

УДК 535.14

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В ДВУХАТОМНОЙ ДВУХФОТОННОЙ НЕВЫРОЖДЕННОЙ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА

М.С. Русакова, Е.К. Башкиров

Аннотация

В работе найдена точная волновая функция, получены асимптотические решения для векторов состояний систем в приближении сильного поля для двухатомной модели с невырожденным двухфотонным взаимодействием. Описана динамика редуцированной энтропии для различных начальных состояний атомов и когерентного начального состояния поля, сделаны выводы о свойствах атомно-полевого перепутывания. Показано существование возможности восстановления системы, приготовленной вначале в чистом неперепутанном состоянии, в данное состояние в процессе эволюции.

Введение

В современной квантовой физике многие из наиболее важных концептуальных проблем связаны с изучением так называемых перепутанных состояний (“entangled states”). Перепутанные состояния играют основополагающую роль в квантовой криптографии, квантовой теории информации, физике квантовых вычислений [1]. Изолированную контролируемую квантово-механическую систему, удобную для генерации и исследования свойств перепутанных состояний, представляет собой резонаторная электродинамика: атом, связанный с модой квантового электромагнитного поля через дипольное взаимодействие в высокочастотном резонаторе. Простейшим примером такой системы может служить модель Джейнса – Каммингса (МДК), используя обобщения которой, можно исследовать как атомно-полевоe, так и атом-атомное перепутывание. Для оценки степени перепутывания состояний атомной и полевой подсистем, приготовленных в начальный момент в чистом состоянии, может быть использована редуцированная энтропия атомной (или полевой) подсистемы [2]. Эволюция редуцированной энтропии одной из подсистем отражает временное поведение степени перепутывания состояний, при этом большие значения энтропии соответствуют большему перепутыванию.

Нами была ранее исследована динамика энтропии двухмодовой модели трехуровневого атома лестничного типа [3], двухуровневого атома с мультиплетными переходами в резонаторе с расстройкой [4]. В продолжение начатых исследований в данной работе была поставлена задача исследовать динамику редуцированной энтропии атомной подсистемы для обобщения МДК – двухатомной модели с невырожденными двухфотонными переходами. В п. 1 описана рассматриваемая модель и найдена точная волновая функция системы. В п. 2 получены асимптотические разложения для вектора состояния системы в приближении сильного поля. В п. 3 описана динамика редуцированной энтропии для различных начальных состояний атомов и когерентного начального состояния поля, сделаны выводы о свойствах атомно-полевого перепутывания в системе.

1. Описание модели. Точное решение уравнения Шредингера для волновой функции системы

Двухатомная модель с невырожденными двухфотонными переходами может быть описана при помощи гамильтониана взаимодействия

$$H_{\text{int}} = \sum_{j=1}^2 \hbar g (a_1^+ a_2^+ R_j^- + a_1 a_2 R_j^+),$$

где приняты стандартные обозначения (см. рис. 1). Для простоты мы положили константы диполь-фотонного взаимодействия равными друг другу $g_1 = g_2 = g$.

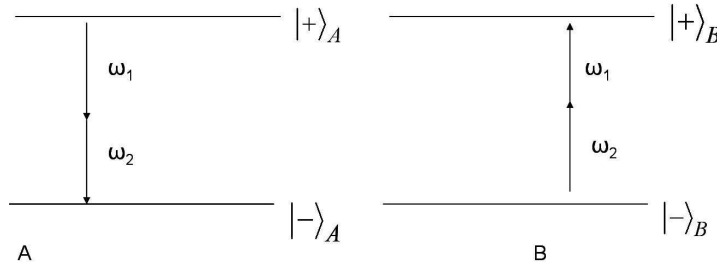


Рис. 1. Схема разрешенных переходов в двухатомной модели с невырожденным двухфотонным взаимодействием

В предположении, что атомы в начальный момент времени находятся в некоей суперпозиции атомных состояний, а поле – в когерентном состоянии, полная волновая функция системы атом + поле может быть представлена в виде

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|+, +\rangle + \beta|-, -\rangle + \gamma|+, -\rangle + \delta|-, +\rangle) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} C_{n_1} C_{n_2} |n_1\rangle |n_2\rangle,$$

$$C_n = \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} \exp(-\bar{n}/2).$$

Точное решение уравнения Шредингера для волновой функции и для данного начального состояния системы, таким образом, принимает вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n_1, n_2} (A_{n_1 n_2}(t)|+, +\rangle + B_{n_1 n_2}(t)|-, -\rangle + C_{n_1 n_2}(t)|+, -\rangle + D_{n_1 n_2}(t)|-, +\rangle).$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{n_1 n_2}(t) &= \frac{2\alpha}{\Omega_1^2} C_{n_1} C_{n_2} ((n_1 + 2)(n_2 + 2) + (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cos \Omega_1 t) - \\ &- \frac{4\beta}{\Omega_1^2} C_{n_1+2} C_{n_2+2} \sin^2 \frac{\Omega_1 t}{2} \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 2)} - \\ &- i \frac{\gamma + \delta}{\Omega_1} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_1 t \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{n_1 n_2}(t) &= -\frac{4\alpha}{\Omega_2^2} C_{n_1-2} C_{n_2-2} \sin^2 \frac{\Omega_2 t}{2} \sqrt{n_1 n_2 (n_1 - 1) (n_2 - 1)} + \\
&+ \frac{2\beta}{\Omega_2^2} C_{n_1-1} C_{n_2-1} ((n_1 - 1) (n_2 - 1) + n_1 n_2 \cos \Omega_2 t) - \\
&- i \frac{\gamma + \delta}{\Omega_2} C_{n_1} c_{n_2} \sin \Omega_2 t \sqrt{n_1 n_2}, \\
C_{n_1 n_2}(t) &= -i \frac{\alpha}{\Omega_3} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \sin \Omega_3 t \sqrt{n_1 n_2} - \\
&- i \frac{\beta}{\Omega_3} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_3 t \sqrt{(n_1 + 1) (n_2 + 1)} + \\
&+ \frac{1}{2} C_{n_1} C_{n_2} ((\gamma - \delta) + (\gamma + \delta) \cos \Omega_3 t), \\
D_{n_1 n_2}(t) &= -i \frac{\alpha}{\Omega_3} C_{n_1-1} C_{n_2-1} \sin \Omega_3 t \sqrt{n_1 n_2} - \\
&- i \frac{\beta}{\Omega_3} C_{n_1+1} C_{n_2+1} \sin \Omega_3 t \sqrt{(n_1 + 1) (n_2 + 1)} + \\
&+ \frac{1}{2} C_{n_1} C_{n_2} ((\delta - \gamma) + (\gamma + \delta) \cos \Omega_3 t),
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
\Omega_1(n_1, n_2) &= \sqrt{2} \sqrt{(n_1 + 1) (n_2 + 1) + (n_1 + 2) (n_2 + 2)} = \\
&= \Omega_2(n_1 + 2, n_2 + 2) = \Omega_3(n_1 + 1, n_2 + 1).
\end{aligned}$$

Как видно, в общем случае волновая функция системы не может быть представлена в виде произведения векторов состояний атомной и полевой частей, что означает существование атомно-полевого перепутывания. При помощи данного точного решения для волновой функции системы можно построить редуцированную матрицу плотности системы, если взять след по полевым переменным от выражения $|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. Таким образом, зная точное выражение для волновой функции рассматриваемой системы, мы можем получить точное выражение для параметра атомно-полевого перепутывания в системе, провести оценку степени перепутывания, а также исследовать возможности и условия распутывания системы в начальное чистое неперепутанное состояние.

2. Эволюция вектора состояния системы

В п. 1 было найдено точное решение уравнения Шредингера для волновой функции рассматриваемой системы. Однако, если в начальный момент времени интенсивность электромагнитного поля достаточно высока, то в системе можно наблюдать так называемое распутывание или возвращение к неперепутанному первоначальному состоянию. В связи с этим представляет интерес исследовать поведение вектора состояния системы в случае сильного когерентного поля.

Как уже упоминалось выше, если в начальный момент времени система была приготовлена в чистом неперепутанном состоянии, то эволюция волновой функции может происходить таким образом, что в определенные моменты времени система восстанавливается в данное чистое неперепутанное состояние. В эти моменты времени вектор состояния системы будет представлен в виде произведения векторов

состояний атомной и полевой подсистем. В качестве таких начальных состояний атомной подсистемы могут выступать собственные значения полуклассического гамильтониана взаимодействия $H_{SC} = \hbar g (v_1^* v_2^* R_1^- + v_1 v_2 R_1^+ + v_1^* v_2^* R_2^- + v_1 v_2 R_2^+)$:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= \frac{1}{2} \left[e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)} |+, +\rangle + |-, -\rangle + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) \right], \\ |\Phi_2\rangle &= \frac{1}{2} \left[e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)} |+, +\rangle + |-, -\rangle - e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) \right], \\ |\Phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)} |+, +\rangle + |-, -\rangle \right], \quad |\Phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|+, -\rangle - |-, +\rangle]. \end{aligned}$$

Если атомы в начальный момент времени будут находиться в одном из данных собственных состояний полуклассического гамильтониана, а поле в начальный момент времени – в когерентном состоянии большой интенсивности, то эволюция вектора состояния такой системы будет описываться следующей асимптотикой:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle|v\rangle &\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} C_{n_1} C_{n_2} |n_1\rangle|n_2\rangle e^{-2ig\sqrt{n_1 n_2}t} e^{igt} \times \\ &\times \left\{ e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)} e^{-4igt} |+, +\rangle + |-, -\rangle + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} e^{-2igt} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) \right\}, \\ |\Phi_2\rangle|v\rangle &\rightarrow \frac{1}{2} \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} C_{n_1} C_{n_2} |n_1\rangle|n_2\rangle e^{2ig\sqrt{n_1 n_2}t} e^{-igt} \times \\ &\times \left\{ e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)} e^{4igt} |+, +\rangle + |-, -\rangle - e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} e^{2igt} (|+, -\rangle + |-, +\rangle) \right\}, \\ |\Phi_3\rangle|v\rangle &\rightarrow |\Phi_3\rangle|v\rangle, \quad |\Phi_4\rangle|v\rangle \rightarrow |\Phi_4\rangle|v\rangle. \end{aligned}$$

Как следует из данных выражений, в процессе эволюции вектор состояния данной системы может быть факторизован в любой момент времени. Это означает, что система при рассматриваемых условиях находится в чистом перепутанном состоянии в любой момент времени. Для последних двух собственных состояний полуклассического гамильтониана видно, что вектор состояния не эволюционирует с течением времени, и, соответственно, никакого атомно-полевого перепутывания при данных начальных условиях в системе не возникает.

3. Динамика редуцированной энтропии атомной подсистемы для различных начальных состояний атомов и поля

В качестве критерия степени перепутывания для систем, состоящих из двух подсистем и приготовленных в чистом состоянии, может быть выбрана линейная энтропия редуцированной атомной (или полевой) матрицы плотности. Линейная энтропия редуцированной матрицы плотности атомной подсистемы для рассматриваемой модели имеет вид:

$$\begin{aligned} S &= 1 - Tr(\rho_{AT}^2) = 1 - \left[\left(\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} A_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}^* \right)^2 + \left(\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} B_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2}^* \right)^2 \right] + \\ &+ \left(\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} C_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2}^* \right)^2 + \left(\sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} D_{n_1 n_2} D_{n_1 n_2}^* \right)^2 + \end{aligned}$$

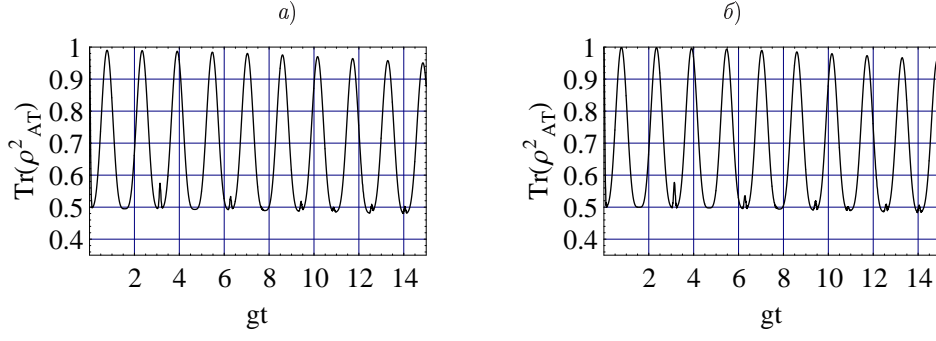


Рис. 2. Эволюция $Tr(\rho_{AT}^2)$ для сильного когерентного поля ($\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = 50$) и начальных состояний атомов $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle)$ (а) и $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2i(\varphi_1 + \varphi_2)}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ (б)

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} A_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2}^* \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} B_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}^* + \\
& + 2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} C_{n_1 n_2} D_{n_1 n_2}^* \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} D_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2}^* + \\
& + 2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} A_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2}^* \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} C_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}^* + \\
& + 2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} A_{n_1 n_2} D_{n_1 n_2}^* \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} D_{n_1 n_2} A_{n_1 n_2}^* + \\
& + 2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} B_{n_1 n_2} C_{n_1 n_2}^* \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} C_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2}^* + \\
& + 2 \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} B_{n_1 n_2} D_{n_1 n_2}^* \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} D_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2}^* \Big],
\end{aligned}$$

где коэффициенты $A_{n_1 n_2}$, $B_{n_1 n_2}$, $C_{n_1 n_2}$, $D_{n_1 n_2}$ получены в п. 1. При этом значение линейной энтропии, равное 0, соответствует полностью неперепутанному состоянию, а значение, равное $3/4$, – максимально перепутанному состоянию.

Если атомная система в начальный момент времени приготовлена в одном из собственных состояний полуклассического гамильтониана либо в суперпозиции таких состояний, то существуют возможные пути эволюции энтропии, когда система периодически возвращается в чистое неперепутанное состояние либо когда система не эволюционирует вовсе, и перепутанные состояния не возникают вовсе. На графиках представлена эволюция величины $Tr(\rho_{AT}^2)$ для различных начальных состояний атомов и когерентного начального состояния поля большой интенсивности ($\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = 50$), все величины представлены в относительных единицах константы связи g). Значению $Tr(\rho_{AT}^2) = 1$ на графике соответствует неперепутанное состояние атомно-полевой системы, соответственно, чем ближе значение данной величины к $1/4$, тем больше степень перепутывания атомной и полевой подсистем друг с другом.

Рис. 2, а, б демонстрируют возможность периодического возвращения системы в чистое неперепутанное состояние. Этим моментам времени на графике соответ-

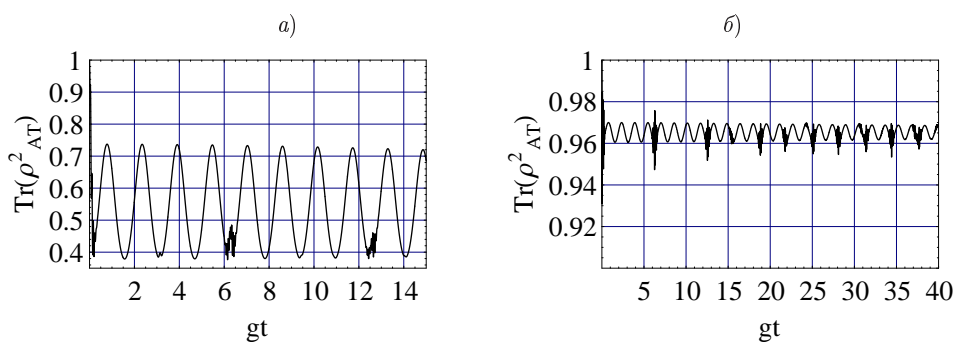


Рис. 3. Эволюция $Tr(\rho_{AT}^2)$ для сильного когерентного поля ($\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = 50$) и начальных состояний атомов $|+, +\rangle$ (а) и $|\Phi_3\rangle$ (б)

ствуют значения $Tr(\rho_{AT}^2)$, близкие к единице. Характер поведения – строго периодический, при этом в системе создается перепутывание (степень которого близка к 70%), которое периодически сменяется практически полным восстановлением системы в первоначальное чистое неперепутанное состояние. Рис. 3, б иллюстрирует вариант поведения системы, когда вектор состояния можно считать практически неизменным с течением времени (система все время остается в чистом неперепутанном состоянии). Данный результат иллюстрирует выводы, сделанные на основе анализа динамики асимптотики вектора состояния $|\Phi_3\rangle$, и подтверждает их. И, наконец, на рис. 3, а представлена ситуация, когда атомы приготовлены в начальный момент времени в чистом состоянии вида $|+, +\rangle$. Вектор состояния такой системы не демонстрирует восстановления до начального значения ни для каких моментов времени, система переходит в перепутанное состояние. Максимальная степень перепутывания в данном случае достигает $\sim 80\%$, система периодически частично распутывается, достигая величины перепутывания порядка 35%.

Заключение

Атомно-полево перепутывание в рассматриваемой системе может быть разрушено в процессе эволюции системы. При этом, если система находилась в начальный момент времени в чистом неперепутанном состоянии, процесс «распутывания» может носить периодический характер, а система в данные моменты времени может возвращаться в начальное состояние. В работе найдены такие начальные условия, которые приводят к подобной эволюции системы. Получены точные и асимптотические выражения для векторов состояния системы, на их основе построено выражение для линейной энтропии редуцированной атомной матрицы плотности как критерия степени перепутывания. Проведена оценка степени перепутывания, возникающего в системе.

Summary

M.S. Rusakova, E.K. Bashkirov. Entanglement in the two-atom two-photon nondegenerate Jaynes – Cummings model.

The exact wave function is found in the work, the asymptotic solutions for system state vectors are obtained in the approximation of strong field for two-atom model with nondegenerate two-photon interaction. The reduced entropy dynamics is described for various initial atomic states and coherent field input, some conclusions about atom-field entanglement are made. We also show the possibility for the system being initially in the pure nonentangled state to revive into this state during the evolution process.

Литература

1. Бауместер Д., Эжерт Ф., Цайлингер А. Физика квантовой информации. – М.: Постмаркет, 2002. – 376 с.
2. Gea-Banacloche J. Atom- and field-state evolution in the Jaynes–Cummings model for large initial fields // Phys. Rev A. – 1991. – V. 44. – P. 5913–5931.
3. Башкиров Е.К., Русакова М.С. Перепутанные состояния в системе трехуровневого атома Ξ -типа, взаимодействующего с квантовым электромагнитным полем // Физика волновых процессов. – 2006. – № 9. – С. 4–10.
4. Башкиров Е.К., Русакова М.С. Перепутанные состояния и эволюция энтропии в многофотонной модели Джейнса–Каммингса // Концепции симметрии и фундаментальных полей в квантовой физике XXI века. – Самара: Универс-групп, 2005. – С. 94–96.

Поступила в редакцию
12.01.07

Русакова Маргарита Сергеевна – аспирант кафедры оптики и спектроскопии Самарского государственного университета.

E-mail: ruta@ssu.samara.ru

Башкиров Евгений Константинович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.

E-mail: bash@ssu.samara.ru