1, \dots, 2^{[n\beta]} - 1$, и рассмотрим вертикальные отрезки $I_{n,j} = [x_{n,j}, x_{n,j} + i2^{-n}]$. Верхняя метрическая размерность объединения этих отрезков $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{2^{[n\beta]}-1} I_{n,j}$ вычислена в [3]; она равна $Dm A = 2\beta/(\beta + 1)$.

Теперь положим $\varepsilon_n = \alpha_n^\mu/2$ и рассмотрим прямоугольники $\delta_{n,j} = \{z = x + iy : x_{n,j} < x < x_{n,j} + \varepsilon_n, 0 < y < 2^{-n}\}$. Они попарно не пересекаются. Пусть δ_0 есть квадрат $\{z = x + iy : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Область D^+ определим равенством $D^+ = \delta_0 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{2^{[n\beta]}-1} \delta_{n,j} \right)$, то есть D^+ есть единичный квадрат со счетным множеством прямоугольных вырезов, сгущающихся к точке 0. Обозначим через Γ^* границу области D^+ . Это – ломаная с бесконечным числом звеньев. Она спрямляется вне любой окрестности точки 0. Отрезки $I_{n,j}$ являются левыми вертикальными сторонами прямоугольников $\delta_{n,j}$. Отсюда нетрудно вывести, что $Dm \Gamma^* = Dm A = 2\beta/(\beta + 1)$.

Все эти прямоугольники без труда разбиваются на квадраты, причем непосредственные вычисления показывают, что ряд из определения 1 сходится при

$$p > \frac{(\mu + 1)\beta + (\mu - 1)}{\mu(\beta + 1)}.$$

Отсюда

$$dm^\diamond \Gamma^* \leq \frac{(\mu + 1)\beta + (\mu - 1)}{\mu(\beta + 1)}. \quad (4)$$

При $\beta > 1$, $\mu > 1$ правая часть (4) меньше $Dm \Gamma^*$, так что данный пример показывает, что метрическая характеристика $dm^\diamond \Gamma$ может быть строго меньше верхней метрической размерности кривой Γ .

В следующем параграфе дадим нижнюю оценку для величины $dm^\diamond \Gamma$.

2. Разрешимость задачи о скачке

Мы докажем, что в условии (3) верхнюю метрическую размерность можно заменить размерностью $dm^\diamond \Gamma$. Доказательство основано на использовании продолжения Уитни. Согласно теореме Уитни (см., например, [9]) любую заданную на компакте $K \subset \mathbf{C}$ функцию $f \in H_\nu(K)$ можно продолжить до заданной на всей комплексной плоскости функции $u(z) \in H_\nu(\mathbf{C})$ таким образом, что продолженная

¹Здесь и ниже квадратные скобки означают целую часть.

функция u имеет в $\mathbf{C} \setminus K$ частные производные по x и по y всех порядков (здесь $z = x + iy$), причем

$$|\nabla u(z)| \leq Ch_\nu(f, K) \operatorname{dist}^{\nu-1}(z, K).$$

Здесь и ниже C означает различные абсолютные постоянные. Из этой оценки немедленно следует

Лемма 1. *Пусть Q есть квадрат с границей γ и стороной a , функция f принадлежит пространству $H_\nu(\gamma)$, а f^w есть ее продолжение Уитни с кривой γ в область Q . Если $p < 1/(1-\nu)$, то*

$$\iint_Q |\nabla f^w|^p dx dy \leq Ch_\nu^p(f, \gamma) a^{2-p(1-\nu)}.$$

Теперь мы можем доказать результат, заявленный в начале этого параграфа.

Теорема 2. *Если $f \in H_\nu(\Gamma)$, то задача о скачке (1) разрешима при выполнении условия*

$$\nu > \frac{1}{2} \operatorname{dm}^\diamond \Gamma. \quad (5)$$

Доказательство. По определению размерности $\operatorname{dm}^\diamond \Gamma$ для любого $d' > \operatorname{dm}^\diamond \Gamma$ область D^+ можно представить в виде объединения квадратов Q_j , $j = 1, 2, \dots$, со сторонами a_j , не имеющих общих внутренних точек и таких, что ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^{d'}$ сходится. В силу условия (5) мы можем считать, что $d' < 2\nu$. Пусть γ_j есть граница квадрата Q_j . Положим $\Gamma_0 \equiv \Gamma \cup (\bigcup_{j \geq 0} \gamma_j)$. Продолжим скачок $f \in H_\nu(\Gamma)$ по Уитни до функции $u(z) \in H_\nu(\mathbf{C})$, а затем возьмем сужение u на Γ_0 и повторно применим продолжение Уитни к этому сужению. Полученную функцию обозначим $f^w(z)$. Она обладает всеми перечисленными выше свойствами. Кроме того, из конструкции оператора продолжения Уитни [9] следует, что внутри любого из квадратов Q_j функцию f^w можно рассматривать как результат продолжения по Уитни сужения u на γ_j с этой кривой на всю плоскость. Поэтому к квадрату Q_j и функции f^w применима лемма 1.

Будем искать решение задачи о скачке в виде ряда из интегралов типа Коши

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f^w(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Представим каждый из этих интегралов по формуле Бореля–Помпейа (см., например, [10]):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f^w(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = f^w(z) \chi_j(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{Q_j} \frac{\partial f^w}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z}.$$

Здесь $\chi_j(z)$ есть характеристическая функция области Q_j . Суммируя эти представления, получаем

$$\Phi(z) = f^w(z) s(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{D^+} \frac{\partial f^w}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z}, \quad (6)$$

где $s(z)$ есть характеристическая функция области D^+ . Интегральный член последнего равенства можно рассматривать как результат применения оператора

$$\varphi(\zeta) \mapsto \iint_{D^+} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z}$$

к функции

$$\varphi(\zeta) = \frac{\partial f^w(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}}.$$

Хорошо известно (см., например, [10]), что при $p > 2$ этот оператор действует из $L^p(D^+)$ в $H_{(p-2)/p}(\mathbf{C})$. Поэтому при условии

$$\sum_{j \geq 0} \iint_{Q_j} |\nabla f^w|^p dx dy < \infty, \quad p > 2, \quad (7)$$

интегральный член формулы (6) есть функция, непрерывная во всей комплексной плоскости. Внешний член $f^w(z)s(z)$ имеет скачок f на кривой Γ . Из построения функции $\Phi(z)$ следует, что она голоморфна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma$ и обращается в нуль в бесконечности. Итак, при условии (7) задача о скачке разрешима и одно из ее решений дается формулой (6).

Согласно лемме 1 условие (7) выполнено, если ряд $\sum_{j \geq 0} a_j^{2-p(1-\nu)}$ сходится при каком-либо $p > 2$. Приравнивая $2 - p(1 - \nu) = d'$, получаем $p = (2 - d')/(1 - \nu)$. Таким образом, условие $p > 2$ равносильно условию $\nu > d'/2$, что завершает доказательство теоремы. \square

Теперь вернемся к кривой Γ^* , построенной в конце предыдущего параграфа. Здесь дадим нижнюю оценку для $\text{dm}^\circ \Gamma$. Для этого построим специальный скачок на этой кривой.

Сначала определим функцию $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ действительной оси, полагая ее равной 0 в точках $x_{n,j}$ и величине ε_n^ν в точках $x_{n,j} + \varepsilon_n$ при $j = 0, 1, \dots, 2^{[n\beta]} - 1$, $n = 1, 2, \dots$. На всех отрезках, на которые точки $x_{n,j}$ и $x_{n,j} + \varepsilon_n$ делят отрезок $[0, 1]$, полагаем эту функцию линейной. В точках 0 и 1 доопределяем ее нулем по непрерывности. Хорошо известно, что такая функция с пилообразным графиком удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν . Далее полагаем $f(x+iy) \equiv f(x)$; очевидно, $f \in H_\nu(\Gamma^*)$. При этом функция f определена в области D^+ , ограниченной кривой Γ^* , и имеет там кусочно-постоянный градиент. Внутри прямоугольника δ_{nj} имеем $\partial f / \partial x = \varepsilon_n^{\nu-1} = 2^{(n+[n\beta])\mu(1-\nu)}$; отсюда легко вывести, что

$$\left| \frac{\partial f(z)}{\partial x} \right| \leq C|z|^{-\sigma}, \quad z \in \delta_{nj}, \quad (8)$$

где $\sigma = (1 - \nu)(1 + \beta)\mu$, а постоянная C не зависит от n и j .

Теперь рассмотрим функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{[n\beta]}-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{nj}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где γ_0 и γ_{nj} есть обходимые против часовой стрелки границы квадрата δ_0 и прямоугольников δ_{nj} соответственно. Прежде всего выясним, когда сходится ряд в

правой части. Для этого представим его слагаемые по формуле Бореля–Помпейя:

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^{[n\beta]}-1} \left(f(z)\chi_{nj}(z) - \frac{1}{2\pi i} \iint_{\delta_{nj}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right),$$

где $\chi_{nj}(z)$ есть характеристическая функция прямоугольника δ_{nj} . Здесь

$$\iint_{\delta_{nj}} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \right| dx dy = \varepsilon_n^\nu 2^{-n},$$

поэтому ряд из интегралов сходится одновременно с числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^\nu 2^{-n + [n\beta]} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{([n\beta]-n)-([n\beta]+n)\mu\nu}$, то есть при условии

$$\nu > \frac{\beta - 1}{\mu(\beta + 1)}. \quad (9)$$

Легко видеть, что при этом условии функция $\Psi(z)$ голоморфна в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \Gamma^*$, обращается в нуль в точке ∞ , а в любой точке $t \in \Gamma^* \setminus \{0\}$ она имеет граничные значения с обеих сторон, связанные равенством (1). Остается выяснить поведение этой функции в окрестности точки 0.

Сначала оценим Ψ снизу на отрезке $[-1, 0]$ действительной оси. Очевидно, интеграл типа Коши по границе квадрата

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

и сумма всех функций вида $f(z)\chi_{nj}(z)$ ограничены в $\overline{\mathbf{C}}$. Далее, при $z = -\xi < 0$ имеем

$$\iint_{\delta_{nj}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{dx dy}{\zeta - z} = 2^{-n-1} \varepsilon_n^{\nu-1} \log \frac{x_{nj} + \varepsilon_n + \xi}{x_{nj} + \xi},$$

и следовательно,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \iint_{\delta_{nj}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right) \leq -\pi^{-1} 2^{-n-1} \varepsilon_n^{\nu-1} \log \left| \frac{x_{nj} + \varepsilon_n + \xi}{x_{nj} + \xi} \right| \leq -\frac{C 2^{-n} \varepsilon_n^\nu}{2^{-n} + \xi}.$$

Суммируя эти оценки сначала по j и затем по n , получаем

$$\operatorname{Re} \Psi(-\xi) \leq C - C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{[n\beta]} \varepsilon_n^\nu}{2^n \xi + 1}.$$

Отметим, что при $\xi > 0$ ряд в правой части сходится, поскольку при этом условии

$$\frac{2^{[n\beta]} \varepsilon_n^\nu}{2^n \xi + 1} < \frac{2}{\xi} 2^{n(\beta-1-\nu\mu(\beta+1))},$$

а множитель при n в показателе отрицателен по условию (9). При $\xi = 0$ этот ряд расходится, если

$$\nu < \frac{\beta}{\mu(\beta + 1)}. \quad (10)$$

В этом случае можем отбросить в рассматриваемом ряде те слагаемые, где $2^n \xi > 1$, и в результате получаем оценку

$$\operatorname{Re} \Psi(-\xi) \leq C - C \xi^{\beta - \nu \mu(\beta + 1)}, \quad C > 0.$$

При условии (10) показатель здесь отрицателен, то есть Ψ не имеет предельного значения $\Psi^+(0)$ и поэтому не является решением задачи (1).

Покажем, что при дополнительном ограничении $\sigma < 2$ (здесь σ – показатель из (8)) задача о скачке не имеет и других решений. Действительно, в этом случае стандартные оценки интегралов (см., например, [10]) позволяют вывести из неравенства (8) оценку $|\Psi(z)| \leq C|z|^{1-\sigma}$. Поэтому для любого решения Φ изолированная особенность разности $\Phi - \Psi$ в точке 0 устранима, что в силу условия $\Phi(\infty) = \Psi(\infty) = 0$ влечет тождественное равенство $\Phi(z) \equiv \Psi(z)$.

Условие $\sigma < 2$ означает, что

$$\nu > \frac{\mu(1 + \beta) - 2}{\mu(1 + \beta)}. \quad (11)$$

Таким образом, задача о скачке на контуре Γ^* с построенным выше скачком f не имеет решений, если выполнены условия (9)–(11). Эти условия непротиворечивы, если

$$1 < \mu < \frac{\beta + 2}{\beta + 1}, \quad (12)$$

и в силу теоремы 2 при условии (12) имеем

$$\operatorname{dm}^\diamond \Gamma^* \geq \frac{2\beta}{\mu(\beta + 1)}. \quad (13)$$

Эта оценка содержательна при $\frac{2\beta}{\mu(\beta + 1)} > 1$.

Итак, при условии

$$1 < \mu < \frac{\min\{\beta + 2, 2\beta\}}{\beta + 1}$$

справедлива нижняя оценка (13) для величины $\operatorname{dm}^\diamond \Gamma$. В частности, при этом условии размерность кривой Γ^* отлична от ее размерности Хаусдорфа (см., например, определение размерности Хаусдорфа в [11]), поскольку размерность Хаусдорфа кривой, теряющей спрямляемость лишь в одной точке, равна, очевидно, единице.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-81019-Бел-а).

Summary

B.A. Kats. Metric characteristics of closed plane curves with application.

The author introduces new metric characteristics of dimensional type for closed non-rectifiable curves in the complex plane and proves new conditions of solvability of certain boundary value problem for holomorphic functions in domains with non-rectifiable boundary.

Литература

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 600 с.

3. *Кац Б.А.* Краевая задача Римана на негладких дугах и фрактальные размерности // Алгебра и Анализ. – 1994. – Т. 6, Вып. 1. – С. 147–171.
4. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 280 с.
5. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε -энтропия и ёмкость множества в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – Т. 14, Вып. 2. – С. 3–86.
6. *Кац Б.А., Погодина А.Ю.* О граничных значениях интеграла типа Коши по негладкой кривой // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 15–21.
7. *Кац Б.А.* Граничные свойства интеграла Коши по кривой, теряющей спрямляемость в точке // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 8. – С. 29–37.
8. *Кац Б.А., Погодина А.Ю.* Задача о скачке и ряд Фабера – Шаудера // Изв. вузов. Математика. – в печати.
9. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир. – 1973. – 342 с.
10. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Мир, 1988. – 509 с.
11. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств. – М.: Мир, 1971. – 125 с.

Поступила в редакцию
27.06.06

Кац Борис Александрович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета.