

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Р.Л. Давыдов, Л.У. Султанов

Аннотация

Настоящая работа посвящена разработке и численной реализации методики исследования напряженно-деформированного состояния упруго-пластических тел с учетом больших деформаций. Использована процедура пошагового нагружения. Пространственная дискретизация основана на методе конечных элементов. С помощью предложенной методики решены задачи об упругопластическом деформировании трубы и растяжении стержня круглого сечения.

Ключевые слова: конечные упругопластические деформации, аддитивное разложение полных деформаций, линеаризованные физические соотношения.

Введение

В работе рассматривается вопрос построения алгоритма численного решения задачи о больших упругопластических деформациях. В [1–4] приведены результаты исследования процесса деформирования нелинейно упругих тел и настоящая работа является продолжением этих работ. Кинематика среды описывается левым тензором Коши–Грина (мера Фингера), напряженное состояние определяется тензором истинных напряжений Коши–Эйлера. При решении задачи с учетом пластических деформаций используется ассоциированный закон течения и аддитивное представление полных деформаций скорости. Алгоритм решения основан на методе пошагового нагружения с итерационным уточнением на шаге нагружения. Разрешающее уравнение получено путем линеаризации уравнения виртуальных мощностей, при выводе физических соотношения используется выражение потенциала упругих деформаций. Численная реализация основана на методе конечных элементов (МКЭ), используется восьмиузловой изопараметрический конечный элемент. Предложенная методика апробирована на решении задачи об упругопластическом деформировании трубы. Проведено сравнение с аналитическим решением. Рассмотрена также задача о растяжении круглого стержня с образованием шейки, результаты решения которой имеют хорошее совпадение с результатами, полученными другими авторами.

1. Кинематика среды. Уравнение в скоростях напряжений

В качестве тензоров, описывающих деформацию и скорость деформации, используются тензор градиента деформации (F), мера деформации Фингера (B) = $(F) \cdot (F)^T$, тензор пространственного градиента скорости (h) = $\frac{\partial v_i}{\partial y_j} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = (\dot{F}) \cdot (F)^{-1}$, тензор деформации скорости (d) = $\frac{1}{2} [(h) + (h)^T]$, где v_i – компоненты вектора скорости \mathbf{v} , y_j – компоненты радиус-вектора \mathbf{R} , \mathbf{e}_i – орты декартовой системы координат (здесь и далее точкой обозначено скалярное произведение).

Напряженное состояние описывается с помощью тензора истинных напряжений $(\Sigma) = \sigma_{ij} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$, определенного в актуальном состоянии.

Для решения задач с учетом физической нелинейности (в первую очередь задач пластического деформирования) широко используются формулировки разрешающих вариационных уравнений в скоростях деформаций и напряжений. Такие уравнения могут быть получены дифференцированием по времени уравнения принципа виртуальных мощностей в актуальной конфигурации [5, 11]

$$\int_{\Omega} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{S^\sigma} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{v} dS, \quad (1)$$

где Ω – текущий объем, S^σ – часть поверхности, на которой заданы усилия, \mathbf{f} , \mathbf{p} – векторы объемных и поверхностных сил соответственно, “ $\cdot \cdot$ ” – операция свертки тензоров.

После линеаризации (1) получим уравнение в скоростях напряжений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[(\dot{\Sigma}) \cdot \cdot (\delta d) + (\Sigma) \cdot \cdot (\delta \dot{d}) + \frac{\dot{J}}{J} (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) \right] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \left[\dot{\mathbf{f}} + \frac{\dot{J}}{J} \mathbf{f} \right] \cdot \delta \mathbf{v} d\Omega + \int_{S^\sigma} \left[\dot{\mathbf{p}} + \frac{\dot{J}}{J} \mathbf{p} \right] \cdot \delta \mathbf{v} dS, \quad (2) \end{aligned}$$

где $J = \det(F)$ – относительное изменение объема.

2. Определяющие соотношения

Используя выражение потенциальной энергии упругой деформации W , получим определяющие соотношения [1–3]. В качестве аргументов функции W примем компоненты тензора меры деформации Фингера, то есть

$$W = W (B_{ij}),$$

тогда тензор напряжений Коши–Эйлера будет выражаться в следующем виде:

$$(\Sigma) = \frac{2}{J} (F) \cdot (F)^T \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B} \right) = \frac{2}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B} \right). \quad (3)$$

Для изотропного материала, свойства которого не зависят от направления, функция удельной потенциальной энергии деформации должна зависеть лишь от инвариантов соответствующих тензоров:

$$W = W (I_{1B}, I_{2B}, I_{3B}),$$

тогда тензор напряжений можно выразить как

$$(\Sigma) = \frac{2}{J} (B) \cdot \left\{ \frac{\partial W}{\partial I_{1B}} (I) + \frac{\partial W}{\partial I_{2B}} [I_{1B} (I) - (B)] + \frac{\partial W}{\partial I_{3B}} I_{3B} (B^{-1}) \right\}.$$

Линеаризуя соотношение (3) получим выражение для скорости напряжений Коши–Эйлера:

$$\begin{aligned} (\dot{\Sigma}) &= \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial B} \right) \cdot \cdot (\dot{B}) = \\ &= 2 \left\{ \frac{1}{J} (\dot{B}) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B} \right) + \frac{1}{J} \left[(B) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial B^2} \right) \right] \cdot \cdot (\dot{B}) - \frac{1}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial W}{\partial B} \right) I_{1d} \right\} = \\ &= (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d}, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$(\Lambda_\Sigma) = \frac{4}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B} \right) \cdot (B).$$

Или

$$(\Sigma^{Tr}) = (\Lambda_\Sigma) \cdot \cdot (d), \quad (4)$$

где $(\Sigma^{Tr}) = \left(\dot{\Sigma} \right) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - I_{1d}(\Sigma)$ – производная Трусделла тензора напряжений (Σ) .

Моделирование упругопластических деформаций основано на аддитивном представлении полной деформации скорости, то есть

$$(d) = (d^e) + (d^p),$$

где (d^e) – упругая составляющая, а (d^p) – пластическая.

Предполагается справедливость ассоциированного закона течения [5, 11]

$$(d^p) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \right),$$

где $\dot{\lambda}$ – скорость пластических деформаций, Φ – функция текучести.

Рассмотрим в качестве критерия упругого деформирования условие Губера – Мизеса, которое для изотропной среды допускает обобщение в виде

$$\Phi = \sigma_i - \sigma_T(\chi) \leq 0, \quad (5)$$

где σ_i – интенсивность напряжений, $\sigma_T(\chi)$ – предел текучести, χ – параметр упрочнения.

Тогда, используя (5), пластическую деформацию скорости можно записать следующим образом:

$$(d^p) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma} \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial \Sigma'} \right) = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{(\Sigma')}{\sigma_i}.$$

3. Метод проецирования напряжений на поверхность текучести

Пусть имеется два бесконечно близких напряженных состояния k и $k+1$. По известным параметрам k -го состояния определим $(k+1)$ -е по следующей формуле:

$$\begin{aligned} ({}^{k+1}\Sigma) &= ({}^k\Sigma) + ({}^k\dot{\Sigma})\Delta t = ({}^k\Sigma) + [({}^k\Sigma^{Tr}) + ({}^k h) \cdot ({}^k\Sigma) + ({}^k\Sigma) \cdot ({}^k h)^T - I_{1d}({}^k\Sigma)]\Delta t = \\ &= ({}^k\Sigma) + \left\{ (\Lambda) \cdot \cdot \left[({}^k d) - \dot{\lambda} \frac{3({}^{k+1}\Sigma')}{2^{k+1}\sigma_i} \right] + ({}^k h) \cdot ({}^k\Sigma) + ({}^k\Sigma) \cdot ({}^k h)^T - I_{1d}({}^k\Sigma) \right\} \Delta t, \end{aligned}$$

где Δt – приращение параметра (времени), определяющее переход от предыдущего состояния к последующему.

Запишем последнее соотношение в следующем виде:

$$({}^{k+1}\Sigma) + \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_i} (\Lambda) \cdot \cdot ({}^{k+1}\Sigma') = ({}^{k+1}\tilde{\Sigma}). \quad (6)$$

Здесь

$$({}^{k+1}\tilde{\Sigma}) = ({}^k\Sigma) + \{ (\Lambda) \cdot \cdot ({}^k d) + ({}^k h) \cdot ({}^k\Sigma) + ({}^k\Sigma) \cdot ({}^k h)^T - I_{1d}({}^k\Sigma) \} \Delta t \quad (7)$$

– так называемый тензор «пробных» напряжений. Уравнение (6) определяет снос напряжений на поверхность текучести [6].

4. Общий алгоритм решения

Для решения поставленной задачи используется метод последовательных нагружений. Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний. Переход от предыдущего состояния к последующему происходит путем приращения нагрузки [4, 5, 11].

В качестве базового на шаге нагружения используется уравнение в скоростях напряжений (2) в совокупности с линеаризованными физическими соотношениями (4).

В итоге имеем разрешающее уравнение на k -м шаге нагружения

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_k} \{({}^k d) \cdot \cdot ({}^k \Lambda) \cdot \cdot (\delta d) + \\ & \quad + \frac{1}{2} ({}^k \Sigma) \cdot \cdot [(\delta h)^T \cdot ({}^k h) + ({}^k h)^T \cdot (\delta h)] - [{}^k \nabla_y \cdot {}^k \mathbf{v}] \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v}\} d\Omega + \\ & \quad + \int_{S^\sigma} \{ {}^k \mathbf{t}_n^* \cdot ({}^k h)^T - [{}^k \nabla_y \cdot {}^k \mathbf{v}] {}^k \mathbf{t}_n^* \} \cdot \delta \mathbf{v} dS = \int_{\Omega_k} {}^k \dot{\mathbf{f}}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^\sigma} {}^k \dot{\mathbf{t}}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS - \\ & \quad - \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{\Omega_k} ({}^k \Sigma) \cdot \cdot (\delta d) dV - \int_{\Omega_k} {}^k \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV - \int_{S^\sigma} {}^k \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS \right\}. \quad (8) \end{aligned}$$

Так как решаются квазистатические задачи, то можно перейти от скоростей к приращениям, например, по формуле $\mathbf{v} = \Delta \mathbf{u} / \Delta t$ (и принять $\Delta t = 1$). Решая уравнение (8), получим вектор перемещений, который определяет конфигурацию на $(k+1)$ -м шаге нагружения

$${}^{k+1} y^i = {}^k y^i + \Delta u^i \quad (9)$$

и напряженное состояние

$${}^{k+1} \sigma_{ij} = {}^k \sigma_{ij} + {}^k \dot{\sigma}_{ij} \Delta t. \quad (10)$$

Далее для учета пластических деформаций применяем метод проецирования напряжений (6). Напряженное состояние, полученное в результате использования метода проецирования напряжения на поверхность текучести, не удовлетворяет разрешающей системе уравнений. Поэтому воспользуемся итерационным уточнением напряженно-деформированного состояния. Эта итерационная процедура основана на введении в разрешающее уравнение вариации мощности «дополнительных напряжений» (Σ_∂) на возможных деформациях скорости, где дополнительные напряжения определяются как разность истинных и пробных напряжений, определяемых по формуле (7)

$$({}^k \Sigma_\partial^{m+1}) = (\Sigma^m) - (\Sigma'^m).$$

Для дискретизации системы уравнений (8) используется метод конечных элементов на основе восьмиузлового элемента [4, 5, 7, 11]. В итоге для m -й итерации на k -м шаге нагружения имеем

$${}^k K \Delta u^m = \Delta P + {}^k H - {}^k S^m,$$

где ${}^k S^m$ – вектор дополнительных напряжений.

5. Физические соотношения и разрешающее уравнение для материала 2-го порядка

Рассмотрим пример построения физических соотношений для следующего потенциала упругих деформаций:

$$W = \frac{\lambda + 2\mu}{8} (I_{1B} - 3)^2 + \mu (I_{1B} - 3) - \frac{\mu}{2} (I_{2B} - 3),$$

где λ, μ – параметры Ляме.

Получим выражение для скорости изменения напряжений Коши – Эйлера:

$$(\dot{\Sigma}) = (\Lambda_{\Sigma}) \cdot \cdot (d) + (h) \cdot (\Sigma) + (\Sigma) \cdot (h)^T - (\Sigma) I_{1d},$$

где

$$(\Lambda_{\Sigma}) = \frac{4}{J} (B) \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial B \partial B} \right) \cdot (B) = \frac{1}{J} (B) \cdot (\lambda (I) (I) + 2\mu (C_{II})) \cdot (B). \quad (11)$$

Подставив физические соотношения (11) в уравнение в скоростях напряжений (2), получим разрешающее уравнение

$$\int_{\Omega} \left\{ (d) \cdot \cdot (\Lambda) \cdot \cdot (\delta d) + \frac{1}{2} (\Sigma) \cdot \cdot \left[(\delta h)^T \cdot (h) + (h)^T \cdot (\delta h) \right] - [\nabla_y \cdot \mathbf{v}] \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} \right\} d\Omega + \int_{S^{\sigma}} \{ \mathbf{t}_n^* \cdot (h)^T - [\nabla_y \cdot \mathbf{v}] \mathbf{t}_n^* \} \cdot \delta \mathbf{v} dS = \int_{\Omega} \mathbf{f}^* \cdot \delta \mathbf{v} dV + \int_{S^{\sigma}} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{v} dS.$$

6. Численные примеры

В настоящей работе в качестве базового используется произвольный восьмиузловой конечный элемент, применяется МКЭ с численным интегрированием. Система линейных алгебраических уравнений на k -м шаге нагружения имеет вид

$$[{}^k K] \{ \Delta^k u \} = \{ \Delta^k P \} + \{ {}^k H \} - \{ {}^k S \}.$$

6.1. Упругопластическое деформирование толстостенной трубы.

Рассмотрим задачу определения напряжений в толстостенной длинной трубе, находящейся под воздействием осесимметричного давления p при упругопластическом деформировании в геометрически линейной постановке (плоская задача) (рис. 1). Внутренний радиус трубы $a = 14$ см, внешний $b = 2$ см, модуль упругости $E = = 2 \cdot 10^6$ кг/см², коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$. Материал полагаем идеально пластическим, критерием пластичности служит условие Губера – Мизеса (5). Функция изотропного упрочнения имеет вид

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T.$$

Из аналитического решения найдено отношение внутреннего давления к пределу текучести $p/\sigma_T = 0.7208$, при котором радиус пластической зоны $c = 1.5$ см [10].

Так как задача обладает двумя плоскостями симметрии, рассматривалась лишь четверть трубы с соответствующими граничными условиями (рис. 2); в силу того, что задача плоская, исключаем осевые смещения всех узлов.

Задача является физически нелинейной, но деформации малы, поэтому она решалась за один шаг по нагрузке. Труба разбивалась на 20 элементов по ширине и 20 элементов по окружному направлению (рис. 3).

На рис. 4 показана пластическая зона деформированной трубы, на рис. 5 – распределение радиальных и окружных напряжений в трубе по отношению к пределу текучести.

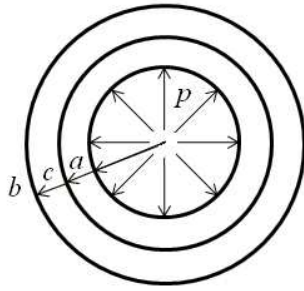


Рис. 1. Толстостенная труба

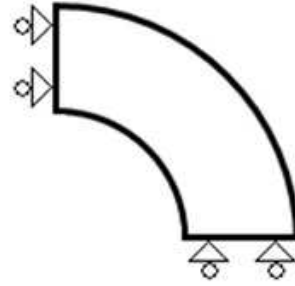


Рис. 2. Четверть трубы с граничными условиями

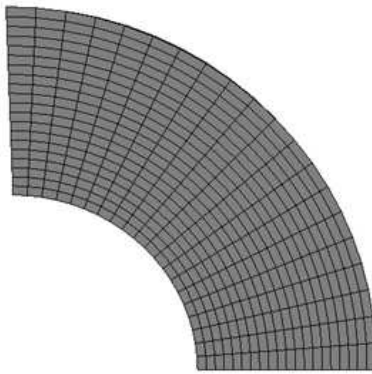


Рис. 3. Конечноэлементная сетка

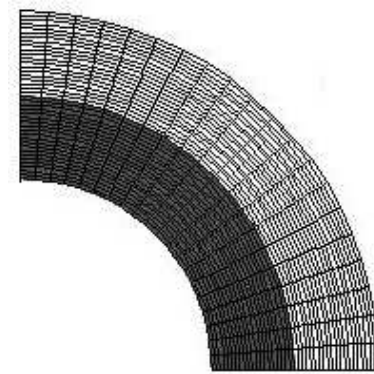


Рис. 4. Пластическая зона деформированной трубы

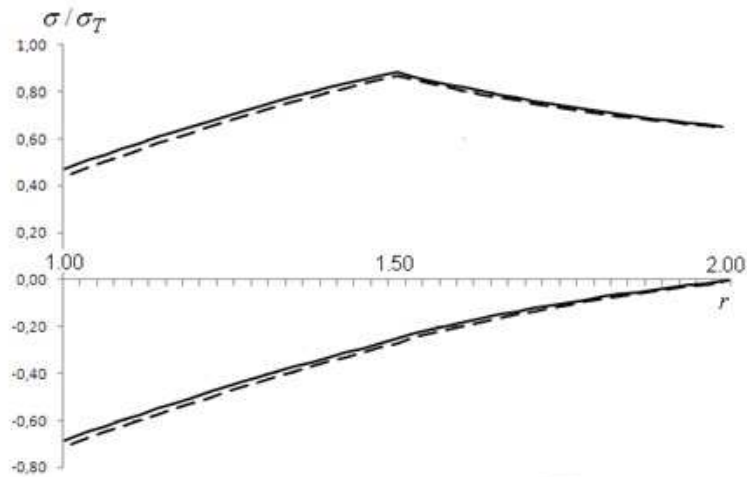


Рис. 5. Распределение радиальных и окружных напряжений в трубе

6.2. Упругопластическое растяжение круглого стержня. Рассмотрим задачу растяжения круглого стержня со следующими параметрами: $R = 6.4134$ мм, $R_0 = 0.982R$ мм, $L = 26.667$ мм. Отметим, что для конкретизации места образования шейки в центре стержня задается снижение радиуса на 1.8%.

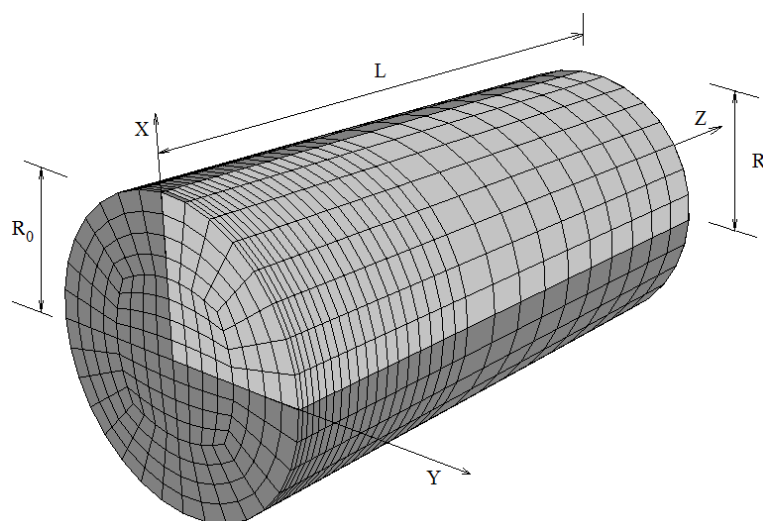


Рис. 6. Геометрия и конечноэлементная дискретизация

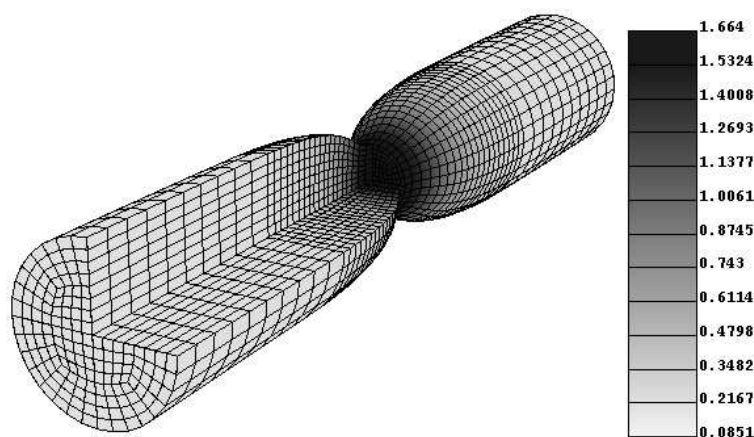


Рис. 7. Интенсивность пластических деформаций

Критерием пластичности служит условие Губера–Мизеса (5). Функция нелинейного изотропного упрочнения имеет вид [8, 9]

$$\sigma_T(\chi) = \sigma_T + h\chi + (\sigma_\infty - \sigma_T)(1 - e^{-\delta\chi}).$$

Параметры материала: $E = 206.9$ ГПа, $\nu = 0.29$, $\sigma_\infty = 0.715$ ГПа, $\sigma_T = 0.450$ ГПа, $h = 0.129$, $\delta = 16.93$.

Конечноэлементная дискретизация половины стержня представлена на рис. 6. На торце задаются перемещения. Так как задача обладает тремя плоскостями симметрии, рассматривалась восьмая часть стержня с соответствующими граничными условиями. На рис. 7 приведена интенсивность пластических деформаций для конечного положения, на рис. 8 – диаграмма «сила–перемещение». Максимальная зона пластических деформаций возникает в месте образования шейки. Из рис. 8 видно, что решение, полученное с помощью предложенной методики, имеет хорошее совпадение с результатами решения других авторов.

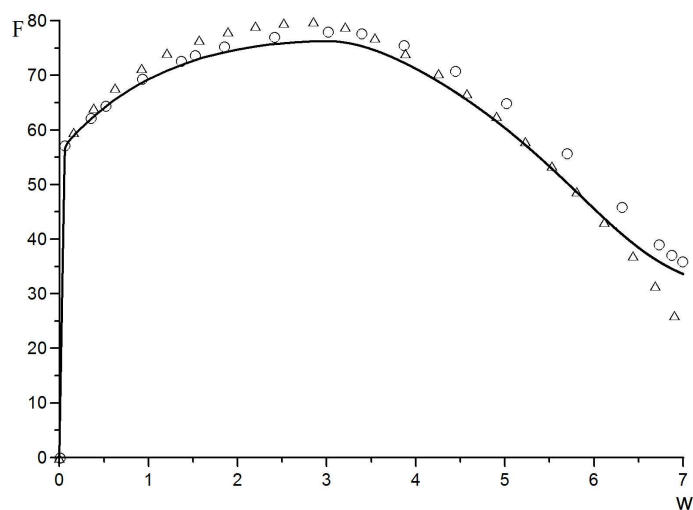


Рис. 8. Диаграмма «сила – перемещение торца»: сплошная кривая – решение по описанной методике, \circ – решение [8], Δ – решение [9]

Заключение

В работе предложена методика численного исследования изотропных материалов с использованием левого тензора Коши–Грина, для которых физические соотношения задаются с помощью функции упругого потенциала. Получены линеаризованные определяющие соотношения и разрешающее уравнение. В качестве примера рассмотрен материал 2-го порядка, выбрано соответствующее выражение потенциальной энергии упругой деформации. Критерием прочности служит условие Губера–Мизеса с упрочнением. Пластическое деформирование моделируется с помощью метода проецирования напряжений на поверхность текучести с итерационным уточнением текущего напряженно-деформированного состояния. Численная реализация основана на методе конечных элементов на базе восьмиузлового полилинейного элемента. Решены тестовая задача о деформировании толстостенной трубы и задача об упругопластическом растяжении круглого стержня. Результаты расчетов демонстрируют работоспособность предложенной методики исследования нелинейных задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00955, 12-01-97026, 12-01-31212).

Summary

R.L. Davydov, L.U. Sultanov. Numerical Investigation of Large Elastic-Plastic Deformations by Finite Element Method.

The present paper deals with the development and implementation of numerical methods for investigating the stress-strain state of elastic-plastic solids with large deformations. An incremental loading technique is used. Spatial discretization is based on the finite element method. Using the proposed procedure, the problem of elastic-plastic deformations of a pipe and the problem of tension of a round bar are solved.

Key words: finite elastic-plastic deformations, additive decomposition of total strains, linearized physical relations.

Литература

1. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 29–37.
2. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 3. – С. 122–132.
3. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. III. Постановки задачи и алгоритмы решения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 108–120.
4. Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У. Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. IV. Конечноэлементная реализация. Примеры решения задач // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 3. – С. 115–126.
5. Голованов А.И., Султанов Л.У. Численное исследование больших упругопластических деформаций трехмерных тел // Прикл. механика. – 2005 – Т. 41, № 6. – С. 36–43.
6. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительных методы в гидродинамике. – М. Мир, 1967. – С. 212–263.
7. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. – 283 p.
8. Schröder J., Gruttmann F., Löblein J. A simple orthotropic finite elasto-plasticity model based on generalized stress-strain measures // Comput. Mech. – 2002. – V. 30, No 1. – P. 48–64.
9. Eidel B., Gruttmann F. Elastoplastic orthotropy at finite strains: multiplicative formulation and numerical implementation // Comp. Mater. Sci. – 2003. – V. 28, No 3–4. – P. 732–742.
10. Малмин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
11. Голованов А.И., Султанов Л.У. Исследование закритического упругопластического состояния трехмерных тел с учетом конечных деформаций // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2008. – № 4. – С. 13–16.

Поступила в редакцию
08.10.12

Давыдов Руслан Лаврентьевич – аспирант кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: ruslan.davydov@mail.ru

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: Lenar.Sultanov@kpfu.ru